Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

8

Vamos a aprender

es el proyecto en el que los estudiantes se convierten en protagonistas de su proceso de formación. Por medio de materiales que motivan a estudiar y a participar de forma activa, se consigue un aprendizaje eficaz y significativo.

Los contenidos se relacionan con el entorno más inmediato y trabajan competencias esenciales para poder desarrollar las habilidades que la vida exija el día de mañana.

El proyecto es una apuesta por el desarrollo integral de los estudiantes. Junto con una sólida formación académica, proporciona herramientas de reflexión y análisis de la sociedad en la que vivimos por medio de sus temas de Educación ambiental, Estilos de vida saludable y Educación para la sexualidad y la ciudadanía.

Aprendiendo a convivir de manera armónica, lograremos todos juntos que el colegio llegue a ser un espacio de crecimiento que nos haga mejores y en el que todos queramos estar.

Así que es hora de comenzar y aceptar el reto:

¡Vamos a aprender!

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender
Matemáticas
Libro del estudiante

8

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Juan Manuel Santos Calderón

MINISTRA DE EDUCACIÓN NACIONAL
Yaneth Cristina Giha Tovar

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Víctor Javier Saavedra Mercado

DIRECTORA DE CALIDAD DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Paola Andrea Trujillo Pulido

SUBDIRECTOR DE FOMENTO DE COMPETENCIAS
Alfredo Olaya Toro (E)

SUBDIRECTORA DE REFERENTES Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
María Claudia Sarta Herrera

EQUIPO DE MATERIALES PEDAGÓGICOS
COORDINADORA: Angélica Ortega Santacruz
PROFESIONALES: Deyanira Alfonso Sanabria, Edna Maritza Corredor Suárez, Diana Patricia Tobón Maldonado, Andrés Alberto Andrade Ceballos

EQUIPO TÉCNICO DE MATEMÁTICAS
ASESORA: Yadira Sanabria Mejía
PROFESIONALES: Jenny Andrea Blanco Guerrero, Guillermo Andrés Salas Rodríguez, Jairo Anibal Rey Monroy

EQUIPO TÉCNICO EVALUADOR DE MATERIALES MATEMÁTICAS
Ricardo Cañón Moreno, María Isabel Noreña, Diana Velásquez Rojas, Ana Celia Castiblanco Paiba, María Beatriz Rocha

EQUIPO PROGRAMAS TRANSVERSALES Y COMPETENCIAS CIUDADANAS
COORDINADORA: Olga Lucía Zárate Mantilla
PROFESIONALES: Francine Botero Garnica, Sandra Patricia Mora Varela, Juan Camilo Caro Daza

EQUIPO EDICIONES SM

DIRECTOR EDITORIAL
Jaime Marco Frontelo

GERENTE EDITORIAL
Jeannette Benavides Escobar

EDITORA JEFE DE ÁREA
Luz Stella Alfonso Orozco

EDITORES
Leidi Gil Fuentes, Deysi Roldán Hernández, Josué Malagón Montaña

COLABORADORES
Doris Esperanza Álvarez Quintero, Marlady Bogotá Torres, Tatiana Carvajal Martínez, María Fernanda Dueñas Álvarez, Andrés Camilo Carrillo Acosta, Mario Alberto Cañón Gutiérrez, Miguel Ángel Alfonso Orozco, John Álvaro Munar Ladino

COORDINADOR DE CORRECCIÓN
Rafael Humberto Castro Fernández

CORRECCIÓN DE ESTILO
Angélica María Martín Rincón, Claudia Martínez Suárez

GERENTE DE ARTE Y DISEÑO
Leonardo Rivas Agudelo

COORDINACIÓN DE DISEÑO
Elkin Vargas Bohórquez

DISEÑO DE LA SERIE
Elkin Vargas Bohórquez, Magaly Duque Santos, Liliana Bohórquez Algecira, Ana Lilly Pardo Beltrán

DISEÑO DE CUBIERTA
Juan Camilo López Rojas

DIAGRAMACIÓN
Alexandra León Ruíz, Rafael Niebles Montoya, Alejandro Bohórquez Rodríguez, Diego Camacho Arciniegas, Milena Buenaventura

FOTOGRAFÍA
Archivo SM/ KEYSTONE/ Montse Fontich/ Norbert Tomás/ SPAINSTOCK/Andres Fonseca/ Shutterstock/ AGIF/ Bokic Bojan/ Barone Firenze/ Andrey Khrolenok/ gary yim/ Jeff Banke/ Radu Razvan/ satephoto/ meunierd/ AGIF/ jan kranendonk/ Anton_Ivanov/ littlewormy/ Radu Bercan/ Radu Bercan

RETOQUE DIGITAL
Ángel Camacho Linares, Mario Alarcón Orozco, Kenny Bacares Fonseca, Fernando Amézquita Quintana

Carrera 85 K N° 46 A - 66
Bogotá, D. C., Colombia
ISBN 978-958-780-228-3

IMPRESIÓN
Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*
Impreso en Quad/Graphics

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

sm

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Presentación

Aceptar el reto de hacer de Colombia la nación más educada de América Latina en el 2025 es una decisión que genera una gran responsabilidad. La necesidad de no perder ni un segundo en el camino hacia la calidad es un llamado urgente a rectores, docentes y padres de familia que se levantan cada mañana comprometidos con el futuro de miles de estudiantes.

Lograr una educación de calidad es el objetivo que nos hemos trazado para construir un país con igualdad de oportunidades para todos y en paz. Una igualdad que no sólo contempla el derecho que cada uno de los colombianos tiene a la educación, sino que se refuerza en la idea de equilibrar la cancha de juego y hacer que todos nuestros niños, niñas y adolescentes tengan las mejores condiciones en los colegios, incluyendo materiales pedagógicos de alta calidad que contribuyan al fortalecimiento de su proceso de aprendizaje.

Como Ministerio sabemos que la excelencia educativa se gesta en el aula, y es allí donde se deben concentrar todos los esfuerzos de transformación. Por esto, dotar de herramientas pedagógicas suficientes e idóneas que acompañen y refuercen la práctica en el salón de clase, es la forma en la que se hará visible el esfuerzo de un equipo de rectores y docentes pioneros comprometidos con el mejoramiento de la calidad en la educación.

Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional presenta el siguiente material de apoyo para el proceso pedagógico de enseñanza de lenguaje y matemáticas, de alta calidad. Este material ha sido seleccionado de manera juiciosa por expertos, para que docentes y estudiantes lo incorporen a la práctica de aula, los trabajen, los disfruten con su familia, aprendan con ellos y descubran un mundo de narraciones mágicas y problemas matemáticos que les dará paso a un nuevo universo de posibilidades.

Estos libros, cuadernos de trabajo y guías llegarán a los colegios y cobrarán vida en el aula gracias al compromiso y dedicación de cada uno de ustedes. Por esto es importante explorarlos, conocerlos y apropiarlos; con seguridad este será un paso más hacia nuestra meta de hacer de Colombia la más educada con ustedes como los protagonistas en este nuevo capítulo de su historia.

Sin lugar a duda, esta es una de las apuestas más importantes por el futuro del país.

Estructura de tu libro

Este libro está organizado en seis divisiones o unidades. Cada una de ellas se compone de subdivisiones o temas. Las unidades presentan la siguiente estructura:

Apertura de unidad

En esta doble página recordarás **aquello que ya sabes** y **conocerás lo que vas a aprender** y su aplicación en tu vida cotidiana.

Ruta didáctica

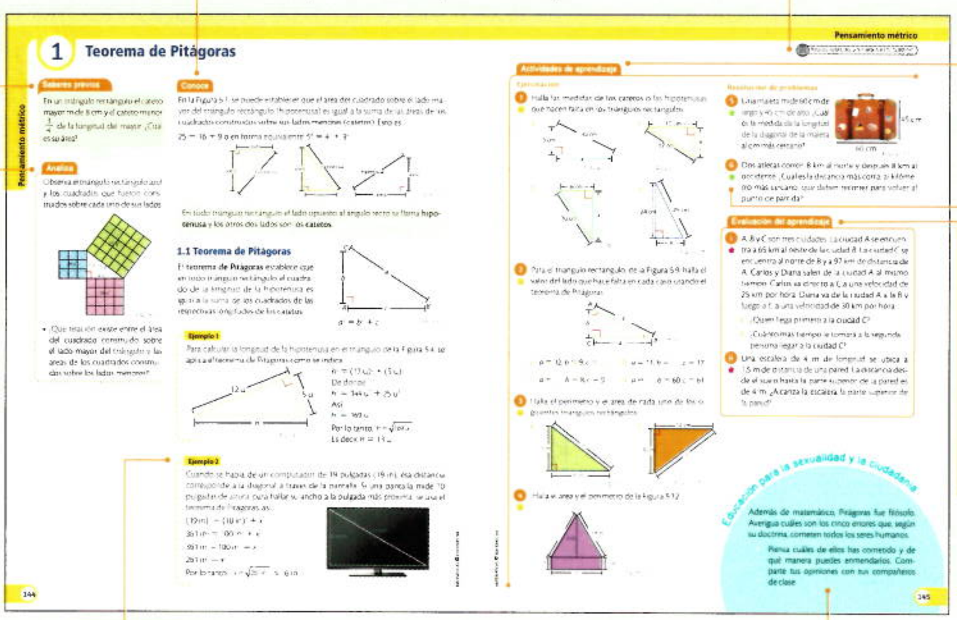
El desarrollo de todos los contenidos presenta la siguiente **ruta didáctica**.

Conoce
Desarrolla los contenidos del tema. Sintetiza los conceptos básicos que debes aprender.

Recuerda que estas actividades las debes realizar en tu cuaderno.

Saberes previos
Explora lo que ya sabes.

Analiza
Establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, mediante una situación problema.



Actividades de aprendizaje
Desarrolla y refuerza lo que has aprendido.

Procesos cognitivos
- Memoria
- Comprensión
- Análisis
- Aplicación
- Síntesis
- Evaluación

Evaluación del aprendizaje
Evalúa tus conocimientos.

Ejemplos
Aplicación inmediata de los conceptos explicados.

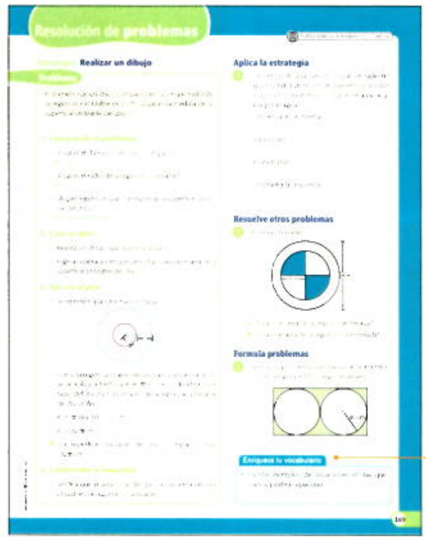
Temas transversales

Practica más

Resuelve **más actividades** relacionadas con los temas de la unidad y **desarrolla habilidades matemáticas**.

Resolución de problemas

Resuelve problemas con el uso de diferentes estrategias. Sigue el **ejemplo resuelto** como guía y pon en práctica la estrategia estudiada.

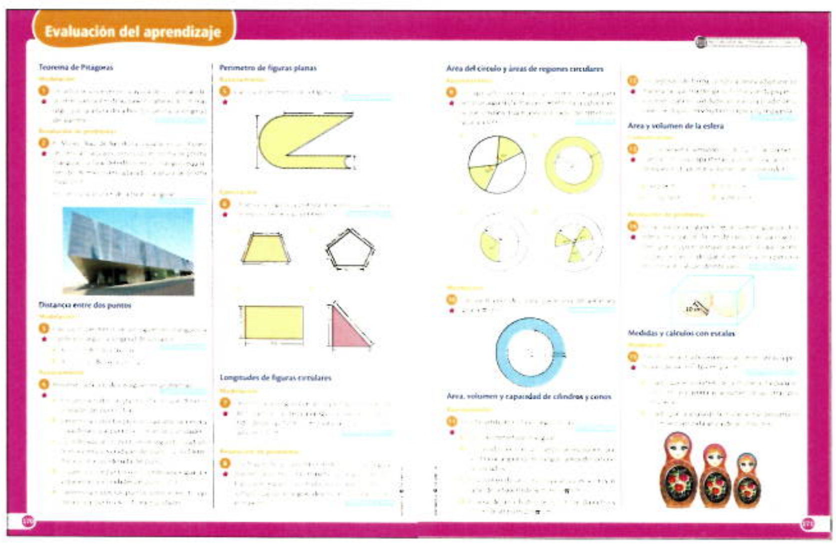


Enriquece tu vocabulario

Amplía tu vocabulario matemático.

Evaluación del aprendizaje

En esta sección tendrás la oportunidad de **aplicar los temas vistos** y **reforzar tus conocimientos**.



Temas transversales

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Con este tema desarrollarás competencias para **ejercer, respetar y promover los derechos humanos**, los cuales están presentes en tus relaciones cotidianas.

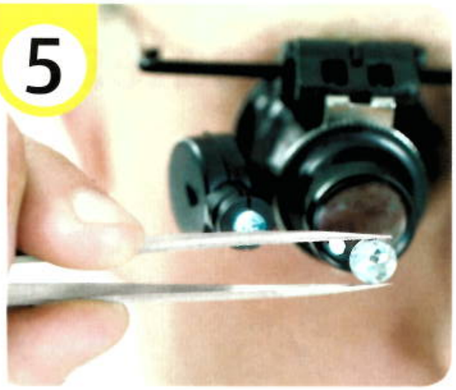
Educación ambiental

Plantea actividades, ejemplos y situaciones en las que podrás reflexionar sobre las **relaciones entre el individuo y su entorno natural**, como proceso interactivo, y **la protección y el cuidado** de los recursos naturales y los seres vivos.

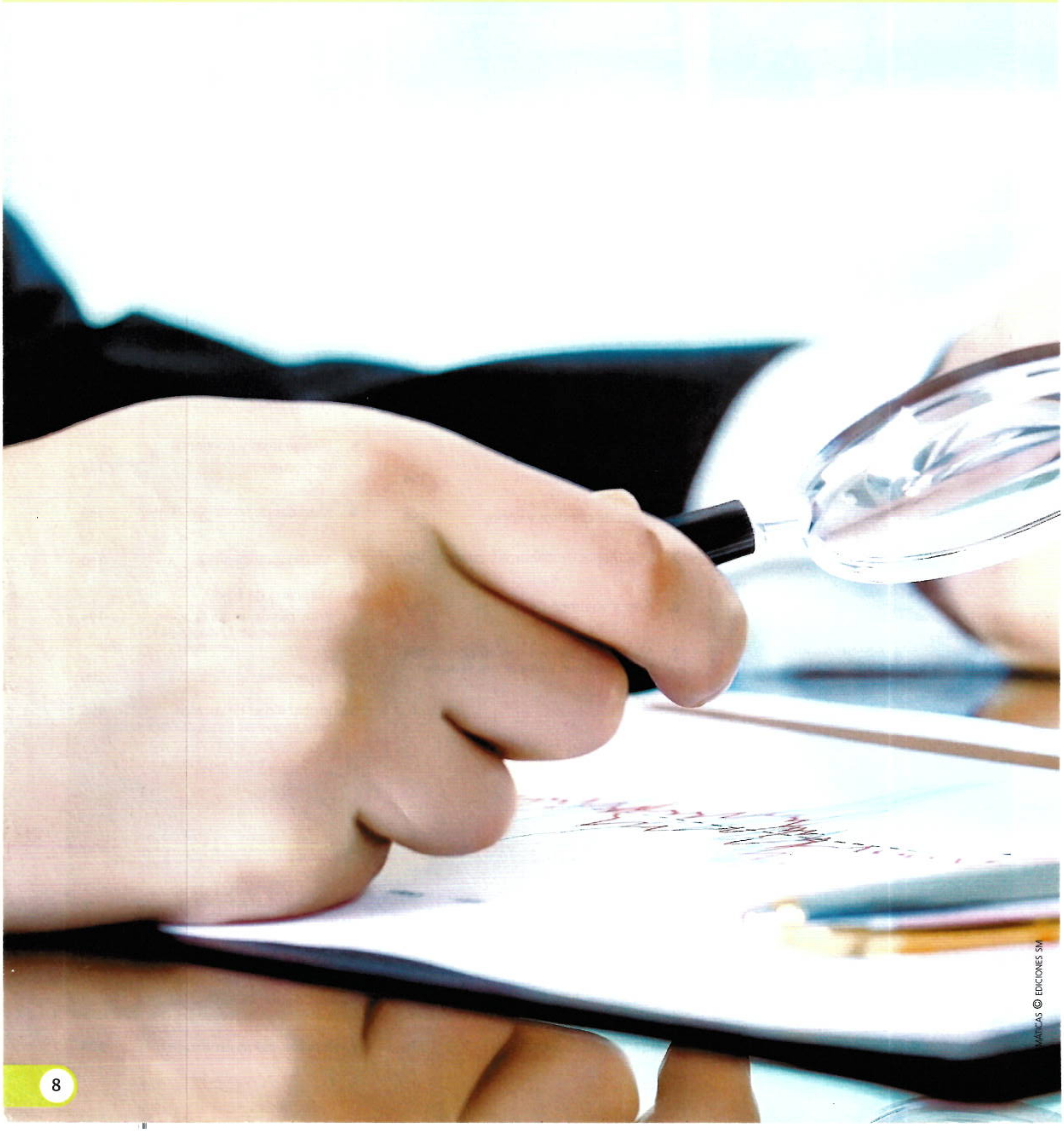
Estilos de vida saludable

Presenta actividades, ejemplos y situaciones con las cuales aprenderás a **tomar decisiones sobre tu salud y tu bienestar** físico, emocional e intelectual, tanto individual como colectivo.

Contenido Matemáticas 8



1 Números reales



Ya sabemos

- Identificar el conjunto de números enteros, su relación de orden y sus operaciones.

Vamos a aprender

- A representar, ordenar y comparar números reales en la recta real.

Nos sirve para

- Interpretar datos numéricos del mundo real.

1 Números racionales

Saberes previos

Simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

- $\frac{56}{70}$
- $\frac{24}{60}$
- $\frac{72}{120}$
- $\frac{80}{320}$

Analiza

La Figura 1.1 está dividida en regiones con cuatro colores diferentes.

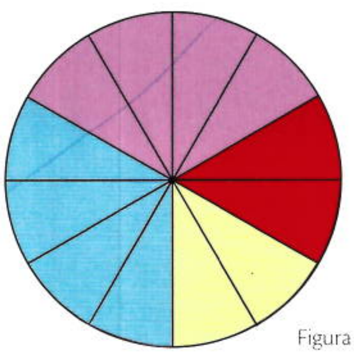


Figura 1.1

- ¿Cuáles colores ocupan la misma superficie en el círculo?

Conoce

El círculo está dividido en doce regiones iguales, que están sombreadas con colores diferentes así:

- El color morado ocupa cuatro regiones de la unidad.
- El color azul ocupa cuatro regiones de la unidad.
- El color rojo ocupa dos regiones de la unidad.
- El color verde ocupa dos regiones de la unidad.

Por lo tanto, las regiones de color azul y morado ocupan la mayor cantidad de regiones del círculo, cuatro cada color. Las regiones de color rojo y verde ocupan la menor cantidad de regiones, dos cada color.

1.1 Fracciones equivalentes

Al considerar el círculo de la Figura 1.1 como una unidad, se puede establecer que cada color ocupa una fracción de ella. Una representación posible es:

La región morada ocupa $\frac{1}{3}$ de la unidad; la región azul ocupa $\frac{2}{6}$ de la unidad; la región amarilla ocupa $\frac{1}{6}$ de la unidad; y la región verde ocupa $\frac{2}{12}$ de la unidad.

Además, se pueden establecer las siguientes comparaciones:

- Las regiones morada y azul ocupan la misma parte de la unidad. Por lo tanto, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes.
- Las regiones verde y amarilla ocupan la misma parte de la unidad. Por lo tanto, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes.

Las **fracciones equivalentes** son aquellas fracciones que representan la misma parte de una unidad.

Al amplificar o simplificar una fracción se obtiene otra equivalente, porque se está multiplicando o dividiendo, respectivamente, por la unidad, por ejemplo:

Unidad

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{4}{6}$$

Fracciones equivalentes

Dada una fracción, se pueden obtener fracciones equivalentes a ella, ya sea por **amplificación** o por **simplificación**.

- Se amplifica una fracción cuando se multiplica tanto el numerador como el denominador por un mismo número distinto de cero.
- Se simplifica una fracción cuando se divide tanto el numerador como el denominador por un mismo número distinto de cero.

Ejemplo 1

Se pueden obtener fracciones equivalentes a $\frac{15}{60}$ de dos maneras:

Amplificación: $\frac{15}{60} \overset{\times 2}{=} \frac{30}{120} \overset{\times 3}{=} \frac{90}{360}$

Simplificación: $\frac{15}{60} \overset{\div 3}{=} \frac{5}{20} \overset{\div 5}{=} \frac{1}{4}$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

1.2 Números racionales

Un **número racional** es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada. Se toma como representante de este número la fracción irreducible, es decir aquella que está simplificada al máximo.

El **conjunto de los números racionales** ($\mathbb{Q}$) es el conjunto de números que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros con $b \neq 0$.

Ejemplo 2

Estos son ejemplos de números racionales: $3, \frac{6}{13}, -12, \frac{8}{5}, 2, 0, -\frac{4}{7}$.

1.3 Orden en los números racionales

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se puede establecer una de estas relaciones:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Para comparar números racionales, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador. Luego, se comparan los numeradores.

Ejemplo 3

Para comparar $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{7}{10}$, se buscan fracciones equivalentes a ellas con el mismo denominador. Estas son: $-\frac{6}{10}$ y $-\frac{7}{10}$. Como $-6 > -7$, entonces $-\frac{6}{10} > -\frac{7}{10}$. Por lo tanto, $-\frac{3}{5} > -\frac{7}{10}$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Encuentra cuatro fracciones equivalentes en cada caso.
   a. $\frac{7}{5}$ b. $\frac{49}{35}$ c. $\frac{30}{45}$
   d. $-\frac{16}{20}$ e. $-\frac{9}{5}$ f. $-\frac{1}{4}$

Comunicación

2. Explica qué diferencias hay entre números enteros y números racionales. Después, responde.
   a. ¿Todos los enteros son racionales?
   b. ¿Todos los números racionales son enteros?
   c. ¿Cuál es la relación entre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$?
   d. ¿Cuál es la relación entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$?

Razonamiento

3. Escribe $>$, $<$ o $=$, según corresponda.
   a. $-2 \;\square\; \frac{3}{5}$ b. $\frac{5}{9} \;\square\; \frac{-4}{9}$
   c. $\frac{5}{4} \;\square\; \frac{4}{7}$ d. $\frac{7}{-6} \;\square\; \frac{6}{5}$

Evaluación del aprendizaje

Escribe el número racional que representa cada conjunto de fracciones equivalentes.

a. $\left\{\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{15}{12}, \frac{20}{16}, \frac{35}{28}, \frac{50}{40}\right\}$

b. $\left\{-\frac{9}{27}, -\frac{6}{18}, -\frac{3}{9}, -\frac{2}{6}, -\frac{1}{3}\right\}$

2 Expresión decimal de un número racional

Saberes previos

Halla los cocientes de cada división.

- $5 \div 10$
- $5 \div 100$
- $5 \div 1000$
- $5 \div 10\,000$

¿Qué sucede con los cocientes al aumentar el número de ceros? Enuncia una propiedad a partir de los resultados.

Analiza

Un padre reparte 90 m^2 de tierra entre sus tres hijos. Al mayor le da del terreno total y la parte restante la divide de manera equitativa entre los otros dos hijos.

- ¿Cuántos metros cuadrados de tierra le corresponde a cada uno?

Conoce

Para saber cuántos metros cuadrados le corresponden a cada hijo, primero se halla la cuarta parte del área del terreno; es decir, $90 \div 4$. El cociente de esta división es 22,5.

Como se repartió $\frac{1}{4}$ de la superficie, quedan $\frac{3}{4}$ del terreno por repartir. Esto es: $\frac{3}{4}$ de 90 es $\frac{270}{4} = 270 \div 4 = 67{,}5 m^2$. Ahora, se divide entre 2 este resultado para determinar qué área le corresponde a cada uno de los otros dos hijos.

Así, $67{,}5\ m^2 \div 2 = 33{,}75\ m^2$.

En conclusión, al hijo mayor le corresponden 22,5 m^2 y a cada uno de los otros dos hijos le corresponden 33,75 m^2.

Los números 22,5 y 33,75 son las **expresiones decimales** de los números racionales $\frac{90}{4}$ y $\frac{270}{4}$, respectivamente.

2.1 Expresión decimal de un número racional

La **expresión decimal** equivale a la división del numerador entre el denominador de una fracción.

De acuerdo con la estructura de las cifras decimales, la expresión decimal de un número racional puede ser **exacta**, **periódica pura** o **periódica mixta.**

Expresión decimal	Características	Ejemplo
Exacta	Tiene un número finito de cifras decimales. Equivale a una fracción decimal, es decir, una con denominador 10 o una potencia de 10.	$\frac{9}{2} = 4{,}5$
Periódica pura	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que se repite indefinidamente. Ese grupo se llama periodo.	$\frac{10}{3} = 3{,}33... = 3{,}\widehat{3}$
Periódica mixta	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que no se repite y un grupo de cifras que se repite indefinidamente. El grupo que no se repite se llama anteperiodo.	$\frac{25}{6} = 4{,}166... = 4{,}1\widehat{6}$

Tabla 1.1

La clasificación de las expresiones decimales de los números racionales se puede resumir de la siguiente manera:

- Expresiones decimales
  - Exactas
  - Periódicas
    - Mixtas
    - Puras

Ejemplo 1

Al calcular la expresión decimal de los números $-\frac{5}{4}, \frac{7}{3}, \frac{9}{5}, -\frac{19}{6}, \frac{50}{3}$ y $\frac{17}{6}$ se encuentra lo siguiente:

$$-\frac{5}{4} = -1{,}25 \qquad \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots \qquad \frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots$$

$$\frac{9}{5} = 1{,}8 \qquad -\frac{19}{6} = -3{,}166\ldots \qquad \frac{50}{3} = 16{,}66\ldots$$

De lo anterior se deduce que estas expresiones decimales son:

Exacta

$$-\frac{5}{4} = -\underbrace{1}_{\text{Parte entera}},\overbrace{25}^{\text{Parte decimal}}$$

Periódica pura

$$\frac{7}{3} = \underbrace{2}_{\text{Parte entera}},\overbrace{\overset{\frown}{3}}^{\text{Periodo}}$$

Periódica mixta

$$\frac{17}{6} = \underbrace{2}_{\text{Parte entera}},\underbrace{8}_{\text{Anteperiodo}}\overbrace{\overset{\frown}{3}}^{\text{Periodo}}$$

Exacta

$$\frac{9}{5} = \underbrace{1}_{\text{Parte entera}},\overbrace{8}^{\text{Parte decimal}}$$

Periódica mixta

$$-\frac{19}{6} = -\underbrace{3}_{\text{Parte entera}},\underbrace{1}_{\text{Anteperiodo}}\overbrace{\overset{\frown}{6}}^{\text{Periodo}}$$

Periódica pura

$$\frac{50}{3} = \underbrace{16}_{\text{Parte entera}},\overbrace{\overset{\frown}{6}}^{\text{Periodo}}$$

2.2 Fracción generatriz de un número racional

Todo decimal exacto, periódico puro y periódico mixto tiene una representación fraccionaria llamada **fracción generatriz.**

- La **fracción generatriz de una expresión decimal exacta** es aquella cuyo numerador es igual a la parte entera seguida por la parte decimal (sin la coma) y el denominador es una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales tiene el número.

Ejemplo 2

La fracción generatriz de 4,3567 se puede conseguir así:

$$4{,}3567 = 4{,}3567 \cdot \frac{10\,000}{10\,000} = \frac{43\,567}{10\,000}$$

- La **fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura** con parte entera nula tiene por numerador el periodo y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo. Si el número tiene parte entera distinta de cero, se calcula la fracción generatriz de la parte decimal y después se le suma la parte entera.

Ejemplo 3

La expresión decimal 13,735735735735735... es periódica pura y su periodo tiene tres cifras. Para encontrar su fracción generatriz, se puede proceder así:

$$13 + \frac{735}{\underbrace{999}_{\text{Tantos nueves como cifras tenga el periodo}}} = \frac{4\,574}{333}$$

2 Expresión decimal de un número racional

- La **fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta** con parte entera nula tiene por numerador un número formado por el anteperiodo seguido del periodo menos el anteperiodo; y por denominador, un número con tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo. Si el número tiene parte entera distinta de cero, se calcula la fracción generatriz de la parte decimal y después se le suma la parte entera.

Ejemplo 4

La fracción generatriz de la expresión decimal 5,345222222… se calcula así:

$$5 + \frac{3\,452 - 345}{9\,000} = 5 + \frac{3\,107}{9\,000} = \frac{48\,107}{9\,000}$$

Ejemplo 5

Las fracciones generatrices de 0,45; 2,1515… y 3,822… son:

- 0,45 es una expresión decimal exacta; entonces: $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.
- 2,15... es una expresión decimal periódica pura; por lo tanto:

$$2{,}151515... = 2 + 0{,}151515... = 2 + \frac{15}{99} = 2 + \frac{5}{33} = \frac{71}{33}$$

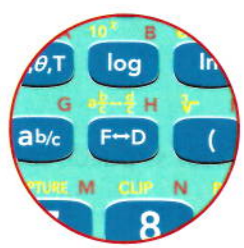
- 3,822… es una expresión decimal periódica mixta; luego:

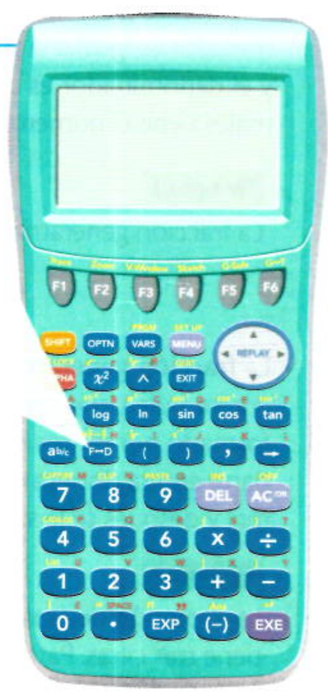
$$3{,}8222 = 3 + 0{,}82222... = 3 + \frac{82 - 8}{90} = 3 + \frac{74}{90} = \frac{172}{45}$$

MatemaTICS

Convierte los resultados de decimal a fracción

Las calculadoras científicas tienen una función que convierte un resultado decimal en fracción y viceversa utilizando la tecla F↔D. Este botón puede cambiar según la referencia de la calculadora.





- Cuando el resultado se da en fraccionario, esta función da la salida de la expresión como el número decimal correspondiente.

Por ejemplo, al efectuar la operación 56 ÷ 50 así:

5 6 ÷ 5 0 EXE

Entonces, se observa en la pantalla esto:

56 ÷ 50 =
1.12

Al oprimir la tecla F↔D, la calculadora muestra la siguiente expresión:

1┘3┘25

Esto se interpreta como $1 + \frac{3}{25}$.

Al oprimir nuevamente la tecla F↔D, la calculadora muestra la cantidad 1,12.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Utiliza la calculadora para hallar la expresión decimal de cada fracción.

a. $\frac{3}{5}$ b. $-\frac{7}{4}$ c. $\frac{2}{9}$

d. $\frac{23}{5}$ e. $\frac{65}{4}$ f. $-\frac{42}{4}$

g. $\frac{13}{6}$ h. $\frac{92}{51}$ i. $-\frac{15}{7}$

2 Completa la Tabla 1.2.

Expresión decimal	0,57		$3,\widehat{25}$		$4,3\hat{6}$
Expresión fraccionaria		$\frac{3}{7}$		$\frac{9}{20}$	

Tabla 1.2

3 Halla la fracción generatriz de cada número.

a. $5,\hat{3}$ b. $0,12\hat{5}$ c. 7,05

d. $0,7\hat{4}$ e. $4,0\hat{6}$ f. $3,1\widehat{23}$

g. $83,\hat{2}$ h. 23,5 i. $84,\widehat{26}$

j. $90,\widehat{351}$ k. $5,3\hat{8}$ l. $0,42\widehat{32}$

4 Halla la expresión decimal de los números que están en las casillas y colorea según la clave dada.

$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{9}$	$\frac{23}{6}$
$\frac{13}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{33}{8}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{72}{7}$
$\frac{43}{6}$	$\frac{25}{9}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{5}{8}$

- Colorea de azul las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea exacta.
- Colorea de verde las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea periódica pura.
- Colorea de rojo las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea periódica mixta.

Comunicación

5 Rodea la o las afirmaciones que son verdaderas.

a. Todo número entero es racional periódico.

b. Los números racionales forman el conjunto de todos los números con infinitas cifras decimales.

c. Toda fracción se puede escribir como un decimal.

Resolución de problemas

6 El agua dulce es un elemento escaso en la Tierra, sobre todo la que se utiliza para satisfacer las necesidades diarias.

Agua en la Tierra

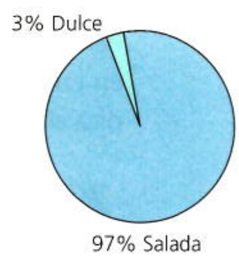


Figura 1.2

Agua dulce en la Tierra

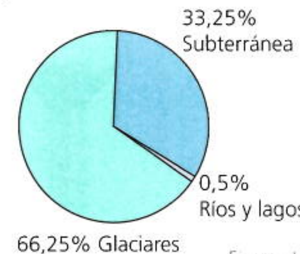


Figura 1.3

- De cada 100 litros de agua dulce, ¿qué parte se encuentra en ríos y lagos?

Evaluación del aprendizaje

Escribe como un producto de factores primos los denominadores de cada fracción. Luego, halla la expresión decimal de cada una y escribe una conclusión al respecto.

a. $\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, -\frac{6}{25}$ b. $-\frac{8}{3}, -\frac{1}{7}, \frac{2}{9}$

c. $\frac{5}{6}, -\frac{4}{15}, -\frac{7}{30}, -\frac{4}{45}$

Educación ambiental

El río Bogotá arroja diariamente al Magdalena, alrededor de $\frac{79}{1000}$ de toneladas de plomo, $\frac{184}{9}$ de toneladas de hierro, $\frac{52}{10}$ de toneladas de detergente y $\frac{133}{90}$ de toneladas de desechos sólidos. ¿Cuál de estos desechos contamina más el río?

- ¿Qué haces para contribuir a la reducción de la contaminación del agua?

3 Números racionales en la recta numérica

Saberes previos

Escribe las características de la recta numérica y representa los siguientes números en ella -3, -1, 0, 4, 6, 10.

Analiza

En un tornillo, se llama *paso* a la distancia entre dos filamentos consecutivos. En el tornillo de rosca sencilla de la Figura 1.4, el paso mide $\frac{1}{4}$ dm.

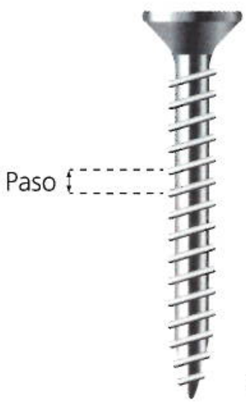


Figura 1.4

- Si por cada vuelta que se le da al tornillo su avance es igual a un paso, ¿cuántas vueltas se necesitan para que el tornillo se enrosque totalmente?, ¿qué distancia alcanza a enroscarse el tornillo en cuatro vueltas?

Conoce

El tornillo tiene 16 pasos; por lo tanto, necesita 16 vueltas para quedar completamente enroscado.

La representación gráfica de la distancia que se enrosca el tornillo en cada vuelta se observa en la recta numérica de la Figura 1.5. En esta, se divide la unidad (1 dm) en cuatro partes iguales y se señala una por cada vuelta que da el tornillo.

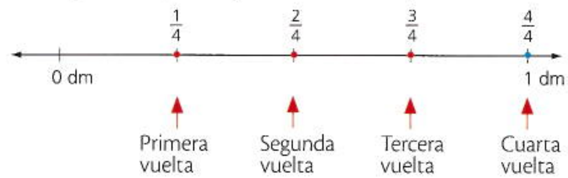


Figura 1.5

En la cuarta vuelta, el tornillo se ha enroscado 1 dm.

Para **representar un racional en la recta numérica**, se dividen las unidades en tantas partes como indica el denominador y se toman tantas como indica el numerador.

Ejemplo 1

Para representar el número racional $-2{,}7$ en la recta numérica, primero se ubican los números enteros entre los cuales se encuentra el número dado; es decir, -3 y -2. Luego, para ubicar las décimas se divide la unidad en diez partes iguales y se cuentan siete de estas partes comenzando en el -2. Observa la Figura 1.6.

Figura 1.6

No siempre es fácil dividir la unidad en tantas partes iguales como indica el denominador; por eso, en ocasiones, la representación de un racional utiliza el **teorema de Tales.**

Ejemplo 2

El procedimiento para representar gráficamente el racional $\frac{4}{5}$ es el siguiente:

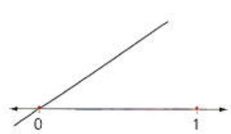


Figura 1.7

Se ubica en la recta el cero y la unidad. Luego, se traza una recta que pase por el cero como se muestra en la Figura1.7.

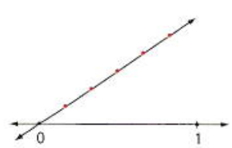


Figura 1.8

Sobre esta recta se identifica un segmento base. La medida de este segmento se debe replicar tantas veces como lo indique el denominador, como se ve en la Figura 1.8.

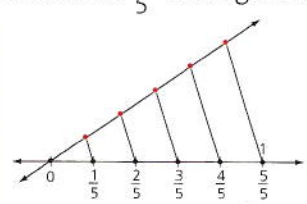


Figura 1.9

Se une el punto final con el 1 y se trazan paralelas a este segmento por los puntos que tienen la medida del segmento base. Observa la Figura 1.9.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Utiliza el teorema de Tales para representar gráficamente los racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ en la recta numérica.

Razonamiento

2 La fracción $\frac{6}{5}$ es una fracción impropia y se puede expresar como un entero y una fracción propia, 1 y $\frac{1}{5}$, o como una fracción mixta, es decir, $1\frac{1}{5}$. Expresa los siguientes racionales en forma de entero y fracción propia y grafica en la recta numérica.

a. $\frac{7}{5}$ b. $\frac{6}{4}$ c. $\frac{8}{7}$

d. $\frac{10}{3}$ e. $\frac{8}{6}$ f. $\frac{5}{2}$

Ejercitación

3 Representa gráficamente en la recta numérica los siguientes racionales, escritos en forma decimal.

a. 1,5 b. 1,2 c. $0,\widehat{3}$ d. $1,\widehat{25}$ e. −2,5

4 Escribe en forma decimal y fraccionaria los siguientes porcentajes.

a. 35% b. 80% c. 50% d. 100% e. 10%

5 Representa gráficamente en la recta numérica los siguientes porcentajes.

a. 20% b. 75% c. 50% d. 100% e. 10%

6 Representa en la recta numérica los racionales representados en las siguientes figuras.

a.

Figura 1.10

b.

Figura 1.11

c.

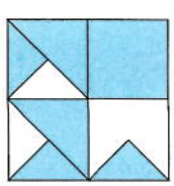


Figura 1.12

7 Indica el número racional que representan los puntos indicados en cada figura.

a.

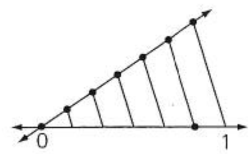


Figura 1.13

b.

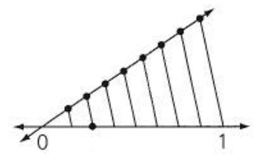


Figura 1.14

c.

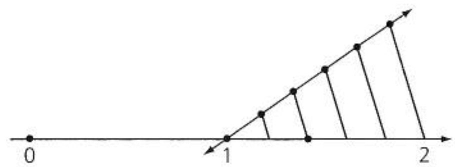


Figura 1.15

d.

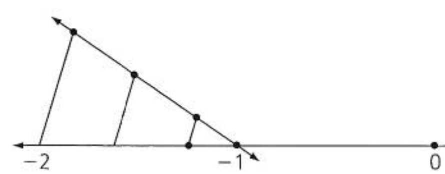


Figura 1.16

Evaluación del aprendizaje

Representa en la recta numérica cada grupo de números y establece el orden entre ellos.

a. −1; 2,5; 1,33; 6,7

b. $\frac{4}{2}, \frac{2}{7}, \frac{9}{4}, \frac{10}{3}$

c. 0,725; $\frac{5}{2}$; −2,34; 1,45; $\frac{4}{3}$

Estilos de vida saludable

Los valores normales de cortisol en la sangre son de 5 g/dL a 25 g/dL.

- Averigua cómo influye el cortisol en el bienestar emocional y qué significa que la concentración en la sangre sea de 23,5 g/dL. ¿Qué tipo de número es esta expresión?

4 Números irracionales

Saberes previos

Clasifica cada expresión decimal según sea exacta, periódica pura o periódica mixta.

- $4,0\overparen{21}$ • $4,021$ • $4,\overparen{021}$

Analiza

Para determinar el valor de la hipotenusa h de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b, se utiliza el teorema de Pitágoras. Esto es:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

- ¿Qué tipo de expresión decimal tiene la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 m cada uno?

Conoce

Como los catetos del triángulo rectángulo miden 1 m cada uno, se reemplazan en la expresión dada y se obtiene:

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 2$$

Para despejar h, se extrae raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad. Es decir, $h^2 = \sqrt{2}$.

Al calcular la expresión decimal de este número se obtiene que $\sqrt{2} = 1,1414213...$

En ella se observa que hay infinitas cifras decimales no periódicas. Al no tener una expresión decimal finita o infinita periódica (pura o mixta), el número $\sqrt{2}$ no es un número racional. Es un **número irracional**.

Los **números irracionales** son aquellos que no se pueden expresar como razones entre números enteros y tienen como característica que su expresión decimal es infinita no periódica. Este conjunto se representa con el símbolo $\mathbb{I}$.

En el conjunto de los números irracionales están todas las raíces que no son exactas, como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{5}$, etc. Además, entre los números irracionales hay números especiales como π (pi), φ (número áureo) y $\boldsymbol{e}$ (número de Euler).

4.1 Números irracionales en la recta numérica

A cada número irracional le corresponde un punto en la recta.

Ejemplo 1

Para representar $\sqrt{2}$ en la recta numérica se siguen estos pasos:

- Se construye un cuadrado de lado 1 sobre la recta numérica, entre el número 0 y el 1, y se obtiene la diagonal $d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ (Figura 1.17).
- Se hace un arco con centro en 0 y radio igual a la diagonal. La distancia entre el punto de corte y el 0 es $\sqrt{2}$ (Figura 1.18).

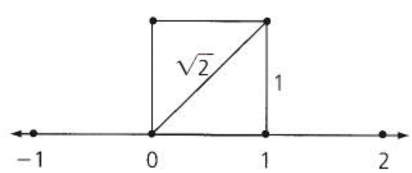


Figura 1.17

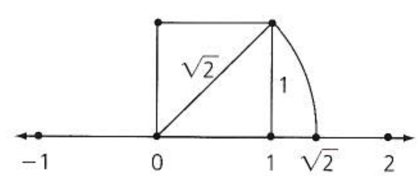


Figura 1.18

Este procedimiento se puede aplicar como se ve en las figuras 1.19 y 1.20 para representar los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ y $\sqrt{5}$, entre otros.

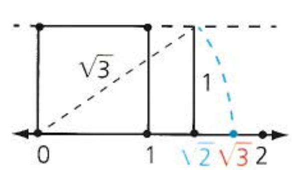


Figura 1.19

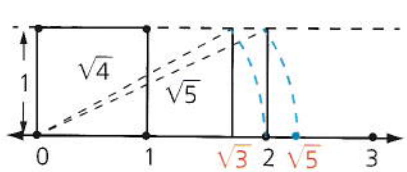


Figura 1.20

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el valor de x en cada triángulo rectángulo e indica si es racional o irracional.

a.

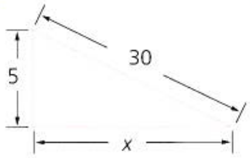


Figura 1.21

b.

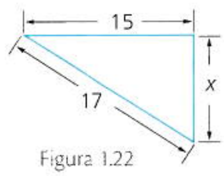


Figura 1.22

c.

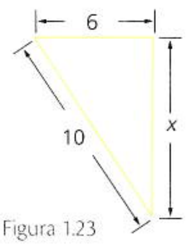


Figura 1.23

d.

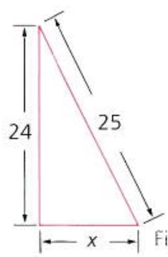


Figura 1.24

2 Para un triángulo rectángulo con vértices A, B, C y lados a, b, c, halla el valor del lado que hace falta en cada caso usando el teorema de Pitágoras.

a. $a = 12, b = 9, c = \square$

b. $a = 11, b = \square, c = 17$

c. $a = \square, b = 8, c = 9$

d. $a = \square, b = 60, c = 61$

e. $a = 9, b = \square, c = 41$

f. $a = 23, b = 17, c = \square$

3 Completa la Tabla 1.3 a partir de la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.

$$\frac{\textit{Longitud de la circunferencia}}{\textit{Diámetro}} = \pi$$

Longitud de circunferencia	Diámetro
6π	
	26
81,6814	
	3,1824
$\frac{4}{5}\pi$	
	$\frac{3}{8}$

Tabla 1.3

Razonamiento

4 Una forma de aproximarse al valor del número áureo es por medio de la sucesión de Fibonacci.

Los cuatro primeros términos de la sucesión de Fibonacci son: 1, 1, 2, 3,... En esta sucesión, un número es la suma de los dos anteriores.

a. Halla los primeros diez términos de la sucesión de Fibonacci.

b. Toma dos valores consecutivos de la sucesión de Fibonacci y calcula el cociente entre ellos. Ten en cuenta dividir el número mayor entre el menor. Cuanto mayores sean los números que se tomen de la sucesión, mayor es la aproximación al número áureo.

Resolución de problemas

5 El diámetro de cada rueda de una bicicleta de ciclomontañismo es de 0,8 m. ¿Cuántas vueltas ha dado una de las ruedas si el deportista ha recorrido 6 km?

Evaluación del aprendizaje

Víctor asegura que el número $\sqrt[3]{-27}$ es un número irracional, porque tiene una raíz cúbica. Lina sustenta que esta afirmación no es correcta, pues existe un número racional tal que al elevarlo al cubo, da como resultado -27.

a. ¿Cuál de los dos tiene la razón? Justifica.

b. Escribe el número correspondiente al que se refiere el que tiene la razón.

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Los números se clasifican en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ de acuerdo con propiedades comunes. Si piensas en tu círculo social como un conjunto, ¿qué características los definirían? Describe las propiedades de cada conjunto numérico.

5 Números reales

Saberes previos

Usa la regla y el compás para representar estos números en la recta numérica.

- $\sqrt{7}$
- $\sqrt{10}$
- $-\sqrt{10}$
- $\sqrt{11}$

Analiza

Los números reales permiten establecer mediciones relacionadas con los conceptos de longitud, área y volumen de figuras cuyas dimensiones pertenecen tanto al conjunto de los números racionales como de los irracionales.

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de $\frac{4}{5}$ cm de lado?
- Halla el área superficial de una esfera de 5 cm radio.

Conoce

El área del cuadrado de $\frac{4}{5}$ cm de lado es: $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 0{,}64$ cm^2. Este es un número racional, pues su expresión decimal es exacta.

El área superficial de una esfera está dada por la fórmula $4\pi r^2$. Como π es un número irracional, el resultado $4\pi\,(5\text{ cm})^2 = 314{,}159265...$ cm^2 también es un número irracional.

El **conjunto de los números reales** ($\mathbb{R}$) está formado por todos los números racionales e irracionales; es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Además, a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica.

Ejemplo 1

Los números reales pueden ser:

- Números naturales como 4, 6, 8.
- Números enteros como -5, -10, 0.
- Números racionales como $\frac{-3}{5}$ y $3{,}4\widehat{789}$.
- Números irracionales como $\sqrt{2}$, π y φ.

5.1 Orden en el conjunto de números reales

El conjunto de los números reales es ordenado.

Los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ llamados respectivamente menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que, definen las relaciones de orden en el conjunto de los números reales.

- Un número real a es mayor que b y se escribe $a > b$, si $a - b > 0$, es decir si $a - b$ es un número positivo. También se dice que b es menor que a y se escribe $b < a$.
- Un número a es menor o igual que b y se escribe $a \leq b$, si $a < b$ o $a = b$.
- Un número a es mayor o igual que b y se escribe $a \geq b$, si $a > b$ o $a = b$.

Gráficamente, un número real a es menor que otro si está a la izquierda de b en la recta numérica.

Ejemplo 2

El número $\sqrt{2}$ es menor que 2, porque está a la izquierda de este. Esto se escribe $\sqrt{2} < 2$. Observa la Figura 1.25.

Figura 1.25

El número -89 es menor que -37, porque se encuentra a la izquierda de este y se escribe $-89 < -37$. Observa la Figura 1.26.

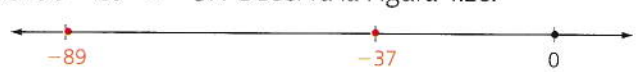


Figura 1.26

Para comparar números decimales, se comparan las partes enteras de los números. Si son iguales, se comparan las cifras decimales de izquierda a derecha hasta que una de ellas sea menor o mayor que la otra.

Ejemplo 3

Observa la comparación de los números 6,7893 y 6,7892.

$$
\begin{array}{ccc}
6{,}7893 & & 6{,}7892 \\
 & 6 = 6 & \\
 & 7 = 7 & \\
 & 8 = 8 & \\
 & 9 = 9 & \\
 & 3 > 2 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, $6{,}7893 > 6{,}7892$.

Ejemplo 4

En la competencia automovilística IndyCar, que se realiza en Estados Unidos, participan cuatro colombianos. Para la primera carrera del año, que se lleva a cabo en un circuito callejero en la ciudad de San Petersburgo, Florida, los corredores obtuvieron los tiempos en la *pole position* (posición de salida) que se registran en la Tabla 1.4.

Número	Corredor	Equipo	Tiempo
18	Carlos Huertas	Dale Coyne Racing	01:01,9716
2	Juan Pablo Montoya	Team Penske	01:00,8532
26	Carlos Muñoz	Andretti Autosport	01:01,4890
98	Gabriel Chaves	Bryan Herta Autosport	01:01,9705

Tabla 1.4

El tiempo de Carlos Huertas significa que su vuelta más rápida fue de un minuto con un segundo y que el decimal correspondiente a las décimas de segundo es 9, a las centésimas, 7 y a las milésimas, 1.

Para saber cuál es el orden de salida de los corredores según sus tiempos en la *pole position*, se comparan los tiempos que cada uno tardó en dar su mejor vuelta. Estos fueron:

Huertas	Montoya	Muñoz	Chaves
↓	↓	↓	↓
01:01,9716	01:00,8532	01:01,4890	01:01,9705

Como los cuatro corredores tardaron más de un minuto, basta comparar las expresiones decimales que representan los segundos, las décimas, las centésimas y las milésimas de segundo.

Así, el orden de los tiempos de menor a mayor es:

$$0{,}8532 < 1{,}4890 < 1{,}9705 < 1{,}9716$$

Luego, el orden de salida es: Montoya, Muñoz, Chaves y Huertas.

Montoya	Muñoz	Chaves	Huertas
↓	↓	↓	↓
01:00,8532	01:01,4890	01:01,9705	01:01,9716

5.2 Aproximación de números reales

Las expresiones decimales se pueden aproximar ya sea por truncamiento o por redondeo.

Al **aproximar por truncamiento un número real**, se eliminan las cifras decimales que están a la derecha de la unidad a la que se va truncar.

Ejemplo 5

Las aproximaciones de los números reales 8,1893456; $\sqrt{2}$; $-3{,}878787\ldots$ y π, a partir del método de truncamiento por la unidad, la décima y la centésima, se presentan en la Tabla 1.5.

	Truncamiento		
Número	**Por la unidad**	**Por la décima**	**Por la centésima**
8,1893456	8	8,1	8,18
$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$	1	1,4	1,41
$-3{,}878787\ldots$	-3	$-3{,}8$	$-3{,}87$
$\pi = 3{,}141592\ldots$	3	3,1	3,14

Tabla 1.5

Aproximar por redondeo consiste en cortar las cifras decimales a partir de una cifra determinada. Si la cifra decimal siguiente al corte es menor o igual que 5 (0, 1, 2, 3, 4, 5), la cifra se mantiene igual. Si la cifra decimal siguiente al corte es mayor que 5 (6, 7, 8, 9), la cifra en la que se hace el corte aumenta en 1.

Ejemplo 6

Las aproximaciones por redondeo a la unidad, la décima y la centésima de los números reales 8,1893456; $\sqrt{2}$; $-3{,}878787\ldots$ y π, se presentan en la Tabla 1.6.

	Truncamiento		
Número	**A la unidad**	**A la décima**	**A la centésima**
8,1893456	8	8,2	8,19
$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$	1	1,4	1,41
23,878787...	-4	$-3{,}9$	$-3{,}88$
$\pi = 3{,}141592\ldots$	3	3,1	3,14

Tabla 1.6

5.3 Aproximaciones por defecto y por exceso

La **aproximación por defecto** consiste truncar un número acercándolo a la cifra decimal inferior más cercana.

La **aproximación por exceso** consiste en truncar un número acercándolo a la cifra decimal superior más cercana.

Ejemplo 7

Al aproximar el número 1,235714286 a dos cifras decimales por exceso y por defecto, se obtiene:

$$1{,}23 < 1{,}235714286 < 1{,}24$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Encierra los conjuntos a los que pertenece cada número de la Tabla 1.7.

a.	$\frac{3}{5}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
b.	$-\sqrt{3}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
c.	$\frac{6}{1}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
d.	-9	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
e.	$\frac{-4}{4}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
f.	$\sqrt{2}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
g.	$-5,\overline{124}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
h.	4	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
i.	π	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$

Tabla 1.7

2 Trunca por la décima los siguientes números..

a. $-\varphi$ b. $-1,23456$ c. $\frac{9}{5}$

d. $4,678$ e. $-\sqrt[3]{5}$ f. 105

3 Expresa en forma decimal los siguientes números. Después, determina su orden de menor a mayor.

$\sqrt{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-2}{3}$	$1+\varphi$
-2	$\sqrt[3]{9}$	$\frac{11}{4}$	$2,64573$

Razonamiento

4 Emplea los signos $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

a. $3 \square \frac{17}{2}$ b. $2 \square \sqrt{3}$

c. $4 \square \frac{12}{3}$ d. $\pi \square \frac{7}{2}$

e. $-\frac{\pi}{2} \square -\frac{2\pi}{4}$ f. $-\sqrt{7} \square -\sqrt{10}$

5 Halla los valores de x y y necesarios para que se cumpla la siguiente relación.

$$\sqrt{13} < \frac{x}{y} < \sqrt{14}$$

Evaluación del aprendizaje

i La profesora les pide a sus estudiantes que escriban una lista de cuatro números reales que no sean naturales ni irracionales. Analiza las respuestas de Ruth y Martín. ¿En qué se equivocó cada uno?, ¿por qué?

Ruth: $\frac{5}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{56}{5}$, $-0,25$

Martín: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{5}$, $\sqrt{16}$, $4,31$

ii En algunos *software* que manejan tablas dinámicas, se puede programar la cantidad de números decimales que se necesiten y con diferentes métodos de aproximación. Las notas de un estudiante en un periodo académico son: 3,578; 4,2; 0,999; 1,589 y 4,49. El profesor las ingresa en una tabla dinámica para sacar su promedio; cada columna tiene diferente cantidad de decimales y su aproximación se hace por redondeo.

	Aproximación				
	Sin aprox.	0 dec.	1 dec.	2 dec.	3 dec.
Nota 1	3,578	4	3,6	3,58	3,578
Nota 2	4,2	4	4,2	4,20	4,200
Nota 3	0,999	1	1,0	1,00	0,999
Nota 4	1,589	2	1,6	1,59	1,589
Nota 5	4,49	4	4,5	4,49	4,490
Promedio					

Tabla 1.8

a. ¿Cuál es el promedio para cada columna? ¿Se obtiene el mismo promedio para cada una?

b. Si la materia se pasa con 3,0, ¿con cuántas cifras decimales le conviene al estudiante que se calcule el promedio para pasar?

Practica más

Números racionales

Ejercitación

1 Representa los siguientes conjuntos de números racionales. Luego, ordénalos de menor a mayor.

a. $-\frac{13}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}$

b. $-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{3}{3}, -\frac{12}{3}, \frac{14}{3}$

c. $\frac{7}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{20}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{8}{10}$

Comunicación

2 Completa la Tabla 1.9.

Racional	Decimal	Generatriz	Clasificación
$-\frac{2}{6}$			
	1,4		
$-\frac{21}{6}$			
$\frac{7}{49}$			

Tabla 1.9

Ejercitación

3 Representa en la recta numérica las siguientes parejas de números racionales.

a. $-\frac{3}{8}$ y $-\frac{9}{4}$

b. $-\frac{12}{3}$ y $-4{,}3$

c. $2{,}69$ y $-\frac{3}{10}$

Números irracionales

Comunicación

4 Representa en la recta numérica los siguientes números irracionales.

a. $\sqrt{5}$

b. $2\sqrt{5}$

c. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$

d. $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

e. $\pi+\pi$

f. $-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}$

Números reales

Comunicación

5 Halla las distancias que existen entre los puntos señalados y el punto 0.

Figura 1.27

Razonamiento

6 Ubica cada conjunto de números en la recta numérica y establece en ellos la relación de orden.

a. $2\pi; -1{,}3; \frac{1}{3}; \sqrt{2}; -\sqrt{3}; -1{,}4$

b. $-\pi; 3; -\frac{2}{5}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2\sqrt{2}$

c. $-2; \frac{3}{5}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{3}; \frac{\pi}{2}$

d. $\pi; -2{,}1; -\frac{\sqrt{3}}{3}; 3\sqrt{2}; -\sqrt{3}$

Ejercitación

7 Aproxima los siguientes números decimales por truncamiento a una, dos y tres cifras decimales.

a. 3,4567

b. −45,9994

c. 5,6666

d. 0,98765

8 Aproxima los siguientes números decimales por redondeo a una, dos y tres cifras decimales.

a. −8,3366

b. −0,6654

c. 13,8888

d. 0,9393

9 Aproxima los siguientes números decimales por defecto a una, dos y tres cifras decimales.

a. 0,33333

b. 7,45453

c. 12,12121

d. 3,12345

10 Aproxima los siguientes números decimales por exceso a una, dos y tres cifras decimales.

a. 13,5556

b. −0,1111

c. 0,3456

d. 7,54321

Resolución de problemas

11 Resuelve la siguiente situación.

Para entrar a una atracción mecánica, los niños deben medir más de 1,50 m pero menos de 190 cm. Representa estos números en una recta numérica y compáralos.

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Hacer diferentes comparaciones

Problema

Dos tanques de agua iguales se encuentran ocupados en $\frac{12}{13}$ y $\frac{14}{15}$ de su capacidad, respectivamente. ¿Cuál de los dos tiene mayor cantidad de agua en su interior?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes obtener del enunciado?

  R: Dos tanques de agua tienen igual capacidad, pero diferente cantidad de líquido en su interior.

- ¿Qué debes encontrar?

  R: Cuál de ellos tiene mayor cantidad de agua en su interior.

2. Crea un plan

- Busca diferentes formas de comparar las fracciones para establecer un orden entre ellas y decidir cuál de los tanques tiene más agua.

3. Ejecuta el plan

- Una forma de comparar las fracciones es desde su representación como número decimal.

  $12 \div 13 = 0{,}9230$ y $14 \div 15 = 0{,}9333$

  La segunda fracción es mayor.

- También se pueden comparar las fracciones buscando un denominador común y comparando las fracciones equivalentes con denominador común.

  m. c. m. $(13, 15) = 195$

  $\frac{12}{13} = \frac{180}{195}$ y $\frac{14}{15} = \frac{182}{195}$. La segunda fracción es mayor.

- Otra forma de comparar las fracciones es mediante los productos cruzados. El orden entre estos productos es el orden entre las fracciones.

  12×15 y 13×14

  $180 < 182$

R: Tiene más agua el segundo tanque.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que $\frac{1}{13} < \frac{1}{15}$.

Aplica la estrategia

1. En la finca del abuelo de Camila hay dos caminos para ir de la casa al río. Uno tiene una longitud de $\frac{17}{8}$ km y el otro, una longitud de $\frac{16}{9}$ km. ¿Cuál de los dos caminos debe tomar Camila, si quiere recorrer la menor distancia?

   a. Comprende el problema

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

Resuelve otros problemas

2. Cuando Andrés camina de su casa al colegio, debe atravesar un parque de forma cuadrada y cuyos lados miden 20 m. Si él lo atraviesa por su diagonal, ¿qué distancia recorre al atravesarlo?

3. En un plano cartesiano, traza una circunferencia con centro en (0, 0) y cuyo radio sea la distancia del centro al punto (1, 1). ¿Qué punto corresponde al corte de la circunferencia con la parte positiva del eje x?

Formula problemas

4. Inventa un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

   “La diagonal de un cuadrado de lado l es $\sqrt{2}$.”

Enriquece tu vocabulario

- Elabora un organizador gráfico que resuma la relación entre los diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales y reales).

Evaluación del aprendizaje

Números racionales

Comunicación

1 Responde las siguientes preguntas y justifica tu respuesta. PREGUNTA ABIERTA

a. ¿Cero es un número racional?

b. ¿Por qué el conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales?

Razonamiento

2 Establece, en cada caso, si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). VERDADERO / FALSO

a. Todos los números decimales mixtos son periódicos. ( )

b. Todos los números racionales se pueden expresar como números decimales. ( )

c. El número $\frac{21}{4}$ es mayor que 5,25. ( )

d. Las fracciones decimales tienen como denominador un múltiplo de 10. ( )

e. Todos los números naturales pueden expresarse como decimales periódicos. ( )

Ejercitación

3 Organiza de menor a mayor los siguientes números. ACTIVIDAD DE REFUERZO

$-3{,}21$	$-3{,}011$
$-\frac{78}{25}$	$-3{,}4$
$-\frac{151}{50}$	$-3{,}04$
$-\frac{669}{200}$	$-3{,}115$
$-\frac{55}{18}$	$-\frac{331}{100}$

Resolución de problemas

4 A una excursión asisten 136 personas. Si se armaron once equipos y cuatro personas quedaron por fuera, ¿cuántas personas hay en cada equipo? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5 Las dos terceras partes de un terreno se utilizan para sembrar cebolla y en un quinto del resto del terreno se siembra lechuga. Si quedaron sin sembrar 200 m^2, ¿cuál es el área del terreno? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Números irracionales

Razonamiento

6 El número pi (π) representa la constante que relaciona el perímetro de una circunferencia con respecto a la longitud de su diámetro. PREGUNTA ABIERTA

$$\pi = \frac{\textit{Perímetro de la circunferencia}}{\textit{Diámetro de la circunferencia}}$$

Si π puede expresarse como una fracción, ¿por qué es un número irracional?

Ejercitación

7 Escribe el símbolo $>$, $<$ o $=$, según corresponda. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. $-3 \;\square\; -\frac{17}{5}$

b. $2 \;\square\; -2{,}2$

c. $-\sqrt{5} \;\square\; \frac{20}{4}$

d. $2\pi \;\square\; \frac{157}{25}$

e. $-\pi \;\square\; -\sqrt{10}$

Resolución de problemas

8 Resuelve cada situación. PREGUNTA ABIERTA

a. El volumen de un cubo es $\frac{343}{125}$ cm^3. ¿Cuál es la medida de su arista?

b. ¿Cuál es el resultado de esta operación?

$$5\sqrt{3} - 3\sqrt{75} + 6\sqrt{27}$$

c. ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado $\sqrt{\frac{25}{27}}$ cm?

d. El tiempo T (en segundos) que emplea un péndulo de longitud l en hacer una oscilación está dado por la expresión $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde $g = 10$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad.

¿Cuánto tiempo emplea un péndulo de 150 m en hacer una oscilación?

Comunicación

9 Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\sqrt{\frac{9}{16}}$

b. 2π

c. 3,454554555...

d. $23\sqrt{49}$

Números reales

Ejercitación

10 Escribe la expresión decimal de la longitud de la diagonal de cada cuadrilátero y trunca por la unidad, la décima y la centésima cada resultado.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

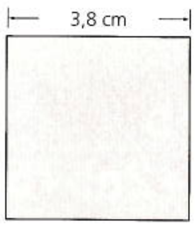


Figura 1.28

b.

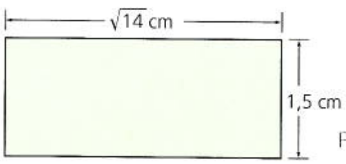


Figura 1.29

c.

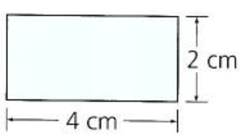


Figura 1.30

11 Determina la longitud de la circunferencia y redondea el resultado a la unidad, la décima y la centésima. Ten en cuenta que $L = 2\pi r$.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

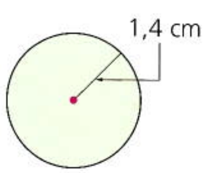


Figura 1.31

Resolución de problemas

12 Una rueda tiene un diámetro de 15 cm y recorre un camino recto a velocidad constante. Completa la tabla con la distancia recorrida al completar el número de giros.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Giros	3	5	8	9	10
Distancia					

Tabla 1.10

13 Compara los números reales de cada situación.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Si en Venus y en la Luna la gravedad es 0,87 y $\frac{1}{6}$ de la gravedad en la Tierra, respectivamente. , ¿en dónde es mayor la gravedad, en Venus o en la Luna?

b. De una mina de plata se extrajeron las siguientes cantidades: en enero 830,25 kg; en febrero, 755,850 kg; en marzo, 390 kg; en abril, 1050 kg. ¿Qué día se extrajo la menor cantidad de plata?

14 Observa la Figura 1.32 y resuelve.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

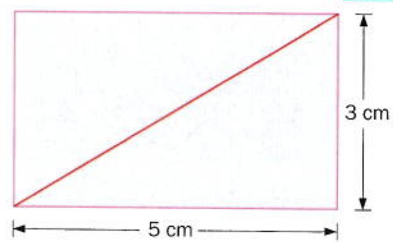


Figura 1.32

a. Calcula el valor de la diagonal del rectángulo y escribe qué tipo de número es.

b. Aproxima por truncamiento y por redondeo a la centésima.

15 Halla el volumen de una esfera de radio de 5 m, usando una aproximación de π de una, dos, tres, cuatro y cinco cifras decimales. Ten en cuenta que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

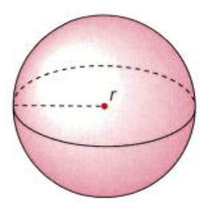


Figura 1.33

16 Se realizaron tres cálculos distintos del volumen de un cilindro de 2 cm de radio y 3 cm de altura. En cada uno de ellos se utilizó una aproximación distinta de π así:

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

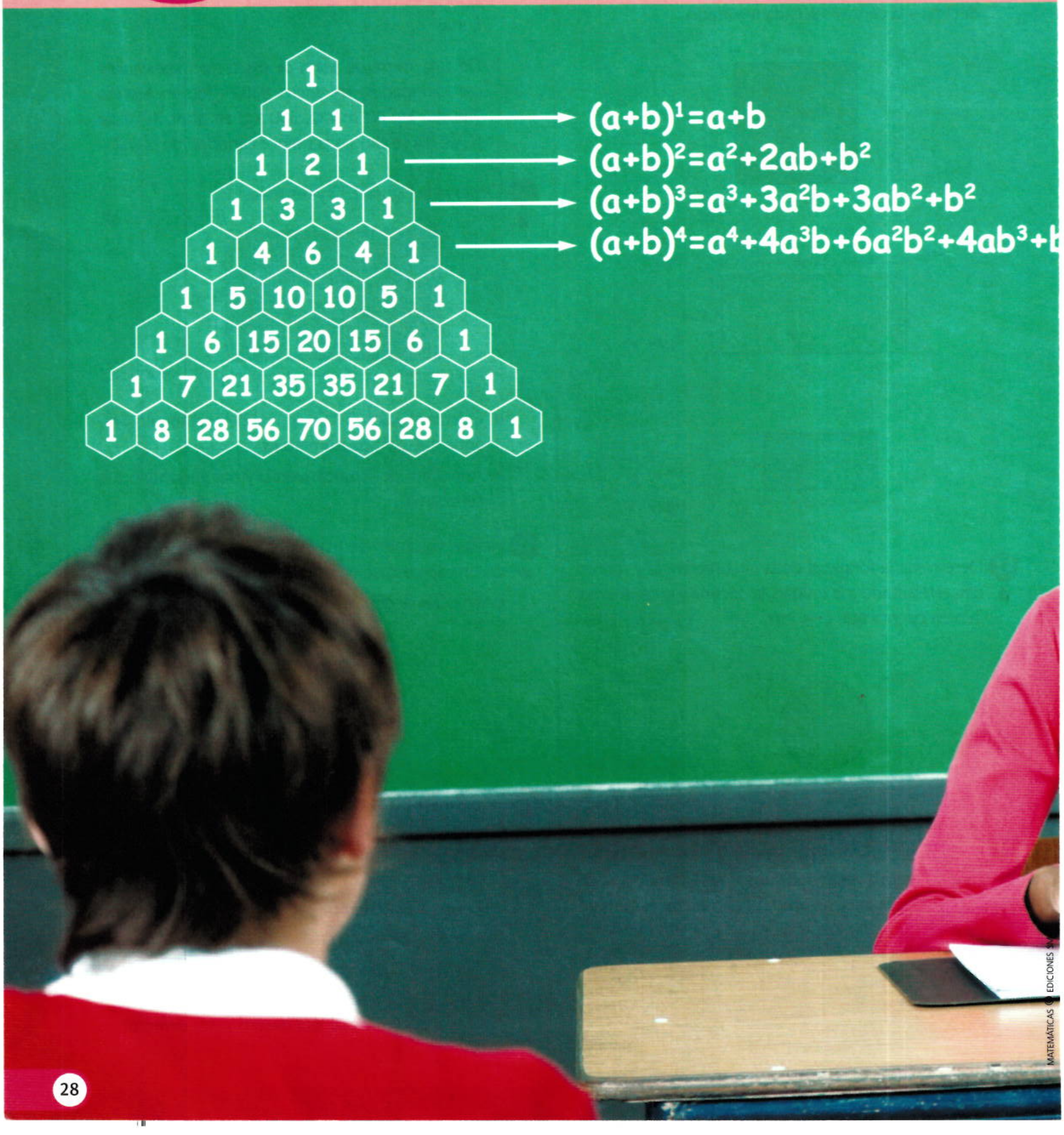
Volumen 1: 37,6992 cm^2

Volumen 2: 37,69908 cm^2

Volumen 3: 37,698 cm^2

- ¿En cuál de ellos se utilizó la mejor aproximación de una cifra decimal, por exceso y por defecto?

2 Polinomios



Ya sabemos

- Efectuar operaciones con números reales.

Vamos a aprender

- A reconocer y operar con polinomios y fracciones algebraicas.

Nos sirve para

- Interpretar de manera algebraica enunciados verbales.

1 Expresiones algebraicas

Saberes previos

La suma de un número, más el doble del mismo número, más el triple del mismo número es 24. ¿Cuál es ese número? ¿Podrías escribir la situación expresada en forma general?

Analiza

Una empresa de aseo tiene varias tarifas. En una oficina cobra a $ 35 000 la hora y en un hotel cobra $ 10 000 más por hora.

- ¿Cuáles serían las expresiones que se obtienen de esta situación?

Conoce

Para modelar la situación es necesario identificar las variables que intervienen y la relación entre ellas. En este caso, el costo del servicio depende de la variable tiempo. Entonces, denominaremos con t el tiempo en horas del servicio prestado, pues esto nos permite traducir la situación de la siguiente manera:

Prestación de servicio en oficina	Prestación de servicio en hotel
$35\,000 \cdot t$	$35\,000 \cdot t + 10\,000 \cdot t$

Teniendo en cuenta las expresiones, podemos averiguar cuánto dinero debe cobrar la empresa según las horas de servicio prestado.

Una **expresión algebraica** es una combinación de cantidades numéricas y literales, relacionadas por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Las letras reciben el nombre de **variables**.

Ejemplo 1

Las siguientes expresiones son algebraicas:

$2x^3 + 5xy \qquad \sqrt{a - 3ab} \qquad \dfrac{\sqrt{m+n} - 4}{(m+3)^2 - \sqrt{m}}$

1.1 Tipos de expresiones algebraicas

- **Expresiones algebraicas enteras**: en ellas intervienen las operaciones básicas y los exponentes de las variables son números enteros positivos.
- **Expresiones algebraicas racionales:** tienen algunas variables en el denominador.

Ejemplo 2

Estas son expresiones algebraicas enteras: $6x - 58z$, $\dfrac{2x-1}{-2}$ y $2x^2 - 4xy^2 + 6y^3$.

- **Expresiones algebraicas irracionales:** contienen expresiones radicales en sus términos o variables con exponente racional no entero.

Ejemplo 3

Estas son expresiones algebraicas irracionales: $5m + 8\sqrt{a}$ y $-\dfrac{1}{3}y^2 - z^{\frac{1}{5}}$.

1.2 Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene de sustituir la parte literal de la expresión algebraica por números determinados y aplicar las operaciones indicadas en la expresión.

Ejemplo 4

Para calcular el valor numérico de $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{4b^2}{a^2}}{\dfrac{a^2}{8b}} + ab + \dfrac{a}{b}$, para $a = 4$ y $b = 2$. Se sustituyen las variables por los valores dados, es decir, por $a = 4$ y $b = 2$. Después, se aplican las operaciones correspondientes.

$$\frac{\dfrac{4^2}{2^2} + \dfrac{4 \cdot 2^2}{4^2}}{\dfrac{4^2}{8 \cdot 2}} + 4 \cdot 2 + \frac{4}{2} = \frac{\dfrac{16}{4} + \dfrac{16}{16}}{\dfrac{16}{16}} + 8 + \frac{4}{2} = \frac{4 + 1}{1} + 8 + 2 = 15$$

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. Escribe las expresiones algebraicas correspondientes a cada uno de los enunciados:

Enunciado	Expresión algebraica
El 20% de un número.	
El área de un triángulo de 9 cm de altura y base desconocida.	
El doble de la edad que tendré dentro de seis años.	
El área de un rectángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura.	
La diferencia de los cuadrados de dos números.	

Tabla 2.1

Ejercitación

2. Determina el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, sabiendo que $x = -2$, $y = 3$ y $z = 4$.

a. $3x^2y - 2xy^2$

b. $-\dfrac{1}{2}x^3y^2 + 3x^2z^2$

c. $x^2(y - 2) - y(x + 2) + 3y^3$

d. $\dfrac{2}{3}x^3y^2z - 5x^2y^3z^2 + 10$

e. $\dfrac{3}{4}xy^2z^3 - x^2y^3z^2 + x^3y^2z^3 - \dfrac{1}{2}$

3. La energía potencial está dada por la expresión $Ep = mgh$, donde m es la masa, g es la gravedad ($g = 9{,}8\ m/s^2$) y h la altura.

- Según esta información, completa la Tabla 2.2

Ep				
m	0,2 kg	0,5 kg	0,75 kg	0,8 kg
h	1,5 *m*	2 *m*	0,8 *m*	1,2 *m*

Tabla 2.2

Evaluación del aprendizaje

Observa las figuras y plantea la expresión algebraica correspondiente a su perímetro.

a.

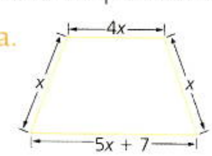


Figura 2.1

b.

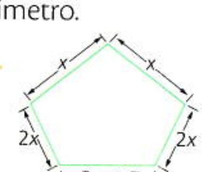


Figura 2.2

Estilos de vida saludable

Sofía duerme tres horas diarias más de lo que duerme Isabela. Si x representa el número de horas que duerme Isabela, ¿cuál es la expresión algebraica que representa el número de horas que duerme Sofía en una semana? Un buen descanso ayuda a conseguir bienestar mental y emocional. ¿Qué sucede si no duermes lo suficiente?

2 Polinomios

Saberes previos

Mateo dice que si reemplazas por 4 la x en la expresión $2x^2 + x + 3$ sabrás su edad. ¿Mateo es un niño o un adulto?

Analiza

Observa las dimensiones de las siguientes figuras geométricas.

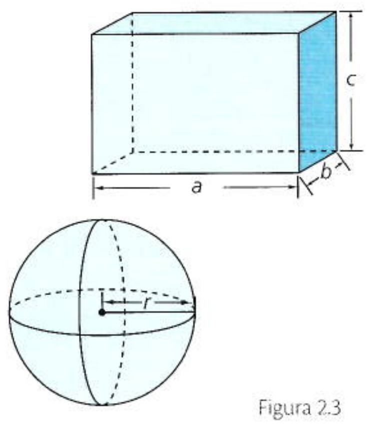


Figura 2.3

- ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo y el área de la circunferencia máxima de la esfera?

Conoce

2.1 Monomios

Para el paralelepídedo y la esfera de la Figura 2.3, se tiene lo siguiente:

Volumen $= abc$ Área $= \pi r^2$

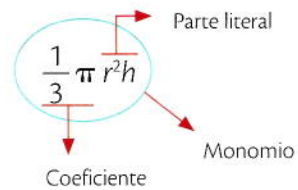
Las fórmulas abc y πr^2 forman parte de las expresiones algebraicas más sencillas llamadas monomios.

Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de un solo término, formado por el producto de números reales y las potencias de exponente entero positivo de una o más variables.

Elementos de un monomio

Un monomio está formado por:

- Un **coeficiente**, que es la parte numérica.
- Una **parte literal**, constituida por las variables y sus exponentes naturales.



El **grado absoluto** de un monomio corresponde a la suma de todos los exponentes de las variables.

Si dos o más monomios tienen el mismo grado absoluto, son **homogéneos**. De lo contrario, son **heterogéneos**.

Ejemplo 1

- $-\frac{7}{5}x^3y^4$ es un monomio porque tiene dos variables, x, y, el coeficiente, $-\frac{7}{5}$, es un número real y los exponentes, 3 y 4, son números positivos.
- $\frac{4}{m^2}$ no es un monomio porque $\frac{4}{m^2}$ es igual a $4m^{-2}$ y, -2 es un entero negativo.

Ejemplo 2

El grado absoluto de $-3ab^2$ es 3 y el de $5x^3y^2$ es 5. Luego, $-3ab^2$ y $5x^3y^2$ son heterogéneos.

2.2 Monomios semejantes

Si los monomios tienen la misma parte literal, se dice que son **monomios semejantes**. Por lo tanto, dos monomios semejantes solo se diferencian en los coeficientes.

Ejemplo 3

$3ax^4y^5$, $2ax^4y^5$, $-\frac{7}{5}ax^4y^5$ son monomios semejantes. Por su parte, axy^3, $3a^2x^4y^5$, $-2bx^4$ no son monomios semejantes.

2.3 Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por varios monomios no semejantes.

Los monomios que conforman un polinomio se denominan **términos** del polinomio.

Términos

$$11x^3y - 7xy^2 + 5x - 13$$

Polinomio

El **grado absoluto** de un polinomio es el mayor de los grados de los términos que contiene el polinomio.

Grado del monomio

$3 + 1 = 4$		$1 + 2 = 3$		1		0	
$11x^3y$	$-$	$7xy^2$	$+$	$5x$	$-$	13	es de grado 4.

A los polinomios de dos o tres términos, se le denomina **binomios** o **trinomios**, respectivamente. Cuando un polinomio tiene más de tres términos, se le denomina simplemente **polinomio**.

Ejemplo 4

Estos son ejemplos de binomios, trinomios y polinomios.

- Binomios: $x^2 + 9$ y $162 - 2x$
- Trinomios: $8m^2 + 26m - 24$ y $3a^2 + 8a + 5$
- Polinomios: $2x^5y^2 + 3x^4y - 2x^3 - 2$ y $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

2.4 Reducción de términos semejantes en un polinomio

Los **términos semejantes** en un polinomio son los monomios que tienen su parte literal exactamente igual, es decir, son monomios semejantes.

Reducir términos semejantes en un polinomio significa agrupar en un solo monomio a los que sean semejantes. Para ello, se efectúa la suma algebraica de sus coeficientes y se escribe la misma parte literal.

Ejemplo 5

En el polinomio $2x^3y^4 + 3x^2y - 5xy + 3y^4x^3 + 4xy$, los términos $2x^3y^4$ y $3y^4x^3$ son semejantes, al igual que los términos $-5xy$ y $4xy$.

Después, se reducen los términos semejantes de la siguiente manera:

$2x^3y^4 + 3y^4x^3 = 5x^3y^4$ $\qquad$ $-5xy + 4xy = -xy$

Finalmente, el polinomio reducido queda así: $5x^3y^4 + 3x^2y - xy$.

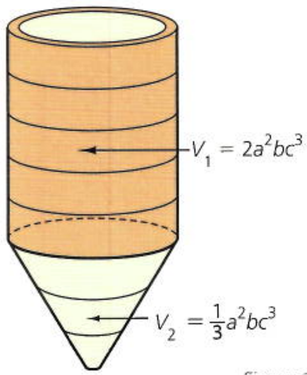


Figura 2.4

Ejemplo 6

El volumen total V del sólido de la Figura 2.4 se calcula de esta manera:

$$V = 2a^2bc^3 + \frac{1}{3}a^2bc^3$$

Como los términos $2a^2bc^3$ y $\frac{1}{3}a^2bc^3$ son semejantes, entonces:

$$V = 2a^2bc^3 + \frac{1}{3}\ a^2bc^3 = \left(2 + \frac{1}{3}\right)a^2bc^3 = \frac{7}{3}\ a^2bc^3$$

Este resultado es un monomio de coeficiente $\frac{7}{3}$ y de parte literal a^2bc^3; su grado absoluto es 6, mientras que el grado relativo con respecto a c es 3.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la Tabla 2.3.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado absoluto
$-2x^3y^2$			
$-a^3bz^4$			
πm^4n^6			
$0{,}5a^4b^5c$			

Tabla 2.3

2 Determina cuántos términos tiene cada polinomio. Luego, establece si es binomio, trinomio o polinomio.

a. $5m^2n - 3\,mn + 8$

b. $26x^3y^2 - 7x^2y$

c. $a^6b^5 + a^5b^4 - 2a^4b^5 + 4a^3b^4 - a^2b^5$

d. $p^2q - pq^2 - 1$

e. $\frac{1}{2}y^2x^4 - \frac{3}{5}x^3y^3 + \frac{1}{3}y^4x^2 - \frac{5}{6}$

3 Determina si los siguientes monomios son homogéneos o heterogéneos.

a. $7a^2b^3$ y $-2x^2y^3$

b. $-3m^6n^4p$ y $3x^7y^5$

c. $11p^3q^2r$ y $11pq^2r^4$

d. $\sqrt{3}\,h^3r^2$ y $\sqrt{3}\,rh^4$

e. $\frac{1}{3}x^2y^4$ y $\frac{4}{3}xy^3$

f. $-\frac{4}{5}s^3t$ y $\frac{6}{5}s^2t^2$

4 Escribe un monomio semejante en cada caso.

a. $-11abc$

b. $13x^4y^5$

c. $5p^2q^4$

d. $27m^7n^3$

e. $12m^3n^2$

f. $-8\,z^5n^4$

5 Determina cuántas y cuáles variables diferentes tiene cada polinomio.

a. $5x^3 - 2x^2 + x - 7$

b. $3x^4y + 6x^3y^2 - 8x^2y^2 + 5xy^4$

c. $5pq^4 + 3p^2q^3 - 7p^3q^2 + r$

d. $-7m^5 + \frac{1}{2}m^4 - m^3 + \frac{1}{3}m^2 - 1$

e. $\frac{2}{3}a^4b^3c^2 + \frac{1}{4}a^3b^4c^4 - 2d$

6 Dado el polinomio $7y^4 - 3y^3 - y^2 + y - 8$, indica lo siguiente:

a. El coeficiente del segundo término.

b. El coeficiente del tercer término.

c. El exponente de la variable en el cuarto término.

d. El término independiente.

7 Suprime los signos de agrupación y reduce los términos semejantes.

a. $2x - 3\{x + 2[x - (x + 5)] + 1\}$

b. $3y^2 - 2\{y - y[y + 4(y - 3)] - 5\}$

8 Reduce los siguientes polinomios, teniendo en cuenta los términos semejantes.

a. $3a - 8b + 5a - 4c + 2a - 11b - 2c$

b. $8x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 9x^3 - 5x^2$

c. $5m - 3m^2 + 2m - 3 + m$

d. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}$

e. $\frac{8}{7}a^2 - \frac{3}{10}a^3b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{2}{5}ba^3 - \frac{1}{7}a^2$

Razonamiento

9 Indica el grado absoluto de cada polinomio. Después, determina el grado relativo del polinomio con respecto a la variable x.

a. $7x^5y^2 - 8x^4y + 2x^3 - 1$

b. $-6x^3y^2 + y^3 + \frac{1}{3}xy - 3x^2$

c. $x^2y^2 - 9x^3y^4 + y^7 - 2x^7 + xy^5$

d. $-\frac{1}{4}xy^2z^2 + \frac{2}{3}x^2yz^3 - x^3y^3z + 2$

e. $\frac{2}{5}m^{11}x^9 - \frac{3}{4}x^4m^{15} + 5 - \frac{7}{8}m^{10}x^{10}$

10 Escribe (V) si la afirmación es verdadera y (F) si es falsa.

a. Un polinomio es una expresión algebraica. ( )

b. Dos términos con distintos coeficientes pueden ser semejantes. ( )

c. Un polinomio de tres términos y grado absoluto 3 recibe el nombre de trinomio. ( )

d. La expresión $-5x^3y + 2xy^3$ es un monomio. ( )

e. El grado relativo de un polinomio con respecto a una variable es el mayor exponente de la variable en el polinomio. ( )

11 Indica si estas expresiones son polinomios o no.

a. $m^4 - 2m^5 + 5m^2 - 3$

b. $1 - y^4$

c. $\sqrt{y} + 9y^2 + 5$

d. $\frac{2}{x^2} - x - 7$

e. $x^3 + x^5 + x^7$

f. $n - 2n^{-7} + 6$

Comunicación

12 Indica si los términos son semejantes o no. Explica.

Términos	¿Son semejantes? Sí	No	¿Por qué?
$7a^2b^3$ y $-2a^2b^3$			
$2pqr$ y $-5pqr$			
$3x^2y^3$ y $-3y^2x^3$			
$4m$ y $-\frac{1}{4}m$			

Tabla 2.4

Resolución de problemas

13 Escribe el polinomio que represente el perímetro de esta figura. Luego, halla su valor numérico si $x = 4$ m.

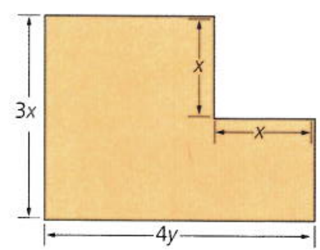


Figura 2.5

14 La longitud de un rectángulo mide 3 m más que el doble de su ancho. Si x es el ancho del rectángulo, escribe un polinomio que represente el perímetro del rectángulo y simplifícalo.

Evaluación del aprendizaje

Escribe un polinomio que cumpla las condiciones dadas.

a. Grado absoluto 5, dos variables.

b. Binomio, grado absoluto 7, una variable.

c. Trinomio, grado absoluto 12, tres variables.

d. Polinomio, grado absoluto 11, tres variables.

3 Adición y sustracción de polinomios

Saberes previos

Juliana dice que las expresiones $45abc$ y $-45bca$, no son semejantes. ¿Tiene razón Juliana? ¿Por qué?

Analiza

El perímetro de una figura geométrica se calcula sumando las medidas de todos sus lados.

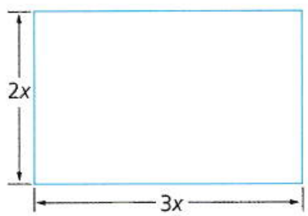


Figura 2.6

- Según lo anterior, ¿cuál es el perímetro del rectángulo de la Figura 2.6?

Conoce

3.1 Adición de polinomios

Para hallar el perímetro del rectángulo de la Figura 2.6, sumamos la longitud de todos sus lados así:

$$P = 3x + 2x + 3x + 2x$$

En este polinomio los términos son semejantes. Se pueden reducir a un solo término algebraico adicionando sus coeficientes y escribiendo la misma parte literal.

$$P: (3 + 2 + 3 + 2)x = 10x$$

Para **sumar polinomios,** se suman entre sí los monomios semejantes. Si los monomios no son semejantes, la suma se deja indicada.

Los polinomios se pueden adicionar como se explica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

$$(2x^3 + 5x + 3 + 2x^2) + (4x - 3x^2 + x^3 - 5)$$

En forma horizontal	En forma vertical
$(2x^3 + 2x^2 + 5x + 3) + (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)$ $= 2x^3 + x^3 + 2x^2 - 3x^2 + 5x + 4x + 3 - 5$ $= 3x^3 - x^2 + 9x - 2$	$\begin{array}{r} 2x^3 + 2x^2 + 5x + 3 \\ x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \\ \hline 3x^3 - x^2 + 9x - 2 \end{array}$

Tabla 2.5

3.2 Sustracción de polinomios

Para **sustraer polinomios**, se restan los coeficientes de los términos semejantes y se deja indicada la sustracción de los términos no semejantes.

Al hacer sustracciones de polinomios se utiliza el **polinomio opuesto**.

Ejemplo 2

Para restar $x^2y - 2xy + 1$ de $-3x^2y + \frac{1}{2}$, se procede de la siguiente manera:

$$\left(-3x^2y + \frac{1}{2}\right) - (x^2y - 2xy + 1) = -3x^2y + \frac{1}{2} - x^2y + 2xy - 1 =$$

$$-3x^2y - x^2y + \frac{1}{2} - 1 + 2xy = -4x^2y - \frac{1}{2} + 2xy =$$

$$-4x^2y + 2xy - \frac{1}{2}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes operaciones.

a. De $3x^2y$, restar $-8x^2y$.

b. Restar $-2m^3n^2$ de $-15m^3n^2$.

c. De $a^5 - 9a^3 + 6a^2 - 20$, restar $-a^4 + 11a^3 - a^2$.

d. De $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y - \frac{7}{9}z$, restar $-\frac{3}{5}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$.

e. De la suma de $a + b - 5$ con $8a - 3b + 12$, restar $2a - 6b + 21$.

f. De la suma de $8m^2 + 5$ con $-2 + 7m^2$, restar la suma de $20m - 8$ con $-m^2 + 5m$.

g. Restar la suma de $2a + b$ con $a - 3b$, de la suma de $-7a + 2b$ con $a - b$.

h. Restar $\frac{8}{3}x - \frac{1}{6}x^2$ de la adición de $x + 5x^2$ con $\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}x^2$.

i. De la diferencia entre $3a - 2b$ y $2a - b$, restar la suma de $8a - b$ con $5 - b$.

Razonamiento

2 Escribe el polinomio que hace falta en cada operación.

a. $(-8m^3 + 4m^2 - 3) + \square = -6m^3 - 8m + 5$

b. $(3x^2y - 4xy^2 - 7x) - \square = -9x^2y + 5xy^2 - 8x$

c. $\left(\frac{1}{6}a^2 - \frac{3}{2}a\right) + \square = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a$

d. $\left(\frac{5}{7}y^3 - \frac{1}{3}y + 2\right) - \square = 6y^3 - 7y + \frac{1}{2}$

3 Completa los términos de la operación.

$$\begin{array}{rcccccccc}
5a^2 & + & \square & + & 7b^2 & - & 30 \\
 & & 5ab & - & \square & + & \square \\
\square & + & ab & - & 36b^2 & & \\
\hline
-21a^2 & - & 8ab & + & 2b^2 & + & 15
\end{array}$$

4 Escribe (V) si la afirmación es verdadera y (F) si es falsa.

a. El opuesto del polinomio $-7xy + 11y$ es el polinomio $7xy - 11y$. ( )

b. $3x^4 - 2x = x^3$. ( )

c. Al restar $28xy^2$ de $35xy^2$, se obtiene $-7xy^2$. ( )

Comunicación

5 Determina el perímetro de las figuras.

a.

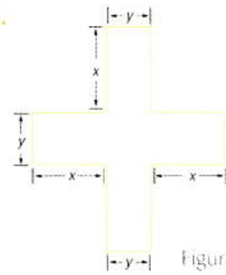


Figura 2.7

b.

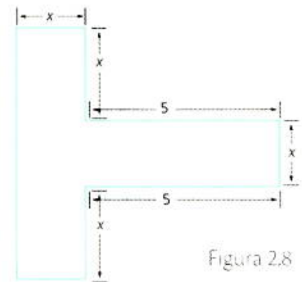


Figura 2.8

c.

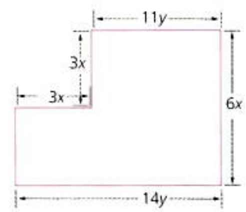


Figura 2.9

Razonamiento

6 Halla dos polinomios cuya suma sea cada uno de los siguientes polinomios.

a. $2y - 5$

b. $3m^2 + 2n - 6$

c. $-5x^3 - 6x^2\ 1\ 7x$

d. $-\frac{9}{2}a^3b^2 - \frac{9}{2}a^2b^3$

Evaluación del aprendizaje

i Un club vacacional está distribuido por zonas. La zona de deportes tienen un área de $(15mn - 5m)$, la zona verde un área de $(7mn + 10m)$ y la zona de vivienda un área de $(5mn + 3m)$. Calcula el área total del club.

ii El perímetro del triángulo es $5m^2 + 8m + 6$. Encuentra el polinomio que representa la medida del tercer lado.

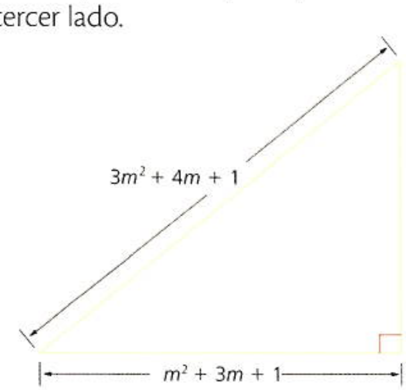


Figura 2.10

4 Multiplicación de polinomios

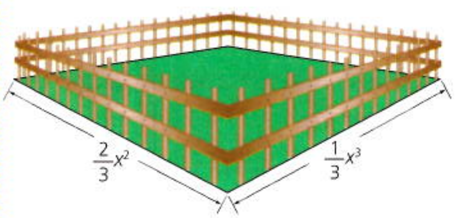
Saberes previos

Simplifica las expresiones aplicando las propiedades de la potenciación.

- 2^4
- 2^7
- 8^2
- $\left(\frac{1}{7}\right)^3$
- $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$
- $\left(-\frac{3}{8}\cdot 8^3\right)$
- 2^3

Analiza

Carlos decidió cercar un jardín para evitar que las personas al pasar dañen las flores sembradas.



- ¿Cuál es la expresión que muestra el área del jardín encerado?

Conoce

El terreno del jardín tiene forma rectangular, entonces para calcular el área, se debe multiplicar su ancho por su largo. Por lo tanto, la expresión del área es:

$$A = \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{2}{3}x^2$$

La multiplicación se resuelve de la siguiente manera:

1. Se multiplican los coeficientes de los términos: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

2. Se multiplica la parte literal de los términos: $x^3 \cdot x^2 = x^5$

3. Se expresa el área del terreno del jardín. $\frac{2}{9}x^5$

En general, al **multiplicar dos expresiones algebraicas,** se aplica la propiedad de las potencias de igual base y la ley de los coeficientes.

4.1 Multiplicación de monomios

La **multiplicación de monomios** se realiza multiplicando los coeficientes de las expresiones algebraicas y aplicando la propiedad de las potencias de igual base.

Ejemplo 1

Observa los productos de las siguientes multiplicaciones de monomios.

a. $(4ab^2c^3)(5a^3) = 20a^4b^2c^3$ b. $(-5x^2y^4z)(5z^3) = -25x^2y^4z^4$

4.2 Multiplicación de monomio por polinomio

Para **multiplicar un monomio por un polinomio,** se aplica la propiedad distributiva multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio y luego, se realiza el producto entre monomios. Al final, si resultan términos semejantes, se reducen.

Ejemplo 2

Observa el desarrollo de: $(5a^3b + 6ab^2 - 4a^2)\left(-\frac{2}{5}ab\right)$.

$$5a^3b\cdot\left(-\frac{2}{5}ab\right) + 6ab^2\cdot\left(-\frac{2}{5}ab\right) - 4a^2\cdot\left(-\frac{2}{5}ab\right) = -2a^4b^2 - \frac{12}{5}a^2b^3 + \frac{8}{5}a^3b$$

Ejemplo 3

Observa otra forma de multiplicar un monomio por un polinomio.

$$\begin{array}{rr} & \frac{2}{7}x^3y^2 - \frac{4}{9}x^2y + \frac{7}{8}xy \\ \times & -\frac{2}{9}x^2y \\ \hline & -\frac{4}{63}x^5y^3 + \frac{8}{81}x^4y^2 - \frac{14}{72}x^3y^2 \end{array}$$

4.3 Multiplicación de polinomio por polinomio

La **multiplicación de polinomios** se basa en la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto a la suma. Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada uno de los términos del multiplicando por todos los términos del multiplicador y, luego, se suman los resultados.

Ejemplo 4

Observa cada uno de los pasos para multiplicar los siguientes polinomios.

$$\begin{array}{lllll}
3x^2y & - 2xy & + 3y & & \\
\times & \quad xy & + 2y & & \\
\hline
3x^3y^2 & - 2x^2y^2 & + 3xy^2 & & \leftarrow \text{Se multiplica por } xy. \\
6x^2y^2 & - 4xy^2 & + 6y^2 & & \leftarrow \text{Se multiplica por } 2y. \\
\hline
3x^3y^2 & + 4x^2y^2 & - xy^2 & + 6y^2 & \leftarrow \text{Se adiciona } n \text{ los términos semejantes.}
\end{array}$$

Ejemplo 5

Observa cómo se realizó esta multiplicación. ¿Qué ventaja crees que tiene respecto a la estrategia anterior?

$$\begin{array}{lllllll}
8a^2b & - 4b & + 6c & & & & \\
\times & 2ab & + c & & & & \\
\hline
16a^3b^2 & - 8ab^2 & + 12abc & & & & \\
 & & & + & 8a^2bc & - 4bc & + 6c^2 \\
\hline
16a^3b^2 & - 8ab^2 & + 12abc & + & 8a^2bc & - 4bc & + 6c^2
\end{array}$$

Ejemplo 6

Observa cómo se calcula el siguiente producto. Explica el proceso en cada paso.

$(m^2 + n^3 + z^4)(p^2 - q^3) =$

$(m^2 \cdot p^2) + (n^3 \cdot p^2) + (z^4 \cdot p^2) - (m^2 \cdot q^3) - (n^3 \cdot q^3) - (z^4 \cdot q^3) =$

$m^2 p^2 + n^3 p^2 + z^4 p^2 - m^2 q^3 - n^3 q^3 - z^4 q^3$

Ejemplo 7

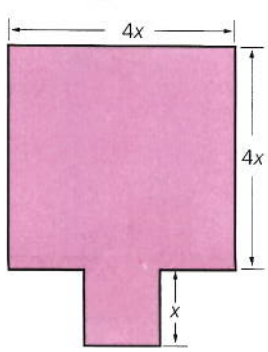


Figura 2.11

La Figura 2.11 se puede descomponer en dos cuadrados, uno de $4x$ de lado y otro de lado x.

Entonces, la superficie de la figura se obtiene al resolver la siguiente expresión:

$$(4x)(4x) + (x)(x)$$

Se simplifica la expresión y se obtiene:

$$(4x)(4x) + (x)(x) =$$
$$16x^2 + x^2 = 17x^2$$

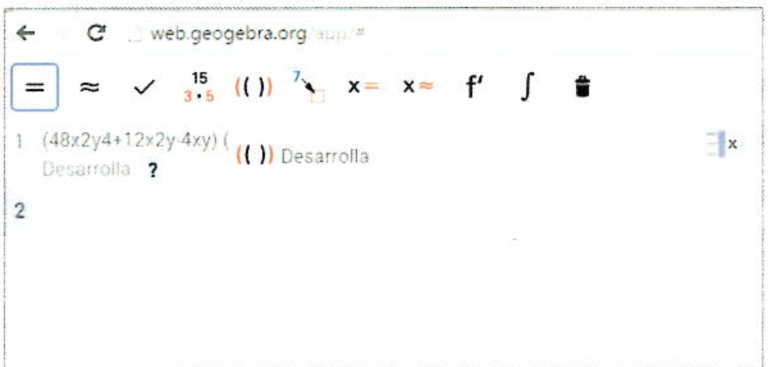
El área de la figura es $17x^2$.

4 Multiplicación de polinomios

MatemaTICS

Multiplica polinomios usando Geogebra

Cuando usas Geogebra (software de matemáticas dinámica) puedes multiplicar expresiones algebraicas, usando la ventana de calculo simbólico (CAS).



- Ubícate en la ventana CAS o cálculo simbólico.
- Al lado derecho del número 1 escribe la expresión que quieres resolver, es decir, los polinomios que deseas multiplicar.
- Para hallar el valor de la multiplicación, da clic en (( )). Luego, obtendrás el valor final de la multiplicación.

- Determina si $(48x^2y^4+12x^2y-4xy)(4ab+2)\neq(4ab+2)(48x^2y^4+12x^2y-4xy)$. Justifica tu respuesta.
- Usa Geogebra para decidir si cada una de las siguientes operaciones son verdaderas.

a. $\left(\frac{1}{3}m^2nq^4+3x+2\right)(8x^2+1)=\frac{8}{3}m^2nq^4x^2+\frac{1}{3}m^2nq^4+24x^3+16x^2+3x+2$

b. $(2mn^4+2y^3)\left(3+mna^2-\frac{1}{4}b^2\right)=-\frac{1}{2}b^2mn^4+2mn^4mna^2-\frac{1}{2}b^2y^3+2mna^2y^3+6mn^4+6y$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las multiplicaciones entre monomios.

a. $(-6x^3)(7x^4)$ b. $(2y^8)(9y^9)$
c. $(3y)(y^2)$ d. $(x^2)(-2x^2)$
e. $(-3x^2y)(2x^3y)$ f. $(-2xy)(-2xy)$
g. $(2x^2yz^3)(3x^3yz^3)$ h. $(x^{10}yz^3)(3x^3yz^3)$
i. $(3x^5y)(4x^6y^6z^6)$ j. $(-2y^5z)(x^2z)$

2 Relaciona los siguientes productos con sus respectivos resultados.

a. $(9x^3+y^2z)(x^3y^4z)$	$-3x^3y^3z-3y^3z^4$
b. $(x^2z)(3x^2y^3+z^4)$	$6x^7y^7-2xy^8$
c. $(-3y^3z)(x^3+z^3)$	$9x^6y^4z+x^3y^6z^2$
d. $(2x^6y^2)(2x^3-y^7z^2)$	$3x^4y^3z+x^2z^5$
e. $(-3x^6+y)(-2xy^7)$	$-16x^4y^3-4xy^4$
f. $(-4x^3-y)(4xy^3)$	$4x^9y^2-2x^6y^9z^2$

3 El producto de dos polinomios es $10x^3-15x^2+20x$. Si uno de los polinomios es $2x^2-3x+4$, ¿cuál es el otro polinomio?

Comunicación

4 Determina el polinomio que representa el área de cada una de las siguientes figuras.

a.

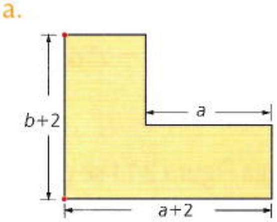


Figura 2.12

b.

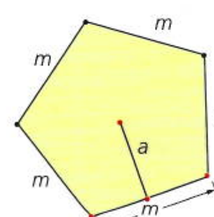


Figura 2.13

c.

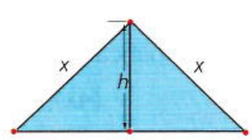


Figura 2.14

d.

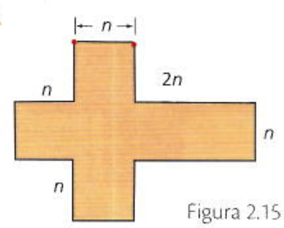


Figura 2.15

5 Indica si el resultado de las siguientes operaciones es correcto (C) o incorrecto (I).

a. $(7x + 6)(2x) = 14x + 6x^2$ ( )

b. $x(3x^3 + 2y^2) = 3x^4 + 2xy^2$ ( )

c. $(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 + 1$ ( )

d. $5xy^3(x^4 + 2y^5) = 5xy^3 + 10xy^8$ ( )

e. $(x + 1)(x + 1) = x^2 + 1$ ( )

f. $3xy(3x^2 - 7y^2) = 9x^3y - 21xy^3$ ( )

g. $x^3(x^2 + y^3) = x^6 + x^3y^3$ ( )

Comunicación

6 Identifica el error que se cometió en las multiplicaciones.

a.
$$\begin{array}{r}
5x^2 + 6x - 4 \\
3x - 2 \\
\hline
-10x^2 - 12x + 8 \\
15x^3 + 18x^2 + 12x \phantom{{}+8} \\
\hline
15x^3 + 8x^2 + 0x + 8
\end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r}
3x^3 \qquad - 8x + 4 \\
2x^2 + 5x - 1 \\
\hline
-3x^3 \qquad + 8x - 4 \\
15x^4 \qquad - 40x^2 + 20x \phantom{{}-4} \\
6x^5 \qquad - 16x^3 + 8x^2 \phantom{{}+20x-4} \\
\hline
6x^5 + 15x^4 - 13x^3 - 32x^2 + 28x - 4
\end{array}$$

7 Completa las siguientes operaciones con el polinomio que les hace falta.

a. $(-x + 5)\ \_\_\_\_ = -3x^2 + 15x$

b. $\_\_\_\_\ (-x + 5) = 9x^2 + 9x$

c. $(3x)\ \_\_\_\_ = 12x^2 - 18x$

d. $(-3x^3)(x^2 - 3) = \_\_\_\_$

e. $\_\_\_\_\ (4x^3y - 5xy^3) = 16x^5y^3 - 20xy^3x^2y^2$

f. $(9x)(3x^2 + 5x - 3) = \_\_\_\_$

Razonamiento

8 Relaciona cada figura geométrica con el polinomio que representa su área.

a. $5x^2$

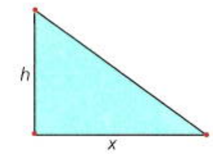


Figura 2.16

b. x^2

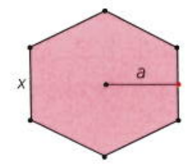


Figura 2.17

c. $\dfrac{6ax}{2}$

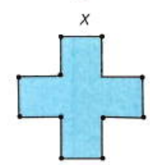


Figura 2.18

d. $\dfrac{xh}{2}$

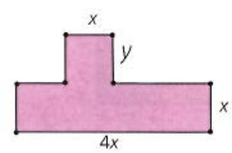


Figura 2.19

e. $4x^2 + xy$

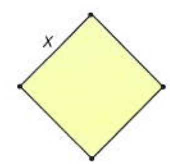


Figura 2.20

Resolución de problemas

9 Un lado de un rectángulo se representa con el polinomio $x + 3$ y el otro lado, con el polinomio $3x + 1$. A partir de esta información, determina:

a. El área del rectángulo en términos de x.

b. El área del rectángulo si $x = 2$ cm.

Evaluación del aprendizaje

Se cuenta con un prisma rectangular como el de la Figura 2.21. Resuelve.

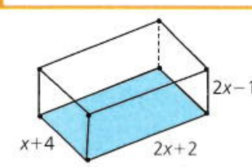


Figura 2.21

a. Halla el polinomio que representa el área de la base.

b. Determina un polinomio que represente el volumen del prisma rectangular.

5 Productos notables

Saberes previos

Calcula rápidamente el producto $(5 - 3)(5 + 3)$. Compara tu respuesta con el resultado de la expresión $5^2 - 3^2$, ¿Cómo son los resultados?

Analiza

Una finca está parcelada tal como muestra la Figura 2.22. En cada región sembraron diferentes productos.

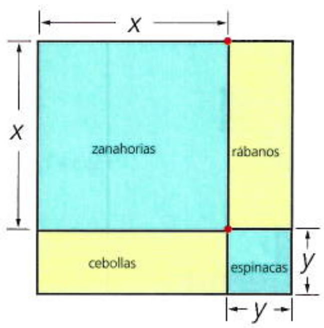


Figura 2.22

- ¿Qué área corresponde al cultivo de espinacas?
- ¿Cuál es la expresión que permite determinar el área total de la finca?

Conoce

Para calcular el área del terreno destinado al cultivo de espinacas, es necesario hallar el valor del cuadrado pequeño que está en la parte inferior de la Figura 2.22.

Observa que cada lado tiene una longitud representada por la variable y. Por lo tanto, el área será igual a y^2.

En cuanto a la expresión para determinar el área total de la finca, se puede calcular el área de cada una de las secciones y sumarlas. Entonces:

$A1 = x \cdot x \qquad A2 = (x)(y) = xy \qquad A3 = (x)(y) = xy \qquad A4 = (y \cdot y) = y^2$

Luego, el área de la finca se calcula sumando

$x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Sin embargo, este resultado también se puede calcular encontrando primero la expresión que corresponde al lado de la finca y elevándola al cuadrado. Observa:

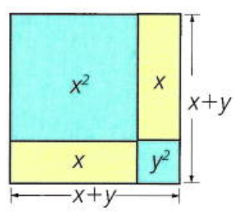


Figura 2.23

$(x + y)^2 =$

$(x + y)\,(x + y) =$

$x^2 + 2xy + y^2$

Esto corresponde a un producto notable.

Los **productos notables** son multiplicaciones que se pueden calcular sin necesidad de aplicar el algoritmo de la multiplicación.

5.1 Cuadrado de un binomio

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término (más o menos) el doble del primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado.

Cuadrado de la suma de dos términos	Cuadrado de la resta de dos términos
$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ $= x^2 + xy + xy + y^2$ $= x^2 + 2xy + y^2$	$(x - y)^2 = (x - y)(x - y)$ $= x^2 - xy - xy + y^2$ $= x^2 - 2xy + y^2$

Tabla 2.6

5.2 Producto de la suma por la diferencia de dos términos

El **producto de la suma por la diferencia de dos términos** es equivalente a la diferencia entre el cuadrado del primer término y el cuadrado del segundo término.

Ejemplo 1

$(2a - 4b)(2a + 4b) = (2a)^2 - (4b)^2 = 4a^2 - 16b^2$

5.3 Producto de la forma $(x + a)(x + b)$

El **producto de la forma $(x + a)(x + b)$** es equivalente al cuadrado del término común, más el producto de dicho término por la suma de los no comunes, más el producto de los términos no comunes.

Ejemplo 2

Calcula, el producto notable $(x + 7)(x + 6)$.

- Se calcula el primer término elevado al cuadrado: x^2
- Se calcula el producto del primer término por la suma de los términos no comunes: $x(7 + 6)$
- Se halla el producto de los segundos términos de los binomios: $(7)(6)$
- Se establece la igualdad correspondiente: $(x + 7)(x + 6) = x^2 + 13x + 42$

5.4 Cubo de un binomio

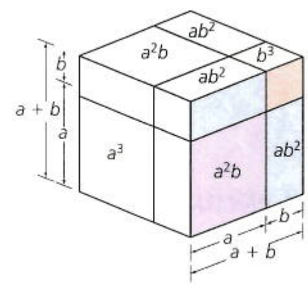
En la Figura 2.24, se observa la descomposición de un cubo de arista $a + b$ en seis prismas y dos cubos. Geométricamente se deduce entonces que $(a + b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + ab^2 + a^2b + b^3$.

Simplificando algebraicamente se obtiene: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

El **cubo de un binomio** es equivalente al cubo del primer término, (más o menos) el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más (o menos) el cubo del segundo término.

Cubo de la suma de dos términos	Cubo de la diferencia de dos términos
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Tabla 2.7



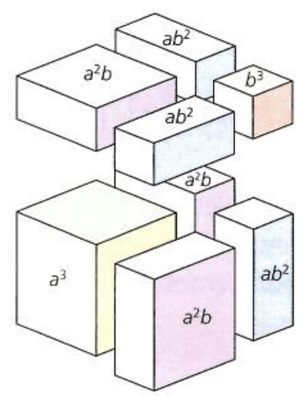


Figura 2.24

Ejemplo 3

Analiza cómo se halla el resultado de $(2m - n)^3$.

- Se halla el primer término elevado al cubo: $(2m)^3 = 8m^3$
- Se calcula el triple del cuadrado del primer término por el segundo: $3(2m)^2n = 12m^2n$
- Se multiplica el triple del primer término por el segundo elevado al cuadrado: $3(2m)(n)^2 = 6mn^2$
- Se eleva el segundo término al cubo: n^3

  Por lo tanto, el resultado es $8m^3 - 12m^2n + 6mn^2 - n^3$.

Ejemplo 4

El cubo de un binomio es $8m^3 + 36m^2 + 54m + 27$. Encuentra el binomio.

- Para establecer el binomio, se halla la raíz cúbica del primer y del cuarto término, puesto que estos valores están elevados al cubo. Entonces:

$$\sqrt[3]{8m^3} = 2m \quad y \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

- Luego, el primer término del binomio es $2m$ y el segundo término es 3.
- Para determinar con cuál operación se unirá el binomio (adición o diferencia), se observan las características de los signos de la expresión inicial y se identifica que todos son positivos. Entonces, el binomio es de suma.
- Por tanto, se concluye que el producto notable es $(2m + 3)^3$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el cuadrado de cada binomio.

a. $(9 + 4m)^2$ b. $(x^{10} - 5y^2)^2$

c. $(2x - 3z)^2$ d. $(4m^5 + 5n^3)^2$

e. $\left(\frac{3}{6}w - \frac{1}{2}y\right)^2$ f. $\left(\frac{5}{7}a^2 + \frac{1}{8}n\right)^2$

2 Sin efectuar la multiplicación halla los productos.

a. $(x - y) \cdot (x + y)$ b. $(2a - 1) \cdot (2a + 1)$

c. $(1 - 3ax) \cdot (1 + 3ax)$ d. $(a - b) \cdot (a + b)$

e. $(a - x) \cdot (a + x)$ f. $(m + n) \cdot (m - n)$

g. $\left(\frac{1}{4}m + \frac{2}{5}n\right) \cdot \left(\frac{1}{4}m - \frac{2}{5}n\right)$

3 Completa la Tabla 2.8 de doble entrada con los resultados de los productos notables correspondientes.

$\times$	$(x + y)$
$(x + y)$	
$(x + y)^2$	

Tabla 2.8

4 Calcula el cubo de un binomio en cada caso.

a. $(a + 2)^3$ b. $(a - 4)^3$ c. $\left(m - \frac{2}{7}\right)^3$

d. $\left(m + \frac{5}{4}\right)^3$ e. $\left(\frac{2}{3} + x\right)^3$ f. $\left(n - \frac{2}{7}\right)^3$

5 Calcula el producto de las expresiones algebraicas.

a. $(x - 2) \cdot (x + 3)$

b. $(2a - 5) \cdot (2a + 6)$

c. $(a - 3b) \cdot (a + x)$

d. $(1 - a) \cdot (a + 1)$

e. $(3ab - 5x) \cdot (3ab + 2)$

Razonamiento

6 Escribe en cada caso, las expresiones desconocidas en cada igualdad.

a. $(4x - 5y)^2 = \boxed{} - 40xy + 25y^2$

b. $(3x + 2y)^2 = 9\boxed{} + \boxed{} + 4y^2$

c. $(-4v - 7z)^3 = \boxed{} - 336v^2z + \boxed{} - \boxed{}$

7 Relaciona cada producto notable con su desarrollo.

a. $(a + 3)^3$ ( ) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{28}{9}ab + \frac{49}{9}b^2$

b. $\left(\frac{7}{6}x + \frac{1}{2}m\right)^2$ ( ) $\frac{1}{4}m^2 + \frac{7}{6}mx + \frac{49}{36}x^2$

c. $\left(-\frac{2}{3}a + \frac{7}{3}b\right)^2$ ( ) $x^2 - y^2$

d. $(x + y)(x - y)$ ( ) $(m - n)(m + n)$

e. $m^2 - n^2$ ( ) $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$

8. Explica el error que se cometió en el desarrollo de cada producto notable.

a. $(1 - 4ax)^3$

$= 1 - 3a^2x + 12ax^2 + 16a^3x^3$

b. $((x + y) + 1)((x - y) - 1)$

$= x^2 - y^2 - 2y + 1$

c. $(5x^3 + 6m^4)^2$

$= 25x^5 - 60x^3m^4 - 36m^8$

9. Determina, en cada caso, si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Explica tus respuestas.

a. Para hallar el cubo de un binomio, el primer y segundo término se elevan al cuadrado. ( )

b. En el cuadrado de un binomio, todos los términos se elevan al cuadrado. ( )

c. Al multiplicar la suma por la diferencia de un mismo binomio, su resultado es el primer término elevado al cuadrado, menos el segundo término elevado al cuadrado. ( )

d. El producto de la forma $(x + a)(x + b)$ es equivalente al cuadrado del término común más el producto de los no comunes. ( )

Comunicación

10. Indica el producto notable que aplica en cada caso.

a. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b. $(v + w)(v - w) = v^2 - w^2$

c. $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

d. $(a + b)(a + c) = a^2 + ab + ac + bc$

Resolución de problemas

11. Un apartaestudio de forma cuadrada mide $2x + 3y$ de lado, como se muestra en la Figura 2.25. ¿Cuál es el área total del apartaestudio?

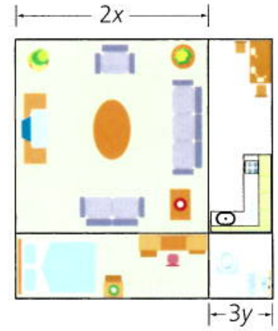


Figura 2.25

12. Un carpintero necesita hacer una puerta para una alacena en una cocina. Si se sabe que las medidas de la puerta son $(3x + 9)$ y $(3x - 9)$, respectivamente. ¿Cuál es el área de la puerta?

13. Miguel compró una nueva CPU para su computadora. Si cuenta con espacio de $100x^2 + 24x - 8$ y se sabe que las medidas de la CPU son $(10x + 3)$ y $(10x - 1)$, ¿podrá instalarla en este espacio?

14. Se requiere hallar el área de una tableta cuyas dimensiones son $(3x + 4)$ y $(3x + 1)$. ¿Cuál es la expresión que representa la superficie de la tableta?

15. El nuevo televisor de la compañía tiene las siguientes dimensiones: $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)\left(\frac{1}{2}x - 8\right)$. ¿Cuál es el área que ocupa el televisor?

Evaluación del aprendizaje

Para cada una de las siguientes figuras obtén una expresión simplificada para el área, aplicando la teoría de los productos notables.

a.

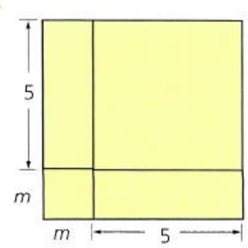


Figura 2.26

b.

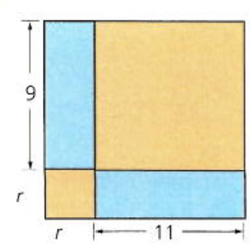


Figura 2.27

6 División de polinomios

Saberes previos

Si se divide un número entre 2, entre 3 y entre 4, respectivamente, sobra 1; pero al dividir el mismo número entre 5 sobran 3. ¿Cuál es el número?

Analiza

Un mantel rectangular cuya área se expresa como $4x^2$, tiene por largo $2x$.

- ¿Cuál es el ancho del mantel?

Conoce

6.1 División entre un monomio

Para hallar el ancho del mantel, se aplica la fórrmula del área del rectángulo y en esta se reemplazan los datos dados. Observa:

$$A = \text{largo} \cdot \text{ancho} \qquad 4x^2 = (2x) \cdot (\text{ancho})$$

Como se necesita hallar el ancho del mantel, debes dividir las dos cantidades conocidas. En este caso las expresiones son dos monomios:

Por tanto, el ancho del mantel es: $\dfrac{4x^2}{2x} = 2x$

Para **dividir dos monomios**, primero se dividen o se simplifican los coeficientes y luego se simplifican las partes literales, aplicando, si es necesario, la propiedad de división de potencias de igual base.

Ejemplo 1

Para dividir un monomio entre otro monomio, por ejemplo $\dfrac{40x^{10}}{5x^2}$, se realizan los siguientes pasos:

1. Se simplifican las cantidades enteras: $\dfrac{40x^{10}}{5x^2} = 8\dfrac{x^{10}}{x^2}$
2. Se aplica la ley de la división de potencias de igual base para los exponentes: $8x^{10-2=8}$
3. Se obtiene el resultado $8x^8$.

6.2 División de un polinomio entre un monomio

Para **dividir un polinomio entre un monomio**, se divide cada término del polinomio entre el monomio. Luego se dividen los monomios obtenidos.

Ejemplo 2

Analiza cómo se realizan las divisiones de polinomios entre monomios.

a. $\dfrac{20x^4 + 16x^3 + 8x^2}{4x^2}$ b. $\dfrac{35x^3 + 21x^2 + 7x}{7x}$

c. $\dfrac{8b - 12a^4b^3 - 6a^5b^2 + 10a}{2ab^2}$

a. $\dfrac{20x^4}{4x^2} + \dfrac{16x^3}{4x^2} + \dfrac{8x^2}{4x^2} = 5x^2 + 4x + 2$

b. $\dfrac{35x^3}{7x} + \dfrac{21x^2}{7x} + \dfrac{7x}{7x} = 5x^2 + 3x + 1$

c. $\dfrac{8b}{2ab^2} - \dfrac{12a^4b^3}{2ab^2} - \dfrac{6a^5b^2}{2ab^2} + \dfrac{10a}{2ab^2} = \dfrac{4}{ab} - 6a^3b - 3a^4 + \dfrac{5}{b^2}$

6.3 División entre polinomios

Para explicar la división de polinomios, se muestra el paso a paso para dividir $x^2 + 3x + 2$ entre $x + 1$.

a. Se ordenan los términos del divisor y el dividendo en potencias descendientes con respecto a una variable.

b. Se halla el primer término del cociente, dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

c. Se multiplica todo el divisor por el término del cociente que se halló en el paso anterior y se ubican los productos debajo de los respectivos términos del dividendo.

d. Se restan las cantidades.

e. Se repite el procedimiento anterior con todos los términos del polinomio dividendo.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^2 & +\ 3x & +\ 2 & & x+2 \\ \cline{5-5}
-x^2 & -\ 2x & & & x+1 \\ \cline{1-3}
0 & +\ x & +\ 2 & & \\
 & -\ x & -\ 2 & & \\ \cline{1-3}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Ejemplo 3

La división $3y^2 + y^3 - 2y - 1$ entre $y^2 + 2y$, aplicando los pasos anteriores, es:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
y^3 & +\ 3y^2 & -\ 2y & -\ 1 & y^2+2y \\ \cline{5-5}
-y^3 & -\ 2y^2 & & & y+1 \\ \cline{1-4}
 & +\ y^2 & -\ 2y & -\ 1 & \\
 & -\ y^2 & -\ 2y & & \\ \cline{1-4}
 & & -\ 4y & -\ 1 &
\end{array}
$$

En esta división se obtiene un residuo de $-4y - 1$.

Ejemplo 4

Resuelve $(4x^3 - 13x^2 + 8x - 15) \div (4x^2 - x + 5)$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -\ 13x^2 & +\ 8x & -\ 15 & 4x^2-x+5 \\ \cline{5-5}
-4x^3 & +\ x^2 & -\ 5x & & x-3 \\ \cline{1-4}
 & -\ 12x^2 & +\ 3x & -\ 15 & \\
 & 12x^2 & -\ 3x & +\ 15 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ejemplo 5

El resultado de $(x^3 - 5x - 12) \div (x - 3)$ es $x^2 + 3x + 4$. Comprueba que la división es exacta.

Para comprobar que esta división es exacta, se utiliza el hecho de que la división y la multiplicación son operaciones inversas.

Al realizar el producto del divisor por el cociente, $(x - 3)(x^2 + 3x + 4)$, se obtiene $x^3 - 5x - 12$, que es el dividendo.

Por lo tanto, esta división es exacta.

6 División de polinomios

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes divisiones.

a. $\dfrac{x^7}{x^5}$

b. $\dfrac{6x^3y^2}{2y}$

c. $\dfrac{21x^2y^3}{7x^2y^2}$

d. $\dfrac{9a^2 - 6a}{3a}$

e. $\dfrac{10a^3 + 8}{2}$

f. $\dfrac{12a^2 + 8a + 24}{2}$

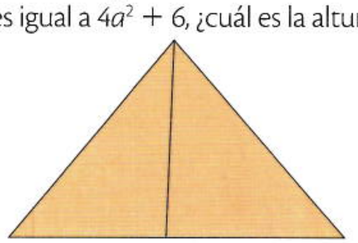
Razonamiento

2 Relaciona las divisiones de la izquierda con los resultados de la derecha.

a. $\dfrac{a^2 - 6a + 4}{2a}$	$5x^2 - 4xy + \dfrac{3}{y}$
b. $\dfrac{6x^2 + 8x - 24}{2x}$	$b + \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{b}$
c. $\dfrac{10x^2y^2 - 8xy^3 + 6y}{2y^2}$	$3x^2 - 2x - 5$
d. $\dfrac{25a^3b + 15ab^3}{5ab}$	$\dfrac{1}{2}a - 3 + 2a$
e. $\dfrac{2b^2 + b - 8}{2b}$	$3y^2 + 2y$
f. $\dfrac{15x^2 - 10x - 25}{5}$	$3x + 4 - \dfrac{12}{x}$
g. $\dfrac{9y^3 + 6y^2}{3y}$	$5a^2 + 3b^2$

Resolución de problemas

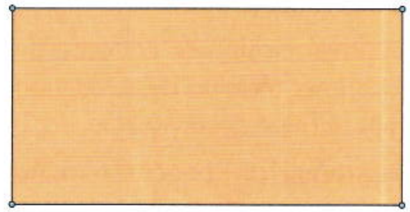
3 El área del triángulo es $2a^3 + 8a^2 + 3a + 12$. Si su base es igual a $4a^2 + 6$, ¿cuál es la altura del triángulo?



$4a^2 + 6$

Figura 2.28

4 El área del rectángulo es $5x^4 + 3x^3 + 17x^2 + 9x + 6$. Si la longitud de su base es igual a $5x^2 + 3x + 2$, ¿cuál es la altura del rectángulo?



$5x^2 + 3x + 3$

Figura 2.29

Ejercitación

5 Resuelve las siguientes divisiones.

a. $(a^2 + 3a + 2) \div (a + 1)$

b. $(6x^2 + 16x + 8) \div (3x + 2)$

c. $(6a^2 + a - 2) \div (2a - 1)$

d. $(4x^2 - 36) \div (2x - 6)$

e. $(3y^5 + 2y^2 - 12y - 4) \div (y^2 - 2)$

f. $(y^2 - 11y + 28) \div (y - 4)$

g. $(x^4 - 1) \div (x - 1)$

h. $(4a^3 - 5a) \div (2a - 1)$

Razonamiento

6 Si se divide un binomio entre un monomio, ¿es posible obtener un monomio como cociente? Justifica tu respuesta. Si la respuesta es afirmativa, propón un ejemplo.

7 A continuación se muestran en desorden los pasos que se deben seguir a la hora de hacer divisiones entre polinomios. Ordénalos numerándolos de 1 a 4.

( ) Se restan las cantidades.

( ) Se halla el primer término del cociente, dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

( ) Se multiplica todo el divisor por el término del cociente hallado anteriormente y este producto se resta del dividendo.

( ) Se ordenan los términos del divisor y el dividendo en potencias descendientes con respecto a una variable.

Modelación

8 Una caja con forma de prisma recto tiene un volumen representado por la ecuación $y^3 - y^2 + 4y - 4$. Considerando que el área de la base es $y^2 + 4$.

a. Realiza un dibujo que represente la situación.

b. Calcula la expresión algebraica que representa la altura de la caja.

Comunicación

9 Comprueba las divisiones y, en el caso que estén erradas, corrígelas.

a.

$$\begin{array}{rl}
y^2 + 6y + 8 & \underline{|\ y + 2} \\
-\ y^2 - 2y \quad & \ \ y + 4 \\
\hline
8y + 8 & \\
-\ 8y - 16 & \\
\hline
-\ 8 &
\end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rl}
a^2 + 7a + 10 & \underline{|\ a + 2} \\
-\ a^2 - 2a \quad & \ \ a + 5 \\
\hline
5a + 10 & \\
-\ 5a - 10 & \\
\hline
-10a - 20 &
\end{array}$$

Razonamiento

10 Escribe los monomios que hagan válida cada igualdad:

$$\frac{20x^4 + 28x^6 - 12x^8}{\boxed{}} = 5x^3 + 7x^5 - 3x^7$$

$$(10x^5 + 5x^4) \div (2x^3) = \boxed{} + \boxed{}$$

$$\boxed{} \div \boxed{} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{\boxed{} - \boxed{}}{3x^6y^2} = -20x^3y + 8x^5y^4$$

Ejercitación

11 Completa la Tabla 2.9 teniendo en cuenta que las expresiones de la primera columna son los dividendos y las de la segunda, tercera y cuarta columnas son los divisores.

$\div$	$2xy$	$-3x$	$-6xy$
$x^2y - 6x^2y^2$			
$10xy + 60x^2y^3$			
$180x^3y^3 + 60x^2y^4$			

Tabla 2.9

Evaluación del aprendizaje

i Un bloque de concreto tiene la forma que se muestra en la Figura 2.30. Si se sabe que su volumen es $40x^3 + 50x^3$ y su altura es $10x$, encuentra el área de la región oscura.

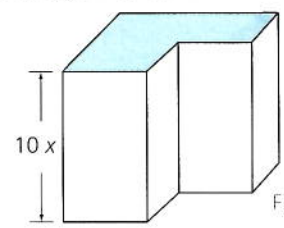


Figura 2.30

ii El volumen de la pieza de madera de la Figura 2.31 es $60x^3y + 280x^2y^3$. La longitud de un lado de la base es $20xy$. Encuentra el área de la región sombreada.

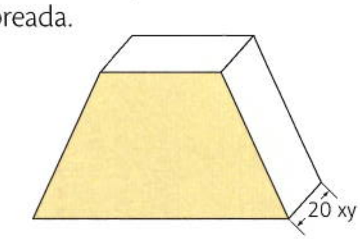


Figura 2.31

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Algunos estudiantes comprenden con mayor facilidad temas como los propuestos en esta unidad y a otros les toma más tiempo. ¿Consideras que es importante que se tengan en cuenta los estilos de aprendizaje de cada estudiante? ¿Por qué? ¿Crees que es conveniente que se trate de manera homogénea la forma de aprender de todos los estudiantes de una clase?

7 Regla de Ruffini

Saberes previos

¿En cuál de las siguientes divisiones el residuo es cero?

$$(x^2 - 2x + 1) \div (x - 1)$$
$$(x^2 - 2x + 1) \div (x + 1)$$

Analiza

El área de un triángulo se expresa como $2x^3 + 6x^2 - 4$. Si se sabe que su base es $x + 1$, ¿cuál es la altura del triángulo?

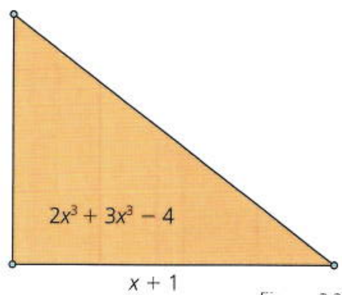


Figura 2.32

Conoce

Para establecer la expresión que corresponde a la base del triángulo, se tiene en cuenta la fórmula del área del triángulo y se aplica la división de polinomios.

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} \leftrightarrow 2A_t = b \cdot h$$

$$2x^3 + 6x^2 - 4 = \frac{(x+1) \cdot h}{2} \leftrightarrow (2x^3 + 6x^2 - 4)2 = (x + 1) \cdot h$$

$$\frac{4x^3 + 12x^2 - 8}{(x + 1)} = h \leftrightarrow 4x^2 + 8x - 8 = h$$

En el siguiente ejemplo, se muestra un procedimiento para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $(x - r)$.

Ejemplo 1

Analiza detenidamente los pasos de otra estrategia para dividir $(4x^3 + 12x^2 - 8)$ entre $(x + 1)$.

1. Se completa el polinomio: $4x^3 + 12x^2 + 0 - 8$

2. Se disponen los coeficientes del dividendo y abajo a la izquierda se ubica el opuesto del término independiente del divisor:

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 12 & 0 & -8 & -1 \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Se traza una raya y se baja el primer coeficiente:

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 12 & 0 & -8 & -1 \\ \hline 4 & & & & \end{array}$$

4. Se multiplica el coeficiente por el divisor y se coloca debajo del siguiente término:

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 12 & 0 & -8 & -1 \\ & -4 & & & \\ \hline 4 & & & & \end{array}$$

5. Se suman los coeficientes anteriores:

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 12 & 0 & -8 & -1 \\ & -4 & & & \\ \hline 4 & 8 & & & \end{array}$$

6. Se repite el proceso, las veces que sea necesario:

$$\begin{array}{rrrr|r} 4 & 12 & 0 & -8 & -1 \\ & -4 & -8 & 8 & \\ \hline 4 & 8 & -8 & 0 & \end{array}$$

7. El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y sus coeficientes son las cantidades obtenidas. El 0 representa el residuo de la división. $4x^2 + 8x - 8$ residuo 0

El procedimiento utilizado en el ejemplo, es otra manera de realizar la división de polinomios en aquellos casos en los que el divisor es de la forma $(x - r)$. Esta estrategia se conoce con el nombre de la **regla de Ruffini**.

Ejemplo 2

Resuelve aplicando la regla de Ruffini.

$$(3x^2 + 2x - 8) \div (x + 2)$$

3	2	−8	−2
	−6	8	
3	−4	0	

Así, el polinomio de solución de esta división es $3x - 4$ y su residuo es 0.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve usando la regla de Ruffini.

a. $(x^3 + 4x^2 + x - 2) \div (x + 1)$

b. $(x^3 + 3x^2 - 6x - 8) \div (x - 2)$

c. $(x^3 + 6x^2 + 14x + 24) \div (x + 4)$

d. $(2x^3 - 5x^2 - 30x + 11) \div (x + 3)$

e. $(2x^4 - 10x^2 + 8) \div (x + 2)$

2 Completa las tablas con los valores correspondientes.

a.

División	$\dfrac{(x^3 + 4x^2 + 7x + 4)}{(x + 1)}$
Residuo	
Cociente	

Tabla 2.10

b.

División	$\dfrac{(x^3 + 6x^2 + 11x - 6)}{(x - 2)}$
Residuo	
Cociente	

Tabla 2.11

Razonamiento

3 Halla el error que se cometió al aplicar la regla de Ruffini en la operación $(4x^3 - 2x^2 + 3x) \div (x + 2)$.

	4	−2	3	0
−2		8	12	30
	4	6	15	30

Se obtuvo como resultado $4x^3 + 6x + 15$ y residuo 30.

4 Ana María afirma que el cociente y el residuo de la división $(x^3 - 3x^2 - 4x + 2) \div (x + 2)$ son, respectivamente, $x^2 - 5x + 6$ y -10. ¿Ana María tiene razón? Explica.

5 Juan confundió los números aplicando la regla de Ruffini y le quedó el siguiente resultado:

5	4	−2	−3	−1
	−7	10	2	
−10	−2	7	14	

Ayuda a Juan a reconstruir la división, sabiendo que el divisor y el residuo están bien, pero que los demás números están desordenados.

6 Determina qué valor debe tomar k para que el polinomio $x^3 - x^2 - 9x + k$ sea divisible por $x + 3$.

Evaluación del aprendizaje

Une con una línea los términos correspondientes.

	Divisor	Residuo
	$(x + 3)$	42
$x^2 + 5x + 6$	$(x + 1)$	2
	$(x - 4)$	0

8 Factorización de polinomios

Saberes previos

¿Cuál es el m.c.d. de 12, 18 y 20? Encuéntralo y describe el procedimiento que seguiste.

Analiza

Identifica el factor común de este polinomio:

$3x^3 + 12x^2 + 6x$.

Conoce

Cuando una operación algebraica se expresa como un producto de factores, se dice que está factorizada. En ese caso, ambas expresiones son equivalentes.

Por ejemplo, para factorizar la expresión $3x^3 + 12x^2 + 6x$, se busca un factor común que tengan todos los términos.

Para determinar el factor común del polinomio dado, se puede seguir este proceso:

- Determinar el factor común de los coeficientes del polinomio. $\mathbf{3}x^3 + \mathbf{12}x^2 + \mathbf{6}x$; m.c.d. $(3, 12, 6) = 3$
- Hallar el máximo común divisor de la parte literal del polinomio. $3\boldsymbol{x^3} + 12\boldsymbol{x^2} + 6\boldsymbol{x}$; m.c.d. $(x^3, x^2, x) = x$

De lo anterior se deduce que el factor común del polinomio es 3x.

Para calcular el **factor común de un polinomio,** se halla el máximo común divisor de los coeficientes y se multiplica por el máximo común divisor de la parte literal.

8.1 Factorización de un polinomio por factor común

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como un **producto de expresiones algebraicas de menor grado.**

Cuando un polinomio no se puede expresar como producto de otros de menor grado, se dice que es un polinomio irreducible.

Ejemplo 1

Al multiplicar $2x$ por $x^2 + 3xy$ se obtiene $2x^3 + 6x^2y$.

Es decir, $2x(x^2 + 3xy) = 2x^3 + 6x^2y$.

$2x \cdot (x^2 + 3xy)$ es una expresión factorizada de $2x^3 + 6x^2y$.

$2x$ y $x^2 + 3xy$ son factores de $2x^3 + 6x^2y$.

Muchos polinomios se pueden factorizar identificando el factor común de sus términos.

Ejemplo 2

Observa cómo factorizar los siguientes polinomios:

a. $14x^4y + 7xy^2 + 21xy$ **b.** $24x^2 + 12xy$

Al identificar el factor común de los términos de cada polinomio, estos quedan expresados así:

a. $7xy\,(2x^3 + y + 3)$ **b.** $12x\,(2x + y)$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

8.2 Factorización por agrupación de términos

Para **factorizar un polinomio por agrupación de términos,** se aplica la propiedad asociativa de la adición y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. De esta manera, se hallan factores comunes a cada grupo de términos.

Ejemplo 3

Para factorizar el polinomio $5x + 5y + 3x^2 + 3xy$ se siguen estos pasos:

1. Se agrupan los términos que tienen algún factor común.

$$(5x + 5y) + (3x^2 + 3xy)$$

2. Se factoriza cada grupo de términos.

$$5(x + y) + 3x(x + y)$$

3. Se factoriza la expresión común, es decir $(x + y)$.

$$(x + y)(5 + 3x)$$

Por lo tanto, $5x + 5y + 3x^2 + 3xy = (x + y)(5 + 3x)$

Ejemplo 4

Factoriza el polinomio $4x^2 - 2xy + 9yz - 18xz$.

La factorización requiere los siguientes pasos.

$(4x^2 - 2xy) + (9yz - 18xz)$ ← Se agrupan los términos con factores comunes.

$2x(2x - y) + 9z(y - 2x)$ ← Se factoriza cada grupo de términos.

$2x(2x - y) - 9z(2x - y)$ ← Se factoriza el signo menos.

$(2x - y)(2x - 9z)$ ← Se factoriza la expresión común $(2x - y)$.

8.3 Factorización de la diferencia de cuadrados perfectos

Si al cuadrado de lado a de la Figura 2.33, se le sustrae una región cuadrada de lado b, se obtiene una región cuya área es $a^2 - b^2$, que también se puede expresar como la suma de las áreas de dos rectángulos:

$$a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a - b)$$

Entonces $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

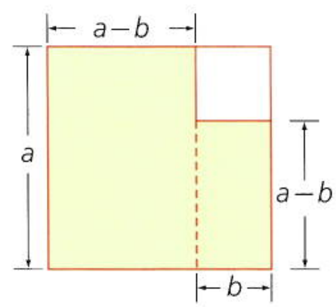


Figura 2.33

Factorizar una **diferencia de cuadrados** equivale al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos. Es decir: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Ejemplo 5

Observa cómo se factorizan las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$, porque $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{4} = 2$.

b. $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$, porque $\sqrt{4x^2} = 4x$ y $\sqrt{9} = 3$.

c. $49n^2 - 1 = (7n + 1)(7n - 1)$, porque $\sqrt{49n^2} = 7n$ y $\sqrt{1} = 1$.

8.4 Factorización de la suma de cubos perfectos

La suma de dos cubos perfectos equivale al producto de dos factores: el primero, un binomio formado por las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz menos el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

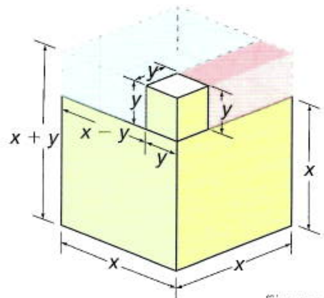


Figura 2.34

La **factorización de la suma de cubos perfectos** se expresa así:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Esta igualdad se obtiene al completar la figura en el espacio, de tal manera que las dimensiones del paralelepípedo que se forma son $x + y$, x y x, como en la Figura 2.34.

Ejemplo 6

Para factorizar la suma $x^3 + 27$ se sigue este proceso:

1. Se extrae la raíz cúbica del primer término. — *Para* x^3 es $\sqrt[3]{x^3} = x$
2. Se extrae la raíz cúbica del segundo término. — Para 27 es $\sqrt[3]{27} = 3$
3. Se expresa la suma de cubos como el producto de la suma de las raíces por la suma de los cuadrados de las raíces menos su producto. — $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

8.5 Factorización de la diferencia de cubos perfectos

La diferencia de dos cubos perfectos equivale a multiplicar dos factores: el primero, un binomio formado por la diferencia de las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz más el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz (Figura 2.33).

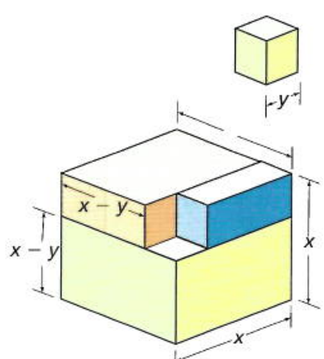


Figura 2.35

Ejemplo 7

Para factorizar la expresión $x^3 - 8$ primero se calcula la raíz cúbica de x^3 que es x y luego, la raíz cúbica de 8 que es 2.

Después, expresa $x^3 - 8$ como el producto de la diferencia de las raíces $(x - 2)$ y la suma de los cuadrados de las raíces más el producto de las mismas, es decir, $(x^2 + 2x + 4)$.

Entonces: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

8.6 Factorización de expresiones de la forma $x^n \pm y^n$

Las **expresiones de la forma $x^n + y^n$**, con n como un número entero, son factorizables solo si n es impar. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Las **expresiones de la forma $x^n - y^n$**, con n como un número entero, son factorizables para todo n. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Ejemplo 8

Factoriza la expresión $x^5 + y^5$.

Siguiendo lo descrito anteriormente, se concluye que:

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

Ejemplo 9

El binomio $x^4 - y^4$ es la diferencia de dos potencias de un número par. Entonces, es factorizable; $(x - y)$ y $(x + y)$ son dos de sus factores.

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x - y)(x^{(4-1)} + x^{(4-2)}y^{(4-3)} + x^{(4-3)}y^{(4-2)} + y^{(4-1)}) \\ &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \end{aligned}$$

Al observar las expresiones generales de la factorización de los binomios de las formas $x^n + y^n$ o $x^n - y^n$, y los ejemplos anteriores se concluye que:

- El primer factor tiene el mismo signo del binomio que se quiere factorizar.
- Cuando la operación es una adición, los signos del segundo factor se alternan entre positivo y negativo, empezando por positivo. Si es una sustracción, todos los signos del segundo factor son positivos.
- En el segundo factor, los exponentes del primer término van disminuyendo, mientras que los del segundo término van aumentando.

8.7 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Un **trinomio cuadrado perfecto** se factoriza como un binomio al cuadrado, así:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \qquad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ejemplo 10

Al calcular la longitud de los lados de un cuadrado de área es $a^2 + 14a + 49$:

1. Se hallan las raíces de los cuadrados perfectos a^2 y 49. Esas raíces son a y 7, respectivamente. $\quad \sqrt{a^2} = a ; \sqrt{49} = 7$

2. Se verifica que el doble producto de esas raíces es $14a$, que es el segundo término del polinomio. $\quad 2\,(a \cdot 7) = 14a$

3. Se factoriza la expresión y se obtiene $(a + 7)^2$. $\quad a^2 + 14a + 7 = (a^2 + 7)^2$

Por lo tanto, la longitud de cada lado del cuadrado es $(a + 7)$.

8.8 Factorización de trinomios cuadrados perfectos por adición y sustracción

Los **trinomios de la forma $a^2 \pm mab + b^2$**, con m distinto de 2, satisfacen parcialmente las características de los trinomios cuadrados perfectos. El primer y tercer términos son cuadrados perfectos, pero el segundo término no es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Para factorizar esos trinomios, se adiciona y se sustrae al trinomio dado un término de la forma nab, de manera que $mab + nab = \pm 2ab$. Si el trinomio original es factorizable, se obtiene la diferencia entre un trinomio cuadrado perfecto y un cuadrado perfecto, lo que finalmente es factorizado como diferencia de cuadrados.

Ejemplo 11

Para que el trinomio $9x^4 - 15x^2 + 1$ sea cuadrado perfecto, el segundo término debe ser $-6x^2$.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = 9x^4 - 15x^2 + 1 + (9x^2 - 9x^2)$ Se adiciona y sustrae $9x^2$.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = (9x^4 - 15x^2 + 1 + 9x^2) - 9x^2$ Se aplica la propiedad asociativa de la adición.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = (9x^4 - 6x^2 + 1) - 9x^2$ Se reducen términos semejantes.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = (3x^2 - 1)^2 - 9x^2$ Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto como un binomio al cuadrado.

$9x^4 - 15x^2 + 1 = [(3x^2 - 1) + 3x][(3x^2 - 1) - 3x]$ Se factoriza la diferencia de cuadrados.

8.9 Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ se sigue este procedimiento:

1. Se multiplica y se divide el polinomio por el coeficiente del primer término.

$$\frac{a}{a}(ax^{2n} + bx^n + c) = \frac{a^2x^{2n} + a(bx^n) + ac}{a}$$

2. Se expresa el numerador como un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

$$\frac{(ax^n)^2 + b(ax^n) + ac}{a}$$

3. Se factoriza la expresión del numerador como $(ax + p)(ax + q)$, donde $p + q = b$ y $pq = ac$.

$$\frac{(ax^n + p)(ax^n + q)}{a}$$

4. Cuando sea posible, se simplifica a.

Para el caso en el cual $a = 1$, el trinomio es de la forma $x^2 + bx + c$ y se factoriza de la misma manera.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 12

Para factorizar el polinomio $5x^2 + 6x + 1$ se puede proceder así:

a. Se multiplica el polinomio por $\frac{5}{5}$. $\qquad \frac{5^2x^2 + 5(6x) + 5}{5}$

b. Se expresa el numerador de la forma $y^2 + by + d$. $\qquad \frac{(5x)^2 + 6(5x) + 5}{5}$

c. Se buscan p y q, tales que $pq = 5$ y $p + q = 6$. $\qquad p = 5$ y $q = 1$

d. Se expresa el trinomio factorizado. $\qquad \frac{(5x+ 5)(5x+ 1)}{5}$

e. Si es posible, se saca factor común. $\qquad \frac{5(x+ 1)(5x+ 1)}{5}$

f. Se simplifica y se expresa el polinomio factorizado. $\qquad (x + 1)(5x + 1)$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Factoriza las expresiones hallando el factor común.

a. $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2 =$ ....

b. $8x^4 - 4x^3 + 6x^2 =$ ....

c. $2x^3 - 4x^4 + 2x^2 =$ ....

d. $5x^7 - 6x^6 + 3x^5 =$ ....

e. $5xy + 3x^2 - 2xy^2 =$ ....

f. $-15x^2ac^3 + 5xa^2c^2 =$ ....

g. $27a^3b^2c + 9ab^3c^2 =$ ....

h. $ax + x - 2a^2x^3 =$ ....

i. $abc + abc^2 =$ ....

j. $18ax + 9ay + 3a =$ ....

Razonamiento

2 Encuentra los términos que faltan en la factorización de cada polinomio.

a. $4m^3n - 2mn + 6m = \square\,(2m^2n - n + \square)$

b. $3x^2y + 6x^2y^2 + 9x^2 = \square\,(y + \square + \square)$

c. $4a^2 + \square + 20a^2b^2 = 4a\,(\square + 2b + \square)$

d. $3mn^2 + 5m^2n^2 + 10m^3n^2 = \square\,(3 + \square + 10m^2)$

e. $\square - 36ab + 6a = 2a\,(ab^2 - \square + \square)$

f. $14a^2x^2 - 7ax^3 + \square = 7ax^2\,(\square - \square + 4a)$

g. $4m^2 - 8m + 2 = \square\,(2m^2 - \square + \square)$

h. $24a^2b^2 - 36ab + \square = 6a\,(\square - 6b + 1)$

Ejercitación

3 Factoriza por agrupación de términos.

a. $ac - ad + bc - bd$

b. $3ax - ay + 9bx - 3by$

c. $18mx - 6my + 54nx - 18ny$

d. $4ax + ay + 12x^2 + 3xy$

e. $3xy - 3xz + 3x - y + z - 1$

4 Une con una línea cada polinomio con su respectiva factorización.

a. $xy - 4x + y - 4$	$(a + 1)(x - 2y)$
b. $a(n + 2) + (n + 2)$	$(x + 1)(y - 4)$
c. $-5x(a + c) + 2y(a + c)$	$(2 - 3z)(3x - 2y)$
d. $6x - 4y + 6yz - 9xz$	$(n + 2)(a + 1)$
e. $x(a + 1) - 2y(a + 1)$	$(a + c)(2y - 5x)$

Razonamiento

5 Factoriza el área de cada rectángulo y encuentra los polinomios que representan la medida de sus lados.

a.

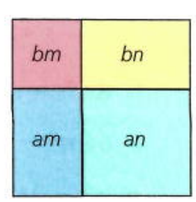


Figura 2.36

b.

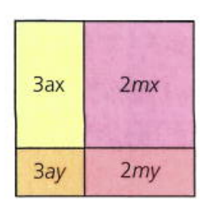


Figura 2.37

8 Factorización de polinomios

Ejercitación

6 Completa la factorización de cada diferencia de cuadrados.

a. $x^2 - 16 = (x + \quad)(x - \quad)$

b. $a^2 - 144 = (a + \quad)(a - \quad)$

c. $n^2 - 49 = (n + \quad)(n - \quad)$

d. $4a^2 - 100 = (2a + \quad)(2a - \quad)$

e. $9x^2 - 16 = (3x + \quad)(3x - \quad)$

f. $4m^2 - 81 = (2m + \quad)(2m - \quad)$

7 Factoriza las diferencias de cuadrados.

a. $16x^2 - 9y^2$

b. $144a^2 - 100b^2$

c. $400n^2 - 169m^2$

d. $144 - 9a^2$

e. $121 - x^4$

f. $4a^2b^4 - 121$

g. $25a^{12} - 100a^4b^{10}$

h. $9a^2 - 4x^2y^2z^4$

i. $225p^4 - 49a^4y^6z^8$

j. $144a^2m^6n^4 - 121x^{10}$

k. $100m^2 - 81a^2b^4$

l. $144a^2m^6n^4 - 4x^2y^2z^4$

Razonamiento

8 Escribe el signo $=$ o $\neq$ según corresponda.

a. $36m^4n^2 - 81p^8 \quad (6m^2n - 9p^4)(6m^2n + 9p^4)$

b. $121x^2 - 100 \quad (11x - 10)(11x + 10)$

c. $49z^2 - 400j^6 \quad (7z - 20j^3)(7z + 20j^3)$

d. $q^2 - r^2 \quad (2q - r)(2q + r)$

e. $a^4b^2 - 16 \quad (a^2b - 4)(a^2b - 4)$

Comunicación

9 Encuentra la expresión factorizada de cada binomio.

a. $x^3 + 216$

b. $a^3 + 8$

c. $n^3 + 512$

d. $y^3 + 343$

e. $m^3 + 1000$

f. $z^3 + 729$

g. $x^3 - 64y^6$

h. $1 - 125a^9y^9$

i. $1\,728x^6 - 343x^3y^6z^{12}$

j. $8x^{18} - 729y^3z\,15$

k. $27a^{21} - 1000b^3c^{12}$

l. $64m^9 - 216$

m. $(9y^2)^3 - (4z)^3$

n. $n^3 - 343x^3$

Razonamiento

10 Indica para cuáles binomios $2 - x$ es un factor.

a. $8 - x^3$

b. $125 + x^3$

c. $x^3 - 64$

d. $162 - 2x^3$

11 Indica para cuáles binomios $x + 3$ es un factor.

a. $x^2 + 9$

b. $x^4 - 81$

c. $x^3 - 27$

d. $x^5 + 243$

12 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (V). Justifica tus respuestas.

a. $512b^{18} + 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$

b. $512b^{18} - 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$

c. $216 + y^6 = (6 + y^2)(36y - 6y^2 + y^4)$

d. $216 - y^6 = (6 - y^2)(36 + 6y^2 + y^4)$

Ejercitación

13 Factoriza las expresiones dadas.

a. $x^8 - y^4$

b. $x^7 + 128$

c. $a^3 - b^3$

d. $m^5 - n^5$

e. $o^6 + 64q^6$

f. $32 - a^5$

g. $343c^3 - 27z^3$

h. $64 + m^3$

i. $o^6 - 64q^6$

j. $a^2 - b^2$

k. $1 - z^3$

l. $8t^3 + 64$

m. $x^{10} - 1$

n. $x^{15} + y^{15}$

ñ. $16x^4 + 81y^4$

o. $3\,125 - a^5$

Razonamiento

14 Analiza y escribe si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tus respuestas.

a. La suma de potencias con exponente par siempre es factorizable. ( )

b. La diferencia de potencias con exponente impar solo es factorizable cuando los exponentes son múltiplos de 3. ( )

c. La suma de potencias con exponente par no es factorizable. ( )

d. La diferencia de potencias con cualquier exponente es factorizable. ( )

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejercitación

15 Expresa cada trinomio como un binomio al cuadrado.

a. $x^4 + 6x^2 + 9 =$ ....

b. $x^6 - 4x^3 + 4 =$ ....

c. $y^8 - 2y^4z^3 + a^6 =$ ....

d. $a^{10} + 8a^5 + 16 =$ ....

e. $9a^2 - 12ab + 4b^2 =$ ....

f. $y^4 - 6y^2z + 9z^2 =$ ....

g. $16x^2 + 40xy^2 + 25y^4 =$ ....

Ejercitación

16 ¿Cuál es el polinomio que expresa el área de cada figura? Factorízalo.

a.

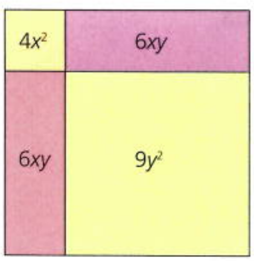


Figura 2.38

b.

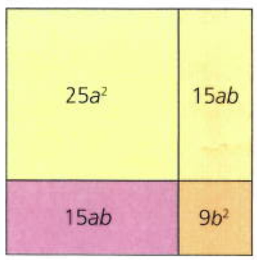


Figura 2.39

Comunicación

17 Factoriza cada trinomio como el producto del factor común y un trinomio cuadrado. Después, factoriza el trinomio cuadrado perfecto como un binomio cuadrado.

a. $6x^3 + 12x^2 + 6x$

b. $16x^5 - 48x^3 + 36x$

c. $3x^5 - 24x^4 + 48x^3$

d. $4x^3 + 40x^2 + 100x$

e. $7x^4 - 42x^3 + 63x^2$

18 Factoriza cada trinomio de la forma $a^2 + mab + b^2$ con m diferente de 2, por adición o sustracción.

a. $25a^2 + 54ab + 49b^2$

b. $121x^6 - 108x^3 + 4$

c. $64x^2 - 169xy + 81y^2$

d. $x^4 - 9x^2 + 16$

e. $x^8 - 3x^4 + 4$

f. $4x^4 - 29x^2 + 25$

g. $x^4 - 19x^2y^2 + 25y^4$

19 Une cada trinomio con su respectiva factorización.

a. $3a^2 + 8a + 5$	$2(a + 2)(3a + 5)$
b. $13a^2 - 7a - 6$	$(3a + 2)(7a - 1)$
c. $30a^2 + 17a - 21$	$(2a - 3)(4a + 5)$
d. $21a^2 + 11a - 2$	$(a + 1)(3a + 5)$
e. $6a^2 + 22a + 20$	$(6a + 7)(5a - 3)$
f. $8a^2 - 2a - 15$	$(13a + 6)(a - 1)$

20 Escribe V si la factorización es verdadera o F si es falsa.

a. $6m^2 + m - 15 = (3m + 5)(2m + 3)$ ( )

b. $8m^2 + 26m - 24 = (4m - 3)(m + 4)$ ( )

c. $10m^2 - 13m - 3 = (2m - 3)(5m + 1)$ ( )

d. $16m^2 + 8m + 1 = (4m + 1)(4m + 1)$ ( )

e. $6m^2 - m - 2 = (3m - 2)(2m + 1)$ ( )

Evaluación del aprendizaje

i Un centro vacacional diseñó un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar como $x^2 - 144$, ¿cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?

Figura 2.40

ii El polinomio que describe las utilidades de una empresa que fabrica vehículos de gama media corresponde al trinomio $5x^2 + 9x - 44$, donde x representa la cantidad de vehículos fabricados.

a. Factoriza la expresión.

b. ¿Para cuáles valores de la variable x las utilidades de la empresa son nulas?

9 Cocientes notables

Saberes previos

Escribe la expresión

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ como dos divisiones diferentes.

Analiza

La aceleración en la caída de un paracaidista, a cierta altura, puede calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$a = \frac{v^2 - 64}{v - 8}$$

En esta, a es la aceleración y v es la velocidad de la caída.

- ¿Cuál es la expresión relacionada con la aceleración?

Conoce

Para resolver la situación, se divide la expresión $v^2 - 64$ entre $v - 8$. Observa:

$$\begin{array}{rrr|l} v^2 & & -64 & v-8 \\ \cline{4-4} -v^2 & +8v & & v+8 \\ \cline{1-3} & +8v & -64 & \\ & -8v & +64 & \\ \cline{1-3} & & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, $(v^2 - 8^2) \div (v - 8) = (v + 8)$.

Luego la expresión relacionada con la aceleración a es $v + 8$.

Esta expresión cumple con una generalidad que se aplica a los cocientes que cumplen ciertas características. Este tipo de divisiones se conocen como **cocientes notables**.

Generalidades de los cocientes notables

Cuando se aplica el cociente de la suma o la diferencia de cuadrados entre la suma o la diferencia de sus raíces cuadradas, se cumple que:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \qquad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Ejemplo 1

Observa:

$$\frac{1 - m^4}{1 + m^2} = (1 - m^2)$$

Ejemplo 2

$$\frac{(x + y)^2 - z^2}{(x + y) - z} = (x + y) + z$$

Cuando se aplica el cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - a + b^2$$

Al aplicar el cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + a + b^2$$

Ejemplo 3

Los cocientes $\frac{64n^3 + m^3}{4n + m}$ y $\frac{64n^3 - m^3}{4n - m}$ son, respectivamente:

- $(4n)^2 - 4n(m) + m^2 = 16n^2 - 4nm + m^2$
- $(4n)^2 + 4n(m) + m^2 = 16n^2 + 4nm + m^2$

Cociente de la suma o diferencia de potencias iguales de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades.

Para los cocientes $\dfrac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$, se tiene lo siguiente:

a. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a - b$ para los valores pares o impares de n, así:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

b. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores pares de n. Observa:

$$\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}.$$

c. El polinomio $a^n + b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores impares de n, así:

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}.$$

Ejemplo 4

Al establecer el cociente de $\dfrac{x^5 - y^5}{x - y}$, se debe tener en cuenta que todos los signos del cociente son positivos $(+)$ y que el polinomio cociente es:

$$x^4 + x^3y^1 + x^2y^2 + x^1y^3 + y^4.$$

Ejemplo 5

Al hallar el cociente de $\dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$, se debe considerar que, en este caso, los términos del cociente tienen signos alternos empezando por el signo positivo.

Por lo tanto:

$$\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2} = x^4 - x^2y^2 + y^4$$

Ejemplo 6

Observa abajo el desarrollo de cada uno de estos cocientes:

a. $\dfrac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$ b. $\dfrac{x^{15} + y^{15}}{x^5 + y^5}$ c. $\dfrac{x^{12} - y^{12}}{x^4 - y^4}$

a. $x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 - x^3y^9 + y^{12}$

b. $x^{10} - x^5y^5 + y^{10}$

c. $x^8 + x^4y^4 + y^8$

9 Cocientes notables

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{1 - n^4}{1 + n^2}$ b. $\frac{9 - x^4}{3 - x^2}$

c. $\frac{x^3 - 1}{x + 1}$ d. $\frac{25 - 36x^4}{5 - 6x^2}$

e. $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$ f. $\frac{y^2 - x^2}{y + x}$

2 Desarrolla los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$ b. $\frac{x^{10} - m^{10}}{x^2 + m^2}$

c. $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$ d. $\frac{x^9 + y^9}{x^3 + y^3}$

e. $\frac{x^{18} + y^{18}}{x^9 + y^9}$ f. $\frac{1 + a^3}{1 + a}$

Comunicación

3 Explica con tus palabras cómo desarrollarías los cocientes notables que se muestran a continuación.

a. $\frac{1 - a^2b^4c^8}{1 - ab^2c^4}$ b. $\frac{(a + x)^2 - y^2}{(a + x) - y}$

c. $\frac{n^6 + 1^3}{n^2 + 1}$

4 Indica cuál es el cociente notable que se desarrolló en cada caso.

a. $\frac{8x^3 + 27y^3}{2x + 3y} = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

....

b. $\frac{n^6 + 1}{n^2 + 1} = n^4 - n^2 + 1$

....

c. $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$

....

d. $\frac{216 - 125y^3}{6 - 5y} = 25y^2 + 30y + 36$

....

e. $\frac{1 + a^3}{1 + a} = 1 - a + a^2$

Ejercitación

5 Completa las igualdades.

$\frac{y^4 + 16}{y + 2}$	$=$	
	$=$	$\frac{x^3 - 4}{x - 4}$
$\frac{3a^2 + 3^2}{2a - 3}$	$=$	
	$=$	$\frac{5m^4 + 625}{m + 5}$

Tabla 2.12

6 Resuelve las siguientes operaciones a partir de las reglas de los cocientes notables.

a. $\frac{a^3 + 2^3}{a + 2}$ b. $\frac{m^4 - n^4}{m - n}$

c. $\frac{216 + r^3}{6 + r}$ d. $\frac{64 - s^2}{8 - s}$

e. $\frac{p^6 - q^6}{p - q}$ f. $\frac{b^5 + 243}{b + 3}$

Razonamiento

7 Calcula el cociente notable en cada caso.

a. $\frac{x^{18} - y^{18}}{x^3 - y^3}$ b. $\frac{m^{27} + n^{27}}{m^3 + n^3}$

c. $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$ d. $\frac{27m^3 - 125n^3}{m^3 - n^3}$

8 Relaciona la columna A con la columna B.

Cociente notable	Resultado
$\frac{4x^2 - 121}{2x + 11}$	$\sqrt{3}a^{2x} + 3b^y$
$\frac{9a^4b^2 - 16a^2b^6}{3a^2b - 4ab^3}$	$3a^2b + 4ab^3$
$\frac{3a^{4x} - 9b^{2y}}{3b^y + \sqrt{3}a^{2x}}$	$2x - 11$
$\frac{a^3 - 27b^3}{3a - 9b}$	$\frac{1}{3}\,[a^2 + (a)(3b) + (3b)^2\,]$

Ejercitación

9 Completa la Tabla 2.13.

Cocientes notables	Cociente
$\dfrac{m^5 + n^5}{m + n}$	
	$a^4 + a^3n + a^2n^2 + an^3 + n^4$
$\dfrac{x^6 - y^6}{x - y}$	$x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
$\dfrac{64a^3 + 343}{4a + 7}$	
	$36 - 30y + 25y^2$
$\dfrac{8a^3 - 1}{2a - 1}$	
$\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$	

Tabla 2.13

Comunicación

10 Escribe el literal que le corresponde a cada ejemplo según la descripción.

$\dfrac{27x^6 + 1}{3x^2 + 1}$ $\dfrac{1 - v^{12}}{1 - v^6}$

$\dfrac{m^3 - 1}{1 + m}$ $\dfrac{1 - z^8}{1 + z^4}$

Cocientes notables
a. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
b. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades.
c. Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
d. Cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades.

Tabla 2.14

Razonamiento

11 Explica el error que se cometió en el desarrollo de cada cociente notable.

a. $\dfrac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$
$= x^{12} - y^{12}x^9 + y^6x^6 - y^9x^3 + y^{12}$

b. $\dfrac{x^4 + 1}{1 + x^2}$
$= x^2 + 1$

c. $\dfrac{8m^3 + n^6}{2m + n^2}$
$= 4m^2 + 2mn^2 + n^4$

Resolución de problemas

12 En física, la velocidad V se define como la distancia d recorrida por un móvil en la unidad de tiempo t. Así, $V = \dfrac{d}{t}$.

Si un auto recorre una distancia $d = x^7 - y^7$ en un tiempo $t = x - y$, ¿cuál es la expresión algebraica para su velocidad?

Evaluación del aprendizaje

Resuelve cada cociente notable y relaciona cada personaje con el hecho histórico que le corresponde.

a. François Viète $\dfrac{9 - n^4}{3 - n^2}$

b. John Napier $\dfrac{1 + m^3}{1 + m}$

c. Pierre Fermat $\dfrac{8m^3 - 1}{2m - 1}$

d. Arquímedes $\dfrac{m^2 - n^2}{m - n}$

Fundamentó la hidrostática.	$m + n$
Enunció la fórmula para las ecuaciones de sexto grado.	$3 + n^2$
Introdujo el punto decimal para separar las cifras decimales de los números enteros.	$1 - m - m^2$
Fue llamado *el primer cerebro del mundo* por Pascal.	$4m^2 + 2m + 1$

10 Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Saberes previos

¿Cual es el mínimo común múltiplo entre las siguientes expresiones $(x-1)$; $(x+1)$ y (x^2-1)?

Analiza

El ancho de la base de una caja esta representado por la expresión $\dfrac{5x+3}{x-1}$ y su largo por la expresión $\dfrac{6x+5}{x-1}$.

- Encuentra una expresión que represente el perímetro de la base de la caja.

Conoce

Para determinar la expresión que representa el perímetro de la base de la caja, se suman las fracciones algebraicas, así:

$$\frac{5x+3}{x-1} + \frac{6x+5}{x-1}$$

y luego el resultado se multiplica por 2.

Como las fracciones tienen el mismo denominador, se suman sus numeradores y se deja el mismo denominador. Esto es:

$$\frac{5x+3}{x-1} + \frac{6x+5}{x-1} = \frac{5x+3+6x+5}{x-1} = \frac{11x+8}{x-1}$$

Por lo tanto, el perímetro de la base de la caja está representado por la expresión $2\left(\dfrac{11x+8}{x-1}\right) = \dfrac{22x+16}{x-1}$

10.1 Operar fracciones algebraicas con igual denominador

Para **adicionar** o **sustraer dos fracciones algebraicas** con el **mismo denominador**, se adicionan o sustraen los numeradores y se deja el denominador común.

Ejemplo 1

Así se adicionan y sustraen fracciones algebraicas con igual denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+1} + \frac{5x+1}{x^2+1} = \frac{(3x-2)+(5x+1)}{x^2+1} = \frac{8x-1}{x^2+1}$$

La sustracción se realiza de forma análoga:

$$\frac{3x-2}{x^2+1} - \frac{5x+1}{x^2+1} = \frac{(3x-2)-(5x+1)}{x^2+1} = \frac{3x-2-5x-1}{x^2+1} = \frac{-2x-3}{x^2+1}$$

10.2 Operar fracciones algebraicas con distinto denominador

Para **adicionar** o **sustraer fracciones algebraicas con distinto denominador**, se reducen a común denominador.

Ejemplo 2

Para efectuar $\dfrac{7x-2}{x^2-1} - \dfrac{5x}{x+1}$ se buscan expresiones equivalentes con el mínimo común denominador.

$$\frac{7x-2}{x^2-1} + \frac{5x}{x+1} = \frac{7x-2}{(x+1)\cdot(x-1)} - \frac{5x}{x+1} =$$

$$\frac{7x-2}{(x+1)\cdot(x-1)} - \frac{(x-1)\cdot 5x}{(x+1)\cdot(x-1)} =$$

$$\frac{(7x-2)-(x-1)\cdot 5x}{(x+1)\cdot(x-1)} \quad \frac{7x-2-5x^2+5x}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{-5x^2+12x-2}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el mínimo común denominador en cada caso.

a. $\dfrac{4x-6}{x^2-6x-27}, \dfrac{x^4}{x^2-18x+81}$

b. $\dfrac{x^2+6}{4x-16}, \dfrac{5x^2}{x^2-16}, \dfrac{2x-7}{2x+8}$

2 Reduce cada grupo de fracciones algebraicas al común denominador. Compara respuestas con tus compañeros.

a. $\dfrac{x-1}{x+2}, \dfrac{x+1}{x-2}, \dfrac{3x}{x^2-2x-8}$

b. $\dfrac{x}{x-1}, \dfrac{8}{2x-3}, \dfrac{3x}{x+1}$

c. $\dfrac{2x+1}{x}, \dfrac{8-x}{x+4}$

d. $\dfrac{x+8}{x-3}, \dfrac{11}{4x^2}, \dfrac{x^2+7}{x}$

3 Efectúa cada operación

a. $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x+1}{x+2} + \dfrac{1}{x^2-4}$

b. $\dfrac{1}{3x^2-3} - \dfrac{2}{2x+2} + \dfrac{x+5}{x+1}$

c. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3x-1}{x-3}$

d. $\dfrac{7x+3}{x-4} + \dfrac{5x}{x^2-16}$

e. $\dfrac{2x}{x-5} - \dfrac{x+2}{x-1}$

Razonamiento

4 Determina si las operaciones son correctas o no.

a. $\dfrac{11x}{x+1} - \dfrac{2x+4}{x+1} = \dfrac{13x-4}{x+1}$

b. $\dfrac{x^2+3}{x^2+2x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+4}{(x+1)^2}$

c. $\dfrac{11x}{x+1} - \dfrac{2x+4}{x+1} = \dfrac{13x+4}{x+1}$

d. $\dfrac{x^2+3}{x^2+2x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2}$

e. $\dfrac{1-x}{x^2+1} - \dfrac{x+9}{x-1} = \dfrac{10}{x^3+1}$

Resolución de problemas

5 Halla el perímetro de cada figura.

a.

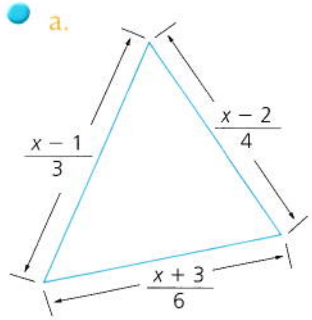


Figura 2.41

b.

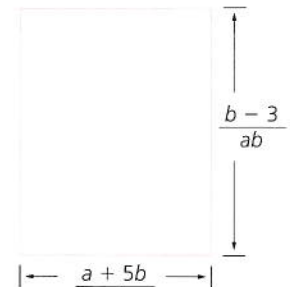


Figura 2.42

Evaluación del aprendizaje

Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El resultado de sumar o restar fracciones algebraicas del mismo denominador es otra fracción con denominador igual al de las fracciones que se operan. ( )

b. Para adicionar o sustraer fracciones algebraicas con distinto denominador, se sustraen numeradores y denominadores. ( )

c. Para adicionar o sustraer fracciones algebraicas con igual denominador, se sustraen numeradores y denominadores. ( )

d. Para adicionar o sustraer fracciones algebraicas con distinto denominador, se sustraen solo numeradores y se deja el denominador común. ( )

Educación ambiental

La producción de partículas contaminantes en un día normal puede ser de $\dfrac{3x}{(3+x)}$ toneladas, mientras que en un día sin carro es de $\dfrac{(3x+3)}{2(x+2)}$. ¿Cuál es la diferencia en la producción de contaminantes entre los dos días?, ¿es importante participar en el día sin carro?

11 Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Saberes previos

Sofía afirma que al simplificar en los numeradores y en los denominadores de la siguiente expresión el resultado es $x^2 - 1$. ¿Es correcta la afirmación de Sofía?

$$\frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1)}{(x + 1)(x - 1)(x + 1)}$$

Analiza

Las dimensiones de una caja de cartón para empacar resmas de papel se muestran en la Figura 2.43.

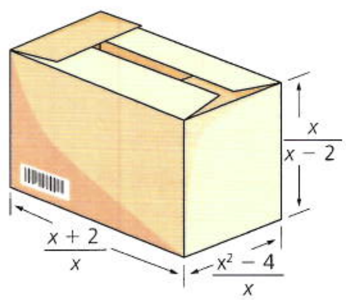


Figura 2.43

- ¿Cuál es el volumen de la caja?

Conoce

Para calcular el volumen de la caja, se multiplican sus tres dimensiones. Es decir:

Largo Ancho Alto

$$\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x}{x-2}$$

$$= \frac{x+2}{x} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x} \cdot \frac{x}{x-2}$$ Se factorizan completamente los términos de las fracciones.

$$= \frac{x+2}{x} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x} \cdot \frac{x}{x-2}$$ Se simplifican los factores comunes en los numeradores y denominadores.

$$= \frac{x+2}{x} \cdot \frac{x+2}{1} \cdot \frac{1}{1}$$

$$= \frac{x^2+4x+4}{x}$$ Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

Por lo tanto, el volumen de la caja es $\frac{x^2+4x+4}{x}$.

11.1 Multiplicación de fracciones algebraicas

El **producto de dos fracciones algebraicas** es otra fracción que tiene por numerador el **producto de los numeradores** y por denominador el **producto de los denominadores**. Es decir, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones algebraicas, entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

11.2 División de fracciones algebraicas

La **división de dos fracciones algebraicas** es equivalente a la multiplicación del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Es decir, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones algebraicas, entonces:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo

Halla el resultado de $\frac{x+5}{3x} \cdot \frac{x^2}{x+5}$ y de $\frac{x+5}{3x} \div \frac{x^2}{x+5}$.

En la multiplicación, el numerador de la primera fracción es igual al denominador de la segunda $(x + 5)$. Por lo tanto, se pueden simplificar y se obtiene:

$$\frac{x+5}{3x} \cdot \frac{x^2}{x+5} = \frac{1}{3x} \cdot \frac{x^2}{1} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}$$

En la división, se multiplica por la fracción recíproca de la segunda fracción, así:

$$\frac{x+5}{3x} \div \frac{x^2}{x+5} = \frac{x+5}{3x} \cdot \frac{x+5}{x^2} = \frac{(x+5)^2}{3x^3}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Simplifica y resuelve cada operación.

a. $\dfrac{x+6}{x} \cdot \dfrac{x^2}{x^2-36} =$

b. $\dfrac{2x+2y}{3x-3y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{4x+4y} =$

c. $\dfrac{x^2-y^2}{3x} \cdot \dfrac{3x^2}{5x-5y} =$

d. $\dfrac{2a^2-3a-2}{6a+3} \cdot \dfrac{3a+6}{a^2-4} =$

e. $\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-6x-16} \cdot \dfrac{x^2-8x+15}{x^2+9x+14} =$

2 Encuentra la fracción recíproca o el inverso multiplicativo de cada expresión.

Fracción	Fracción recíproca
$\dfrac{1}{a}$	
$\dfrac{2+x}{x-1}$	
$\dfrac{5x^2-3}{2x-3}$	
$\dfrac{7-x^2}{4+8x}$	
$\dfrac{6}{2x^3+1}$	

Tabla 2.15

3 Calcula el resultado de las operaciones.

a. $\dfrac{x^2+6x+9}{x-1} \div \dfrac{x^2-9}{x^2-1} =$

b. $\dfrac{x^2-121}{x^2-49} \div \dfrac{x-11}{x+7} =$

c. $\dfrac{3}{x^2-x-30} \div \dfrac{6}{x^2+x-42} =$

4 Justifica cada paso del siguiente proceso.

$$\frac{2y^2+2y}{2y^2} \cdot \frac{y^2-3y}{y^2-2y-3} =$$

$$\frac{2y(y+1)}{2y^2} \cdot \frac{y(y-3)}{(y-3)(y+1)} =$$

$$\frac{y+1}{y} \cdot \frac{y}{y+1} = 1$$

Resolución de problemas

5 El volumen V de una pirámide equivale a un tercio del área de la base A_B por su altura h. Es decir, $V = \dfrac{1}{3}A_Bh$.

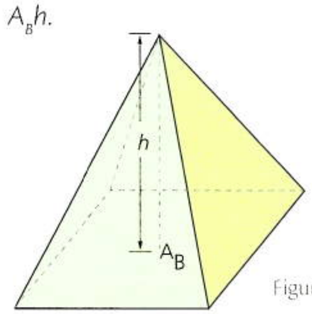


Figura 2.44

Calcula el área de la base A_B de cada pirámide, considerando su volumen V y su altura h.

a. $V = \dfrac{m^2-9}{4m+12}$ $\quad h = \dfrac{m-3}{6}$

b. $V = m^2-49$ $\quad h = m-7$

c. $V = \dfrac{m^2+8m}{2m}$ $\quad h = \dfrac{m}{3}$

d. $V = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$ $\quad h = \dfrac{1}{2x}$

Evaluación del aprendizaje

i Escribe en cada caso el signo $=$ o $\neq$, según corresponda.

a. $\dfrac{2x+6}{x+1} \cdot \dfrac{x^2+3x+2}{4x^2+12x}$ $\boxed{}$ $\dfrac{x+2}{2}$

b. $\dfrac{5m+25}{14} \cdot \dfrac{7m+7}{10m+50}$ $\boxed{}$ $\dfrac{m-1}{4}$

c. $\dfrac{2a^2+a}{6} \cdot \dfrac{8}{4a+2}$ $\boxed{}$ $\dfrac{2a}{3}$

d. $\dfrac{2y^2+2y}{2y^2} \cdot \dfrac{y^2-3y}{y^2-2y-3}$ $\boxed{}$ -1

ii Completa los recuadros para que se cumpla la igualdad.

a. $\left(x+\dfrac{x}{2}\right) \div \boxed{} = 2$

b. $\left(a-4\dfrac{4}{a}\right) \div \boxed{} = a-2$

Practica más

Expresiones algebraicas

Resolución de problemas

1 Halla la expresión algebraica que determine el perímetro de cada figura.

a.

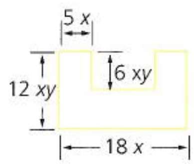


Figura 2.45

b.

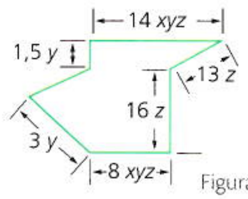


Figura 2.46

c.

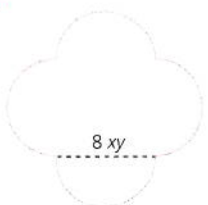


Figura 2.47

d.

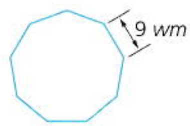


Figura 2.48

Ejercitación

2 Evalúa cada expresión para hallar el área o el volumen de las Figuras 2.49 y 2.50, según se indique.

a. $x = 2, y = 5$ b. $a = 3, b = 4$

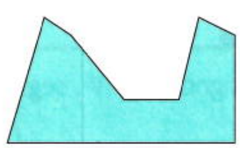


Figura 2.49

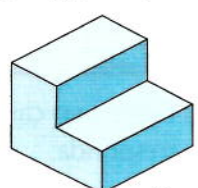


Figura 2.50

Área $= 3x^2 + 2xy^3 + y$ Volumen $= 2a^3b^2 + 5b^3$

Polinomios

3 Relaciona los monomios semejantes que hay en las columnas A y B.

Columna A	Columna B
a. $-2xy^3$	1. πx^3y^3
b. $12x^3y^3$	2. xyz^3
c. $-7xy^3z$	3. $12xy^3z^2$
d. $\frac{1}{4}xyz^3$	4. $-2xy^3z$
e. $-2xy^3z^2$	5. $0{,}5xy^3$

4 Indica los coeficientes, la parte literal y el grado de cada polinomio.

a. $-\sqrt{2}a^2b - \frac{3}{5}a^2b^3 - \pi b^2$

b. $-x^2y + \frac{2}{5}xy^3 + 4y^3 + 7xy$

c. $a^2 + 0{,}5a^2b^3 - \sqrt{2}b^2$

Adición y sustracción de polinomios

Ejercitación

5 Según los polinomios dados, realiza las operaciones.

A: $2a^2 + a^2b^3 - 5a^3b^2 + b^2$

B: $5a^2b^3 + 8a^3b^2 + 12b^2$

C: $-7a^2 + 7a^2b^3 - 7b^2$

a. $A + B$ b. $(A + C) - B$ c. $(B - C) - A$

Resolución de problemas

6 Halla el polinomio A faltante para que se cumpla la igualdad en cada caso.

a. $2a^2 + a^2b^3 + A = 8a^2 - 15a^2b^3 - 6a^3b^2$

b. $-3x^2y + 2xy^3 - A = x^2y + 6xy^3 - 2xy$

c. $A + 5k^2lm^4 + k^4 - 2km = 12k^4 + 5km$

7 Halla la expresión algebraica que determina el área de la región sombreada.

a.

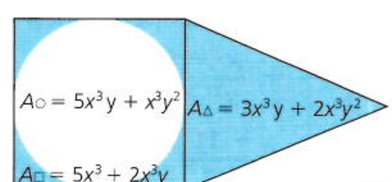


Figura 2.51

Factorización

Ejercitación

8 Factoriza las siguientes expresiones en tres factores.

a. $2a^8 - 2$

b. $2ax^2 - 4ax + 2a$

c. $x^5 - x$

d. $ax^3 + 10\,ax^2 + 25ax$

e. $am^3 - 7am^2 + 12am$

f. $x^4 - (a + 2)^2$

Resolución de **problemas**

Estrategia: Hacer cálculos parciales

Problema

Calcula el área total de la Figura 2.52.

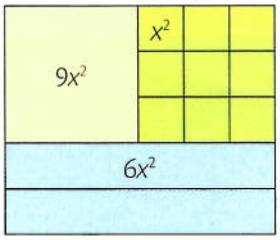


Figura 2.52

1. Comprende el problema

- ¿Cómo está compuesta la figura?

  R: La figura está compuesta por un cuadrado, nueve cuadrados pequeños y dos rectángulos.

- ¿Qué se debe averiguar?

  R: El área total de la figura.

2. Crea un plan

- Calcula el área de cada una de las figuras que conforman el rectángulo y después súmalas para obtener el área total.

3. Ejecuta el plan

- El área del cuadrado es $9x^2$. (Figura 2.53)

Figura 2.53

- Cada cuadrado pequeño tiene un área de x^2.

  Como son nueve, su área es $9x^2$. (Figura 2.54)

Figura 2.54

- Los dos rectángulos tienen igual área. Cada una mide $6x^2$ y, así, el área de los dos rectángulos es $12x^2$. (Figura 2.55)

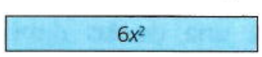


Figura 2.55

  Por lo tanto, el área del rectángulo de la Figura 2.44 es $9x^2 + 9x^2 + 12x^2$.

  R: El área total del rectángulo es $30x^2$.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que en el rectángulo caben exactamente 30 cuadrados verdes.

Aplica la estrategia

1 Observa la Figura 2.56.

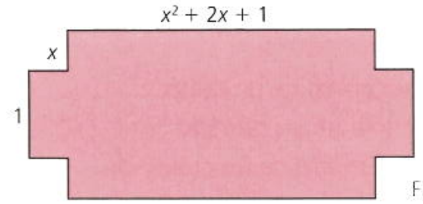


Figura 2.56

¿Qué expresión corresponde a su perímetro?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2 Un arquitecto diseña los jardines interiores de un conjunto residencial en forma de rectángulos que tienen de largo el triple del ancho. ¿Qué expresión determina el perímetro de uno de ellos?

Formula problemas

3 **Inventa** un problema que involucre la información de la Figura 2.57 y resuélvelo.

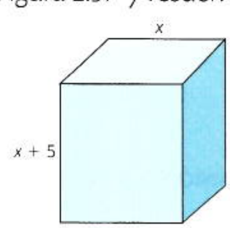


Figura 2.57

Enriquece tu vocabulario

- Averigua si los vocablos *área* y *superficie* son sinónimos.

Evaluación del aprendizaje

Expresiones algebraicas

Ejercitación

1 Relaciona cada expresión con la forma algebraica que la representa. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. El volumen de un cubo. $4x$
b. El triple de un número. $4x + 2$
c. El perímetro de un cuadrado. $3x$
d. El doble de un número impar. x^3

Polinomios

Razonamiento

2 Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F), según corresponda. VERDADERO / FALSO

a. El grado absoluto de un polinomio puede ser igual a cero. ( )
b. Si el grado absoluto de un polinomio es dos, entonces la expresión tiene dos variables. ( )
c. El grado relativo con relación a una variable es el mayor exponente de dicha variable. ( )
d. El grado absoluto de un polinomio es igual a la suma de los grados relativos de sus variables. ( )
e. El término independiente de un polinomio es el término de grado cero. ( )

Adición y sustracción de polinomios

Comunicación

3 Selecciona el polinomio que representa el área de la región sombreada. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

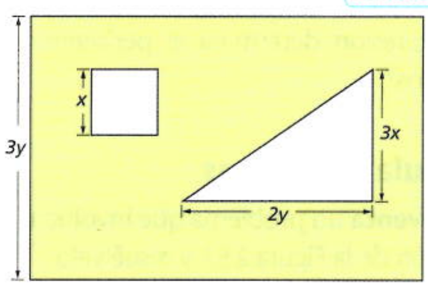


Figura 2.58

a. $-12y$
b. $12xy - x^2$
c. $18xy - x^2$
d. $2x - y - x^2$

Razonamiento

4 Indica la expresión que falta en la sustracción. ACTIVIDAD DE REFUERZO

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -(2x + 8y + 1) \\ \hline 3x - 9y + 3 \end{array}$$

a. $x - 17y + 2$
b. $x - y + 2$
c. $-x - y + 4$
d. $5x - y + 4$

Multiplicación de polinomios

Modelación

5 Halla una expresión para determinar el área del polígono. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

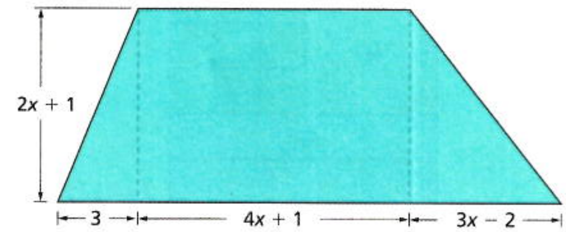


Figura 2.59

Productos notables

Razonamiento

6 Determina y elige el factor que hace válida la igualdad. ACTIVIDAD DE REFUERZO

$$(4z - w)\boxed{} = 16z^2 - 8zw + w^2$$

a. $4z - w$
b. $4z + w$
c. $4z - 8 + w$
d. $4z + 8 + w$

Razonamiento

7 ¿Se puede afirmar que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$? Explica tu respuesta. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

División de polinomios

Razonamiento

8 Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $27x^3 - 8$ es divisible entre $3x - 2$. ( )
b. $x - 1$ es divisor de $(x + 1)^2$ ( )
c. $x + 2$ es divisor de $x^2 - 6x - 16$ ( )
d. $x^3 + 3x^2 - 1$ es divisible entre $x - 1$ ( )
e. $2x^2 + 3xy$ es divisible entre x^2 ( )

Modelación

9 Determina una de las dimensiones del rectángulo, teniendo en cuenta que su área es igual a $2x^2 + 4x + \frac{3}{2}$ ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

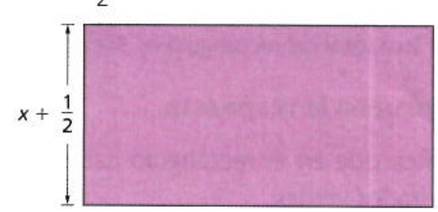


Figura 2.60

Regla de Ruffini

Ejercitación

10 Determina la dimensión que falta en la base de la caja si el área es $x^3 + x^2 - x - 1$. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

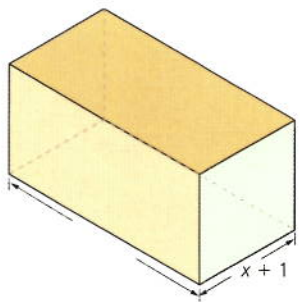


Figura 2.61

Factorización de polinomios

11 Calcula el área de cada figura y escribe con las expresiones obtenidas una adición. Luego, factorízala. ACTIVIDAD DE REFUERZO

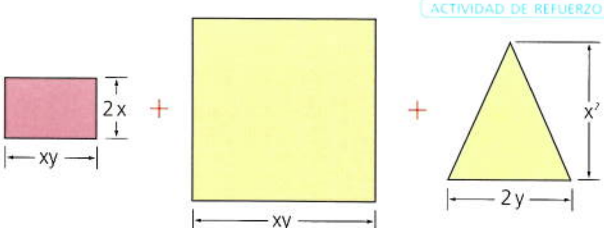


Figura 2.62

12 Relaciona cada factorización con la diferencia de cuadrados que le corresponde. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $(7x + 6)(7x - 6)$	$121x^2 - 169$	◯
b. $(2x + 10)(2x - 10)$	$m^2 - 36$	◯
c. $(6x + 4)(6x - 4)$	$49x^2 - 36$	◯
d. $(11x + 13)(11x - 13)$	$4x^2 - 100$	◯
e. $(m + 6)(m - 6)$	$36x^2 - 16$	◯
f. $(8m + 6)(8m - 6)$	$64m^2 - 36$	◯

Resolución de problemas

13 Los polinomios expresan el área de cada cuadrado. Factorízala y escribe las dimensiones en cada figura.

a. $9x^2 + 6x + 1$ b. $4x^2 + 12x + 9$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

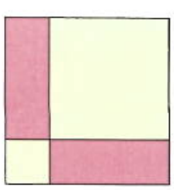


Figura 2.63

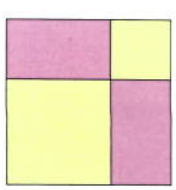


Figura 2.64

Comunicación

14 Completa los espacios en blanco para que las factorizaciones sean correctas. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. $4x^4 + 8x^2 + 3 = (\square + 3)(\square + 1)$

b. $2x^4 + 5x^2 + 3 = (2x^2 + \square)(x^2 + \square)$

c. $3x^6 - x^3 - 2 = (x^3 \square 1)(3x^3 \square 2)$

d. $8x^8 - 10x^4 + 3 = (\square - \square)(2x^4 \square 1)$

e. $7x^2 + 22x + 3 = (\square + 3)(\square + \square)$

f. $3x^2 + 8x - 3 = (x \square 3)(\square - 1)$

g. $2x^2 + 11x + 15 = (2x + \square)(x \square 3)$

h. $6x^2 + 53x + 40 = (\square + 5)(\square + \square)$

Cocientes notables

Comunicación

15 Selecciona la expresión que representa el cociente de $\dfrac{(243m^5 - 32n^5)}{(3m - 2n)}$. Justifica tu elección. CUESTIONARIO

a. $3m^4 + 6m^3n + 6m^2n^2 + 6mn^3 + 2n^4$

b. $81m^4 + 18m^3n + 24m^2n^2 + 18mn^3 + 16n^4$

c. $81m^4 + 18m^3n + 36m^2n^2 + 18mn^3 + 16n^4$

d. $81m^4 + 54m^3n + 36m^2n^2 + 24mn^3 + 16n^4$

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Ejercitación

CUESTIONARIO

16 Selecciona la opción correcta.

Al efectuar la suma $\dfrac{3 + x}{x} + \dfrac{x}{3 - x}$ se obtiene:

a. $\dfrac{9 - 2x^2}{x(3 - x)}$ b. $\dfrac{9 + 2x^2}{x(3 - x)}$

c. $\dfrac{9}{x(3 + x)}$ d. $\dfrac{9}{x(3 - x)}$

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

Resolución de problemas

17 Determina una expresión que permita calcular el volumen del siguiente prisma. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

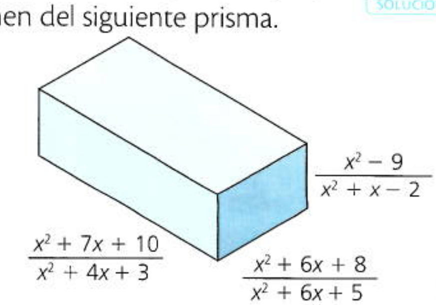
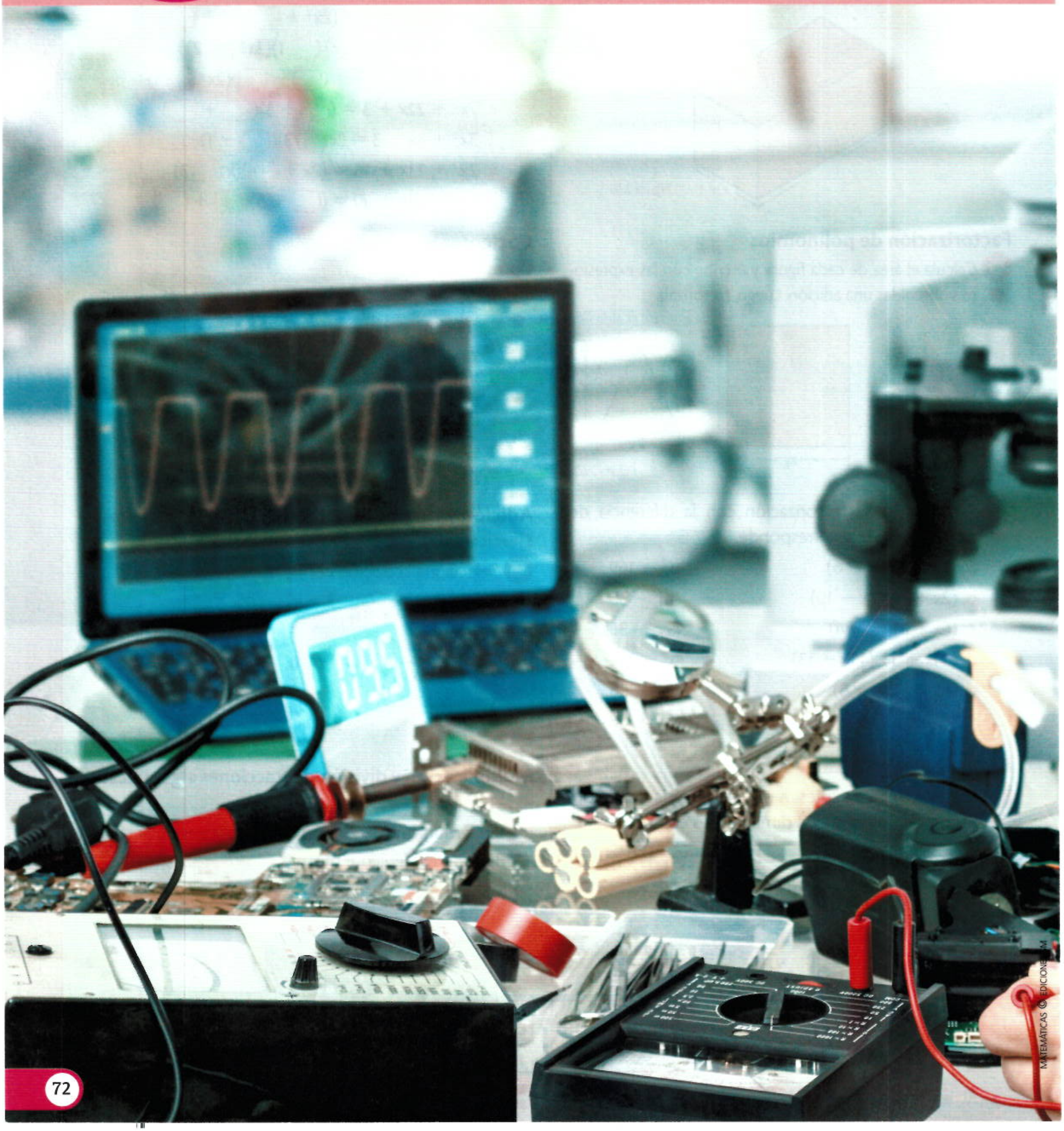


Figura 2.65

3 Ecuaciones y funciones



Ya sabemos

- Traducir expresiones del lenguaje común al lenguaje matemático.

Vamos a aprender

- A resolver ecuaciones de primer grado.
- A analizar propiedades generales de las funciones.

Nos sirve para

- Dar solución a situaciones cotidianas utilizando el planteamiento de ecuaciones como estrategia.

1 Ecuaciones

Saberes previos

Reúnete con un compañero. Recuerden en qué consiste hallar el valor numérico de una expresión algebraica y luego apliquen su procedimiento para calcular el valor de la expresión $(2x + 3) - (8 - x)$ para los valores dados.

- $x = -2$
- $x = 3$
- $x = -0,5$
- $x = \sqrt{2}$

Analiza

Una igualdad compara dos expresiones matemáticas mediante el signo igual (=). Observa estas igualdades:

$$5 + 4 = 9$$

$$x + 5 = 7 - x$$

- Clasifica cada igualdad según sea numérica o algebraica.

Conoce

1.1 Igualdades y ecuaciones

Las igualdades pueden ser **numéricas** si solamente comparan números relacionados mediante las operaciones, o **algebraicas** si comparan expresiones que combinan cantidades numéricas y literales. Estas últimas se conocen como **ecuaciones**.

De acuerdo con lo anterior, la igualdad $5 + 4 = 9$ es numérica, mientras que la igualdad $x - 5 = 7 - x$ es algebraica.

Las **soluciones de una ecuación** son los valores que pueden tomar las incógnitas, de manera que al sustituirlos en la ecuación se satisface la igualdad.

Ejemplo 1

Analiza las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a. $7x = 56$ es una ecuación que tiene una única solución: $x = 8$.

b. $2x^2 = 18$ tiene dos soluciones. Como $x^2 = 9$, entonces $x = 3$ o $x = -3$.

c. $2x - x = 12 + x$ no tiene solución, ya que al reducir términos semejantes se obtiene $0 = 12$, que no corresponde a una igualdad verdadera.

d. $5x + 1 - 3x = 2x + 1$ es una ecuación que representa una identidad, ya que al reducir términos semejantes se obtiene la siguiente igualdad: $2x + 1 = 2x + 1$.

1.2 Ecuaciones equivalentes

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Para obtener una ecuación equivalente a otra dada, se aplican estas propiedades:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta el mismo número o una misma expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente.
- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un número distinto de 0, se obtiene otra ecuación equivalente.

Ejemplo 2

Las ecuaciones $3x + 10 = 25$ y $5x = 25$ son equivalentes, pues ambas tienen como solución el valor $x = 5$. Observa:

$$3 \cdot (5) + 10 = 25 \qquad\qquad 5 \cdot (5) = 25$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

Resuelve $5x + 22 = 2x + 49$ hallando ecuaciones equivalentes.

Para llegar a la solución de la ecuación mediante un razonamiento lógico, se aplican las propiedades estudiadas. Entonces:

$5x + 22 = 2x + 49$ ← Se parte de la ecuación dada.

$5x + 22 - 22 = 2x + 49 - 22$ ← Se resta 22 a los dos miembros.

$5x = 2x + 27$ ← Se realizan las operaciones.

$5x - 2x = 2x - 2x + 27$ ← Se resta $2x$ a los dos miembros.

$3x = 27$ ← Se reducen términos semejantes.

$\left(\frac{1}{3}\right)(3x) = \left(\frac{1}{3}\right)(27)$ ← Se multiplican por $\frac{1}{3}$ los dos miembros.

$x = 9$ ← Se simplifica y se obtiene la solución.

Las ecuaciones $5x = 2x + 27$ y $3x = 27$ son equivalentes a la ecuación dada y, por lo tanto, tienen la misma solución: $x = 9$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Clasifica estas igualdades según sean numéricas o algebraicas.

a. $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

b. $\frac{1}{5}x + 4y = -11$

c. $-7 - 18 = 25(-3 + 2)$

d. $23 + (-12) + 5 = -15(-7 + 5)$

e. $5x - 9 = 29 - 6x$

2 Identifica y marca con una X la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $y - 5 = 3y - 25$

8	10	15	20

b. $5x + 6 = 10x + 5$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

c. $9y - 11 = -10y + 12y$

$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$

3 Observa la Figura 3.1. Luego, contesta la pregunta.

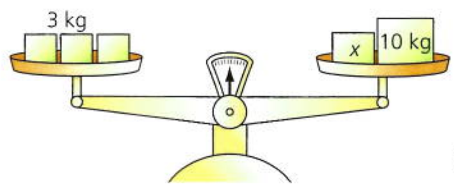


Figura 3.1

¿La balanza está en equilibrio? Si no es así, propón una manera de conseguir que lo esté.

Resolución de problemas

4 Juan pagó \$ 90 000 por seis entradas para cine. Escribe una expresión que permita determinar cuánto pagó por cada entrada.

Evaluación del aprendizaje

Realiza las transformaciones indicadas en la ecuación $3(6 - x) - (2 + x) = 0$.

a. Aplica la propiedad distributiva.

b. Realiza las operaciones.

c. Suma el término $4x$ a los dos lados de la igualdad.

d. Divide entre 4 los dos miembros de la igualdad.

e. Determina: ¿cuál es la solución?

2 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Saberes previos

En cada caso, halla un número que cumpla la igualdad.

- $-4 + \square = 19$
- $16 + \square = -25$
- $\square - 14 = 40{,}8$

Analiza

En la Figura 3.2 se observa que $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ son ángulos internos del $\triangle ABC$.

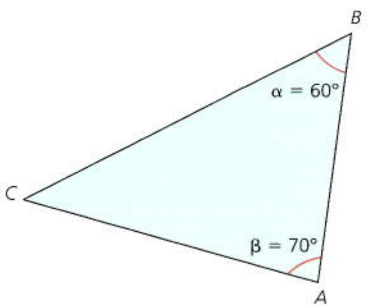


Figura 3.2

- Escribe una ecuación que permita calcular la medida del $\measuredangle C$. ¿Qué características tiene esta ecuación?
- ¿Qué nombre reciben este tipo de ecuaciones?

Conoce

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°. Como en el $\triangle ABC$ de la Figura 3.2 la suma de los ángulos A y B es igual a 130°, entonces para calcular la medida del $\measuredangle C$ se puede plantear una ecuación como la siguiente.

$$\underbrace{x}_{\text{Medida del } \measuredangle C} + \underbrace{130°}_{\text{Suma de las medidas de } \measuredangle A \text{ y } \measuredangle B} = 180°$$

Se observa que, en la ecuación $x + 130° = 180°$, el lado izquierdo es un polinomio en x de grado 1. A este tipo de ecuaciones se les denomina *ecuaciones de primer grado con una incógnita* o *ecuaciones lineales*.

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** (también llamada **ecuación lineal**) es una expresión de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales y el exponente de la incógnita x es 1.

Estos son algunos ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

$$3x + 2 = 5 \qquad p - \frac{46}{5} = 52 \qquad w - (-128) = \sqrt{2}$$

El exponente de las incógnitas x, p y w es, respectivamente, 1.

2.1 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita se resuelve transformándola en ecuaciones equivalentes hasta despejar la incógnita.

Ejemplo 1

Un bebé recién nacido tiene 300 huesos; esto es, 94 más que en la edad adulta, cuando algunos se fusionan.

Para calcular la cantidad de huesos que tiene un adulto, se puede modelar la situación mediante una ecuación de primer grado con una incógnita.

Si x representa la cantidad de huesos de un adulto, $x + 94 = 300$.

El proceso para resolver la ecuación es el siguiente:

$$x + 94 = 300$$

$$x + 94 + (-94) = 300 + (-94)$$ ← Se suma el opuesto de 94 en ambos miembros de la igualdad.

$$x = 206$$ ← Se efectúan las operaciones indicadas.

Se verifica que el valor $x = 206$ es la solución de la ecuación:

$$x + 94 = 300 \qquad 206 + 94 = 300 \qquad 300 = 300$$

Ejemplo 2

El perímetro de la cancha de voleibol que se muestra en la Figura 3.3 es x.

Si la medida del ancho es 9 m y esta equivale a la sexta parte del perímetro, la expresión que relaciona estos datos se puede representar mediante la siguiente ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\frac{1}{6}x = 9$$

En este caso, la solución se obtiene como sigue:

$$\frac{1}{6}x = 9$$

$$6 \cdot \frac{1}{6}x = 9 \cdot 6$$ ← Se multiplican los dos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{6}$.

$$x = 54$$ ← Se despeja la incógnita y se obtiene su valor.

Por lo tanto, el perímetro de la cancha de voleibol es 54 m.

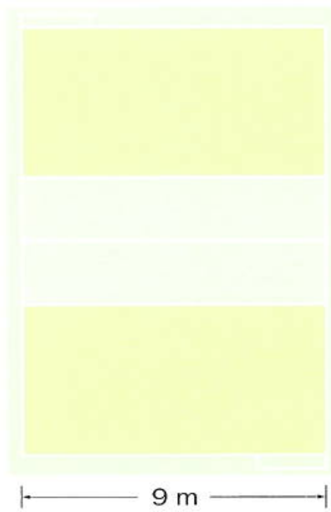


Figura 3.3

2.2 Ecuaciones de primer grado con la incógnita en más de un término

Si una **ecuación** tiene la **incógnita en más de un término**, se reducen términos semejantes hasta obtener una ecuación de la forma $ax + b = c$.

Ejemplo 3

Para resolver la ecuación $x + x + 1 = 11$, se procede de esta forma:

$$x + x + 1 = 11$$

$$x + x = 11 - 1$$ ← Se agrupan las incógnitas y los términos independientes.

$$2x = 10$$ ← Se reducen los términos semejantes.

$$x = 5$$ ← Se simplifica dividiendo entre 2.

2.3 Ecuaciones de primer grado con paréntesis

Para **eliminar los paréntesis de una ecuación**, se aplica la propiedad distributiva. Si antes del paréntesis no hay un coeficiente, se considera que este es 1.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $4(x + 2) - 7(x - 2) = x + 6$.

$$4(x + 2) - 7(x - 2) = x + 6$$ ← Se parte de la ecuación.

$$4x + 8 - 7x + 14 = x + 6$$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$$-3x + 22 = x + 6$$ ← Se reducen los términos semejantes.

$$22 = 4x + 6$$ ← Se adiciona $3x$ en ambos miembros de la ecuación.

$$x = 4$$ ← Se sustrae 6 en ambos miembros, se transponen términos y se simplifica dividiendo entre 4.

Ejemplo 5

Pasos para resolver la ecuación $-\frac{2}{5}(10x - 5) + 6 = 4(x - 2)$.

$-\frac{2}{5}(10x - 5) + 6 = 4(x - 2)$ ← Se parte de la ecuación dada.

$-4x + 2 + 6 = 4x - 8$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$-4x + 8 = 4x - 8$ ← Se simplifican términos semejantes.

$-8x = -16$ ← Se suman $-4x$ y -8 en ambos miembros de la igualdad y se reducen términos semejantes.

$x = 2$ ← Se divide entre -8 en ambos miembros de la igualdad.

2.4 Ecuaciones de primer grado con denominadores

Para **eliminar los denominadores de una ecuación**, se multiplican los dos miembros de esta por un múltiplo común de los denominadores. La ecuación equivalente más sencilla se obtiene al multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

Ejemplo 6

Para resolver la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 30$, el primer paso es obtener una ecuación equivalente sin denominadores.

Esto se consigue multiplicando la ecuación por cualquier múltiplo común de los denominadores: 12, 24, 36, 48, … Entonces:

$\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 30$ ← Se parte de la ecuación dada.

$\frac{12x}{2} + \frac{36x}{4} - \frac{60x}{6} = 360$ ← Se multiplica, por ejemplo, por 12 en ambos miembros de la igualdad.

$6x + 9x - 10x = 360$ ← Se simplifican las fracciones.

$5x = 360$ ← Se reducen términos semejantes.

$x = 72$ ← Se simplifica dividiendo entre 5 ambos términos.

Ejemplo 7

Resuelve la ecuación $\frac{x + 1}{3} + \frac{x + 2}{7} = 2$.

$\frac{x + 1}{3} + \frac{x + 2}{7} = 2$ ← Se parte de la ecuación original.

$21\left(\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{7}\right) = 21 \cdot 2$ ← Se multiplican por 21 ambos miembros de la igualdad.

$7(x + 1) + 3(x + 2) = 42$ ← Se simplifican los denominadores.

$7x + 7 + 3x + 6 = 42$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$10x = 29$ ← Se reducen términos semejantes.

$x = \frac{29}{10}$ ← Se dividen ambos lados de la igualdad entre 10.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve cada ecuación.

a. $7x - 15 = 20$

b. $-5x - 8 = 12$

c. $4x - 10 = 26$

d. $-6x - 18 = 10$

Comunicación

2 Obtén una ecuación de la forma $ax + b = c$, con a, b y c números reales. Luego, resuélvela.

a. $x = 5x - 13$

b. $x + 5x = -10 + 3$

c. $4x - 5x - 9 = 3x + 4x$

d. $3x - 8x + 9x = 12 - 7x$

3 Aplica la propiedad distributiva y resuelve.

a. $7(x - 5) - x = 3$

b. $-3(2x - 5) - 5x = 3x$

c. $7(x - 2) - 6x + 1 = 3 - 4x$

d. $4x + 2(2x - 5) = (x - 3) - (8 - x)$

e. $9x - 2(x - 4x) = 3x - 2(3 - x)$

4 Elimina los denominadores y resuelve.

a. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = 6$

b. $9x - 15 = -\frac{9}{7}$

c. $\frac{3}{10}x - \frac{2}{15} = -\frac{4}{5}$

5 Halla la solución de cada ecuación.

a. $\frac{x-2}{5} + \frac{x}{4} = 5$

b. $\frac{x-2}{9} + \frac{x-7}{3} = -4$

c. $\frac{2x-3}{4} + \frac{2x+3}{3} = -1$

d. $\frac{x-6}{4} - \frac{2x+1}{2} - 3 = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

6 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $2\left(\frac{x-1}{4} - 4\right) - 3\left(\frac{2x}{9} - 1\right) = 9$

b. $-3\left(\frac{7x}{3} - \frac{2x}{4}\right) - \frac{5x+1}{3} = \frac{11x}{6}$

Resolución de problemas

7 La edad de Alicia excede en tres años la edad de Isabel. La edad de María es la mitad de la edad de Isabel. La suma de las tres edades es 93 años.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa al enunciado anterior?

a. $(x + 3) + x + \frac{x}{2} = 93$

b. $(x - 3) + x + \frac{x}{2} = 93$

c. $\left(\frac{x}{2} + 3\right) + x + \frac{x}{2} = 93$

d. $\left(\frac{x}{2} - 3\right) + x + \frac{x}{2} = 93$

Evaluación del aprendizaje

i Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a. $9x - 4 = 2x$

b. $4x - 9x + 2 = 7x - 5x - 9$

c. $4x - 7x + 5 = 2 - 4(3x + 1)$

d. $3x + (2x - 3) = 7(x - 2) - x$

ii Plantea una ecuación que modele cada problema.

a. El triple de un número menos 30 es igual a 6. ¿Cuál es el número?

b. En una academia de idiomas, el número de personas que estudian francés es la mitad del número que estudian inglés. Calcula cuántas personas hay en cada grupo si en total son 240.

Educación ambiental

Los árboles funcionan como filtros de aire al tomar las partículas contaminantes y convertirlas en su propio alimento. Si cuatro árboles absorben 112 kg de contaminantes, ¿cuántos kg se podrán filtrar en un bosque con 2 600 árboles?

- ¿Por qué es importante cuidar los bosques?

3 Problemas con ecuaciones de primer grado

Saberes previos

Halla el valor de la letra en cada igualdad.

- $(18 \div 3) \times 7 = (2 \times 3) \times k$
- $(36 + 24) \div n = (180 \div 3) \div 10$

Analiza

Ayer gasté \$3000 y hoy mis padres me dieron \$5000. Ahora tengo \$7000.

- ¿Cuánto dinero tenía ayer antes de gastarme los \$3000?

Conoce

Si se llama x al dinero que tenía el niño ayer antes de gastarse los \$ 3000, se puede plantear la siguiente ecuación.

$$x - 3000 + 5000 = 7000$$

Luego:

$$x = 7000 + 3000 - 5000 = 5000$$

Por lo tanto, el niño tenía \$ 5000.

3.1 Lenguaje verbal y lenguaje algebraico

El **lenguaje algebraico** permite expresar mediante símbolos matemáticos enunciados de situaciones que se deben resolver en la vida diaria o en las ciencias. En la Tabla 3.1 se observan algunos ejemplos.

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
La suma de n y su mitad.	$n + \frac{n}{2}$
El número que excede a n en 17 unidades.	$n + 17$
La cuarta parte de n.	$\frac{n}{4}$
El cuadrado de n.	n^2

Tabla 3.1

Ejemplo 1

Hace ocho años, un padre tenía siete veces la edad de su hijo, pero ahora tiene solo tres veces la edad del hijo. ¿Cuáles son las edades de ambos en este momento?

1. Comprende

La información de la Tabla 3.2 permite entender la relación entre los datos proporcionados en el enunciado del problema para expresarla en lenguaje algebraico.

Expresión verbal	Expresión algebraica
Edad actual del padre.	x
Edad actual del hijo.	$\frac{x}{3}$
Edad del padre hace ocho años.	$x - 8$
Edad del hijo hace ocho años.	$\frac{x-8}{7}$

Tabla 3.2

2. Planea

En este paso se plantea la ecuación que expresa las relaciones entre los datos.

3. Resuelve

La ecuación correspondiente a la situación planteada es:

$$\frac{x}{3} - 8 = \frac{x-8}{7}$$

Su solución es la siguiente:

$$21 \cdot \left(\frac{x}{3} - 8\right) = 21 \cdot \frac{x-8}{7}$$ ← Se multiplican los miembros de la igualdad por el m. c. m. de los denominadores.

$$7x - 168 = 3x - 24$$ ← Se resuelve la ecuación obtenida.

$$4x = 144$$
$$x = 36$$

Por lo tanto, la edad actual del padre es: $x = 36$ años y la edad actual del hijo es: $\frac{x}{3} = 12$ años.

4. Comprueba

Al reemplazar $x = 36$ en la ecuación planteada, se verifica la igualdad.

$$\frac{36}{3} - 8 = \frac{36-8}{7} \Rightarrow 12 - 8 = \frac{28}{7} \Rightarrow 4 = 4$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Determina qué número, sumado consigo mismo cuatro veces más su triple, da como resultado 96.

2 Escribe en lenguaje algebraico los enunciados y resuélvelos.

a. La suma de dos números consecutivos es 79.

b. La suma de dos números pares consecutivos es 126.

c. El doble de un número y dicho número suman 27.

d. El triple de un número menos 8 es 70.

3 Encuentra dos números sabiendo que su suma es 20 y se diferencian en seis unidades.

Resolución de problemas

4 La edad de Carlos es el triple de la de Juan. La suma de sus edades es 48. ¿Cuál es la edad de Carlos?

5 La cuarta parte de un número, aumentado en $\frac{4}{3}$, equivale a la tercera parte del número. ¿Cuál es ese número?

6 Una mamá tiene 36 años y las edades de sus tres hijos suman 18 años.

a. ¿Cuántos años faltan para que las edades de los hijos sumen la edad de la mamá?

b. ¿Cuántos años deben pasar para que las edades de los hijos sumen el doble de la edad de la mamá?

7 Un número es el doble de otro. Al sumar ambos números da 33. ¿De qué números estamos hablando?

8 La suma de un número más la mitad del mismo número es 24. ¿Cuál es ese número?

9 Al doble de un número le restamos cinco unidades y el resultado coincide con ese número menos dos unidades. ¿De qué número se trata?

10 Arturo tiene 26 láminas más que Pablo y entre los dos tienen 72. ¿Cuántas láminas tiene Arturo?

11 Si la edad de Tomás es x años, ¿qué representan las siguientes expresiones?

a. $x - 8 = 19$

b. $x - 8 = 3$

c. $2(x + 8) = 38$

12 Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40 000 barriles?

13 Julián tiene cuatro años más que su primo Elkin y, dentro de tres años, la edad de los dos sumará 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

14 ¿Qué edad tengo ahora si dentro de doce años tendré el triple de la edad que tenía hace seis años?

15 Victoria entrena cada día aumentando el recorrido del día anterior en 1 km. Al cabo de siete días, recorrió en total 42 km.

¿Cuántos kilómetros entrenó el último día?

Evaluación del aprendizaje

i La diferencia entre las edades de A y de B es de seis años; la diferencia entre las edades de B y de C es de cinco años, y la suma de las tres edades es igual a 43 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

ii Ana tiene 30 años y Lucía tiene 40. ¿Dentro de cuántos años la edad de Ana será los $\frac{5}{6}$ de la edad de Lucía?

4 Dependencia entre magnitudes

Saberes previos

Analiza las siguientes parejas de magnitudes e indica si una de ellas se ve afectada por los valores que tome la otra. Explica tu respuesta.

- La altura sobre el nivel del mar de una ciudad y su temperatura.
- La cantidad de gasolina consumida por un auto a medida que avanza en una carretera.
- La velocidad de una bicicleta cuando el trayecto es el ascenso de montaña.

Analiza

Con una manguera de alta presión se llena una piscina de un parque recreativo.

- Si cada minuto se depositan 150 L de agua y la piscina está llena al cabo de una hora, ¿cuál es la capacidad de la piscina?

Conoce

Las magnitudes que se relacionan en la situación son: *tiempo de llenado* y *cantidad de agua contenida* en la piscina.

Cada minuto entran 150 L de agua en la piscina. Por lo tanto, se comparan las magnitudes relacionadas y se construye la Tabla 3.3 para determinar cuánta agua habrá en la piscina al cabo de 60 minutos (1 hora).

Tiempo (min)	1	2	3	4	5	...	60
Capacidad (L)	150	300	450	600	750	...	9 000

Tabla 3.3

Se concluye que al cabo de una hora, la piscina contendrá 9 000 L.

Dos **magnitudes** son **dependientes** si la variación de una permite predeterminar un cambio en la otra.

Cuando el valor de una magnitud no se conoce se representa con una letra minúscula, llamada **variable**.

Una variable puede ser **independiente** si toma cualquier valor dentro de un conjunto de datos o, **dependiente** si depende de otra.

Ejemplo 1

Un plan de voz de una empresa de telefonía celular cuesta \$ 29 990 mensuales e incluye 200 minutos a todo destino. Por cada minuto adicional se deben pagar \$ 170.

El precio mensual del recibo dependerá de los minutos adicionales que se consuman. Por lo tanto, la magnitud *precio mensual del recibo* es la variable dependiente y la magnitud *número de minutos adicionales* es la variable independiente.

4.1 Relaciones expresadas en tablas

Para expresar relaciones de dependencia entre dos magnitudes con una **tabla**, se organiza la información en filas y columnas.

Ejemplo 2

La relación entre el costo mensual de telefonía celular según el número de minutos consumidos se puede representar en la Tabla 3.4.

Minutos consumidos	Hasta 200	201	202	...	300
Costo (\$)	29 990	30 160	30 330	...	46 990

Tabla 3.4

Esto indica que desde 0 hasta 200 minutos se pagan \$ 29 990. A partir del minuto 201, se pagan \$ 170 por minuto adicional.

4.2 Relaciones expresadas en gráficas

Para expresar relaciones de dependencia entre dos magnitudes mediante una **gráfica** se trazan los ejes del plano cartesiano. En el eje X se ubica la variable independiente y en el eje Y la variable dependiente.

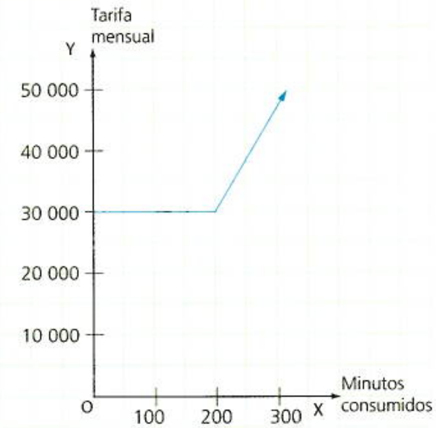


Figura 3.4

Ejemplo 3

En la gráfica de la Figura 3.5 se muestra la relación de dependencia entre el costo mensual de telefonía celular y el número de minutos consumidos.

Para representar gráficamente una función, se trazan el eje de abscisas, X, y el eje de ordenadas, Y. Se asignan valores a la variable x y se evalúan en la función o se construye la tabla correspondiente. Se ubican las parejas de puntos obtenidas y se traza una línea continua, porque la magnitud *minutos* toma cualquier valor real.

4.3 Relaciones expresadas por fórmulas

Para representar la relación de dependencia entre dos magnitudes mediante una **fórmula**, se utiliza una expresión algebraica que permita calcular la variable dependiente a partir de valores de la variable independiente.

Ejemplo 4

La fórmula que representa la relación de dependencia entre el costo mensual de telefonía celular y el número de minutos consumidos está definida por dos partes: el cargo fijo y el cargo fijo con los minutos adicionales. Es decir:

- \$ 29990 por consumir hasta 200 minutos.

  Esto se escribe: 29990, si $x \leqslant 200$.

- \$ 29990 más \$ 170 por cada minuto adicional después del minuto 200.

  La expresión algebraica correspondiente es: $29990 + 170x$, siendo x el número de minutos adicionales a 200.

Ejemplo 5

El costo de un galón de gasolina en una estación de servicio es \$ 8 170.

Las variables que se relacionan son costo y número de galones de gasolina. El costo depende del número de galones de gasolina. Por lo tanto, la primera variable es dependiente y la segunda es independiente.

En la Tabla 3.5 se representa la situación.

Número de galones	1	2	3	...	10
Costo (\$)	8 170	16 340	24 510	...	81 700

Tabla 3.5

La gráfica se muestra en la Figura 3.6.

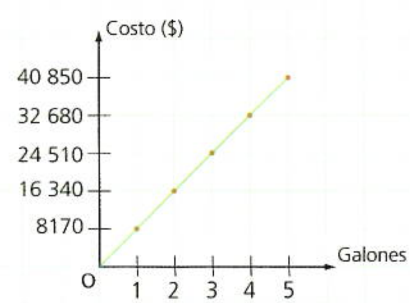


Figura 3.5

Para determinar la fórmula, se llama x a la variable *número de galones* y y al *costo*. Por cada galón de gasolina se pagan \$ 8 170; es decir, $y = 8\,170x$.

4 Dependencia entre magnitudes

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Analiza e indica cuál magnitud es dependiente y cuál es independiente en cada caso.

a. Litros de agua y personas de una casa.

b. Galones de gasolina y distancia recorrida.

c. Número de estudiantes y número de padres de familia en una reunión escolar.

d. Número de obreros y tiempo de construcción de una obra.

2 Plantea una magnitud que sea dependiente de cada magnitud dada.

a. Número de minutos de un plan de telefonía celular.

b. Número de hojas de un cuaderno.

c. Nivel de tinta de un lapicero.

d. Cantidad de depredadores en un ecosistema.

3 Representa con una gráfica la información de las siguientes tablas.

a.

Edad (años)	1	2	3	4
Estatura (cm)	74,7	86,1	93	101,5

Tabla 3.6

b.

Hora del día	10 a. m.	2 p. m.	4 p. m.	6 p. m.
Temperatura (ºC)	18	22	17	20

Tabla 3.7

c.

N.º de profesores	3	4	5	6
N.º de estudiantes	25	43	89	115

Tabla 3.8

d.

N.º de lápices	1	2	3	4
Costo ($)	800	1 600	2 400	3 200

Tabla 3.9

e.

Presión (atm.)	10	20	30	40
Volumen (cm³)	500	400	300	200

Tabla 3.10

Modelación

4 Plantea un problema que se pueda resolver con el análisis de las gráficas presentadas a continuación.

a.

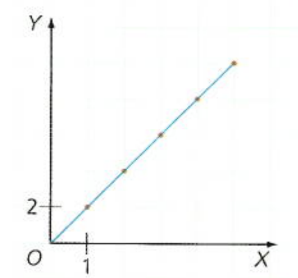


Figura 3.6

b.

Figura 3.7

c.

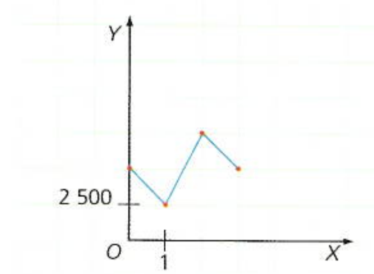


Figura 3.8

d.

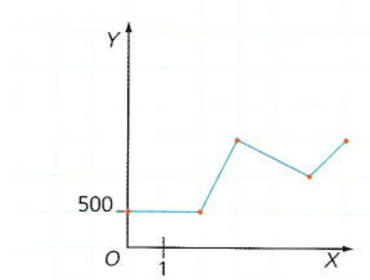


Figura 3.9

e.

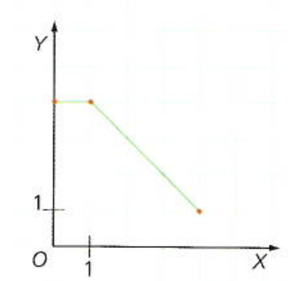


Figura 3.10

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

5 Plantea dos magnitudes que estén relacionadas y se puedan representar con las fórmulas dadas.

a. $y = 2x + 4$ b. $y = x - 20000$

c. $y = 3x + 14000$ d. $y = x^2 + 5x$

6 Establece una fórmula para cada enunciado.

a. El precio de x televisores LCD de 42 pulgadas si cada uno cuesta $ 1 600 000.

b. El costo de x kilogramos de azúcar si por uno solo se pagan $ 2 800.

c. El número x de semanas que faltan para finalizar el presente año.

d. El número x de pasajeros trasladados de una ciudad a otra si cada bus tiene capacidad para 36 personas.

Resolución de problemas

7 Diego ahorra $ 10 000 diarios durante quince días de trabajo en un café internet.

a. Según la anterior información, determina las variables dependientes e independientes.

b. Construye una tabla en la que se muestre la relación de dependencia entre las variables.

c. ¿Cuánto ahorró Diego al cabo de quince días de trabajo?

d. Determina y escribe una fórmula que relacione las dos variables.

8 Si un litro de aceite de girasol cuesta $ 5 850, completa la Tabla 3.11 que relaciona las magnitudes *cantidad de aceite* y *precio*.

Aceite (litros)	1	2	5	15
Precio ($)	5 850			

Tabla 3.11

9 Por una caja de un medicamento para el tratamiento de la artritis, Lucía paga $ 57 900. Si la caja contiene 20 pastillas, completa la Tabla 3.12.

Medicamento (pastillas)	1	10	20	40
Precio ($)			57 900	

Tabla 3.12

10 La gráfica de la Figura 3.12 representa la variación de la temperatura en una ciudad a lo largo de un día.

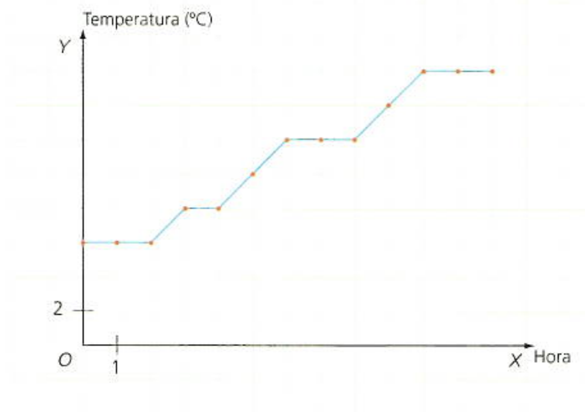


Figura 3.11

a. ¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan?

b. Describe lo que ocurrió en cada intervalo de tiempo.

c. ¿A qué hora se alcanzó la temperatura máxima?

d. ¿En qué momento del día se produjo la temperatura más baja?

e. ¿A qué hora la temperatura es la misma que a las 6?

Evaluación del aprendizaje

Un experimento consiste en reproducir una bacteria en diversas condiciones para lograr su control. Luego de preparar un medio óptimo se introduce una bacteria. Al cabo de una hora se observa que no se ha reproducido. A la segunda hora hay una bacteria más. Pasadas tres horas, la primera bacteria se ha vuelto a reproducir, pero la segunda no. Transcurridas cuatro horas, la primera bacteria se reprodujo una vez más, la segunda inició su reproducción y la tercera no se ha reproducido.

a. Organiza la información en una tabla.

b. Identifica cuáles son las variables dependiente e independiente.

c. Construye una gráfica que represente la información.

5 Funciones

Saberes previos

Escribe una expresión algebraica para cada enunciado.

- La suma del cuadrado de un número y su doble.
- El producto -5 y el triple de un número.
- La diferencia de un número y su mitad.

Analiza

El costo de un par de zapatillas deportivas es $ 314 000. El patrocinador decide donar un par de zapatillas a cada uno de los catorce atletas de un equipo.

- ¿Cuál es el costo de la donación?

Conoce

Las variables que se relacionan son *número de pares de zapatillas deportivas* y *costo*. Para saber cuál es el costo de la donación, se debe establecer una fórmula que relacione la cantidad de pares de zapatillas con su costo. Para ello, se construye la Tabla 3.13.

Pares de zapatillas	1	2	3	...	7
Costo ($)	314 000	628 000	942 000	...	2 198 000

x 2 x 3 x 7

Tabla 3.13

La expresión $y = 314\,000x$ permite calcular el costo de x pares de zapatillas. Para conocer el costo de la donación, se reemplaza x por el número de atletas, pues a cada uno le corresponde un par de zapatillas. Como el equipo de atletismo está conformado por 14 atletas, la donación sería de $\$\,314\,000\,(14) = \$\,4\,396\,000$.

En la Tabla 3.13 se observa que cada valor de la primera fila está relacionado con uno de la segunda fila. A esta relación se le llama **función**.

A una relación en la que a cada valor de una variable independiente x le corresponde un único valor de la variable dependiente y, se le conoce como **función**.

Para denotar una función se utilizan las letras del alfabeto f, g y h. Además, se puede utilizar la notación de igualdad $y = f(x)$, que se lee "y igual a f de x."

5.1 Dominio y rango de una función

El **dominio** de una función f denotado $D(f)$, corresponde al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x.

El **rango** o **recorrido** de una función f denotado $R(f)$, es el conjunto formado por las imágenes de los elementos del dominio.

Ejemplo 1

En la situación inicial, los pares de zapatillas se cuentan con números naturales; por lo tanto, $D(f) = \mathbb{N}$. Como el costo de las zapatillas puede tomar cualquier valor mayor que cero, entonces $R(f) = [0, \infty)$.

5.2 Representación gráfica de una función

Las funciones se pueden representar mediante un enunciado o expresión verbal, una tabla, una expresión algebraica o fórmula y una gráfica.

Para representar una función gráficamente, luego de trazar los ejes X y Y del plano cartesiano, se ubican las parejas ordenadas de la forma (x, y) obtenidas al dar valores a la variable x y calcular su respectiva imagen y.

Ejemplo 2

En la función que está determinada por la expresión $y = 3 + 5x^2$, la variable independiente puede tomar cualquier valor real.

Sin embargo, para su estudio se toman algunos valores y después se determinan las parejas ordenadas que se muestran en la Tabla 3.14.

x	$y = 3 + 5x^2$	(x, y)
-3	48	$(-3, 48)$
-2	23	$(-2, 23)$
-1	8	$(-1, 8)$
0	3	$(0, 3)$
1	8	$(1, 8)$
2	23	$(2, 23)$
3	48	$(3, 48)$

Tabla 3.14

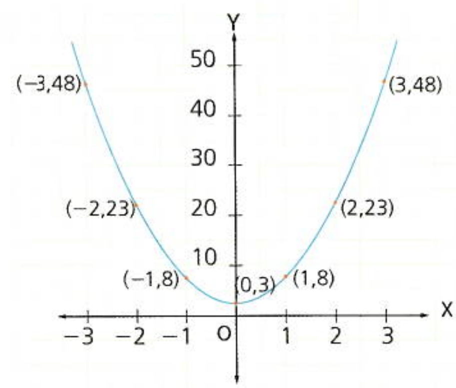


Figura 3.13

Por último, se ubican las parejas de puntos (x, y) en el plano cartesiano y se traza la curva que los une, pues el dominio es el conjunto de números reales. Así, se obtiene la Figura 3.13, donde se observa que el rango de la función está definido por el subconjunto de números reales mayores o iguales que 3, es decir $R(f) = [3, \infty)$.

Para reconocer si una gráfica representa una función, se traza una recta vertical (paralela al eje Y). Si esta recta interseca como máximo en un punto a la gráfica, entonces representa una función. Este criterio es válido porque a cada valor de la variable x le corresponde un único valor de la variable y.

Ejemplo 3

La gráfica de la Figura 3.14 es una función, ya que la recta vertical solo la interseca en un punto.

En la Figura 3.15 se observa que la recta vertical interseca a la gráfica en dos puntos. Por tanto, no es una función.

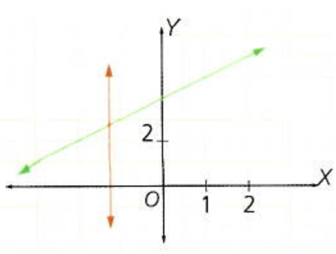


Figura 3.14

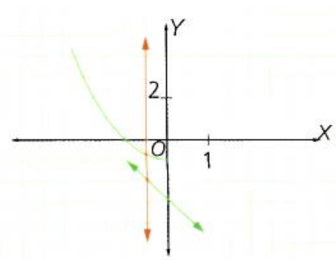


Figura 3.15

5 Funciones

MatemaTICS

Representar funciones con GeoGebra

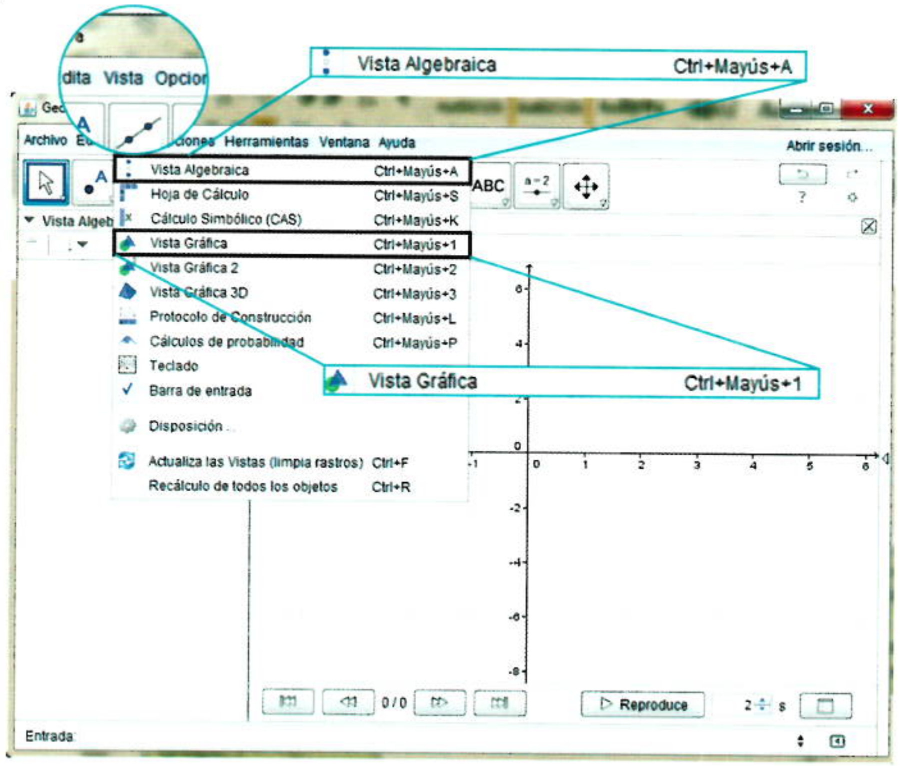
Dentro de las herramientas con las que cuenta GeoGebra está la de representar funciones gráficamente. El primer paso para ello es dar clic en el menú *Vista* y seleccionar *Vista Algebraica* y *Vista Gráfica*. La primera opción es para ingresar la expresión algebraica de la función y la segunda para representarla gráficamente.

- Observa los pasos:

Haz clic en el botón *Vista*.

Selecciona *Vista Algebraica*. Se abrirá una ventana para ingresar expresiones algebraicas.

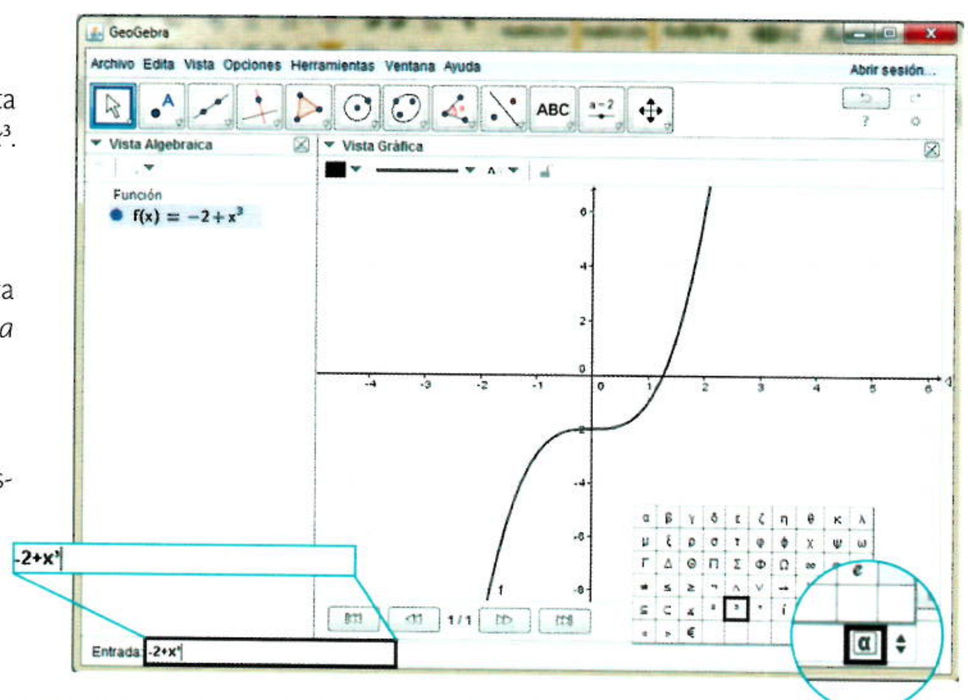
Selecciona *Vista Gráfica*. Se abrirá una ventana con el plano cartesiano.



Escribe la fórmula que representa la función. En este caso, $-2 + x^3$. Luego, oprime la tecla *Enter*.

Al dar *Enter* se mostrará la gráfica de la función en la *Vista Gráfica* del programa.

Para obtener algunos símbolos especiales, haz clic en el botón α.



Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Establece si cada relación es una función. Justifica cada una de tus respuestas.

a.

Integrante	Edad (años)
Felipe	11
Lucía	14
Miguel	12
Rocío	11
Esteban	13
Alfonso	15
Angélica	10

Tabla 3.15

b. Por cada dos libras de azúcar se agregan cinco litros de agua.

c.

Cuadernos	Precio ($)
1	800
3	2 300
6	4 500
10	7 600
20	14 500
30	21 000

Tabla 3.16

d. Se requieren cuatro baldosas por cada metro cuadrado de superficie.

Ejercitación

2 Escribe el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a.

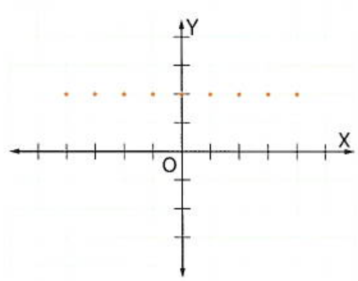


Figura 3.16

b. El radio de un círculo es r cm. La expresión que relaciona el área A del círculo con su radio es πr^2.

c. Varios voluntarios se acercan a un hospital para donar sangre. La función que describe la cantidad de sangre disponible en un día x es $f(x) = 3x + 7$.

Razonamiento

3 Representa cada función en un plano cartesiano y escribe su expresión algebraica.

a. Una persona recorre en bicicleta 5 km en una hora. ¿Qué distancia recorre en 4 horas sin detenerse?

b. En una tableta hay 1,976 g de bicarbonato de sodio. ¿Cuánto bicarbonato habrá en 26 de estas tabletas?

c. En una ciudad la población en el año 2010 era de 5 401 habitantes. A partir de ese momento comenzaron a nacer tres niños por año. De mantenerse este comportamiento, ¿cuántos niños habrán nacido en el 2025?

Evaluación del aprendizaje

La intensidad del sonido que percibe el oído humano depende de la distancia entre el receptor y el emisor. De esta forma, la intensidad I en decibelios que recibe el receptor está dada por la fórmula $I = \frac{100}{d^2}$, donde d es la distancia (en metros).

a. Construye una tabla con seis valores diferentes para la distancia.

b. Determina el dominio y el rango de la función.

c. Grafica la función.

d. ¿Qué sucede si se aumenta la distancia entre el emisor y el receptor del sonido?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Gracias a diversas estrategias de prevención de embarazos en adolescentes, las cifras del Valle del Cauca para niñas entre los 10 y los 14 años pasaron de 600 a 400 embarazos por año y se prevé que se reduzcan a la mitad el próximo año. Determina si esta relación es función. ¿Qué estrategias para la prevención de embarazos conoces?

6 Continuidad y variación de funciones

Saberes previos

Representa en tu cuaderno las funciones.

$f(x) = 2x + 4$ y $h(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x < 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

- ¿Cuál de ellas tiene un trazo continuo?
- ¿Cuál no tiene un trazo continuo?

Analiza

Una ciclista sube una montaña por carretera. En su camino se encuentra con que un puente se ha caído debido a condiciones climáticas adversas.

- ¿Es posible para la ciclista realizar la hazaña sin desviarse del camino que había trazado?

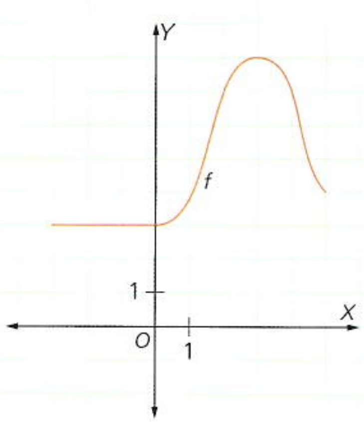


Figura 3.18

Conoce

La única forma de continuar el recorrido de ascenso a la montaña sería dando un gran salto a través del puente que se derrumbó, y en la realidad este hecho es imposible. Estas situaciones se pueden modelar por medio de gráficas de funciones discontinuas.

6.1 Continuidad de una función

La idea intuitiva de que una **función es continua** es que la gráfica de esta puede ser construida de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

La gráfica de una función continua en un intervalo no presenta saltos ni rupturas.

Los puntos donde una función no es continua se llaman **puntos de discontinuidad.**

Ejemplo 1

La función representada en la Figura 3.17 tiene "saltos", por lo tanto es discontinua. La función es discontinua en los puntos $x = 15$, $x = 20$ y $x = 25$.

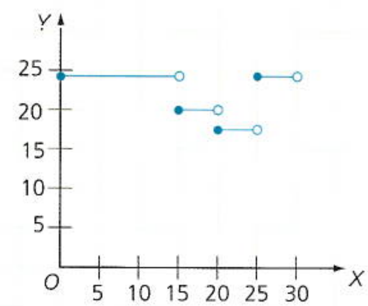


Figura 3.17

6.2 Variación de una función en un intervalo

La **variación de una función en un intervalo** está determinada por su tasa de variación, denotada TV y calculada mediante la fórmula $TV[a, b] = f(b) - f(a)$.

- Si la variable y aumenta a medida que aumenta x, la tasa de variación es positiva.
- Si la variable y disminuye a medida que aumenta x, la tasa de variación es negativa.
- Si la variable y permanece igual a medida que aumenta x, la tasa de variación es nula.

Ejemplo 2

Observa cómo se calcula la tasa de variación de la función que se representa en la Figura 3.18 para algunos intervalos.

- $TV[-3, 0] = f(0) - f(-3) = 3 - 3 = 0$ — Tasa de variación nula
- $TV[0, 2] = f(2) - f(0) = 7 - 3 = 4$ — Tasa de variación positiva
- $TV[2, 5] = f(5) - f(2) = 4 - 7 = -3$ — Tasa de variación negativa

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Observa las figuras e indica los intervalos de continuidad de cada función.

a.

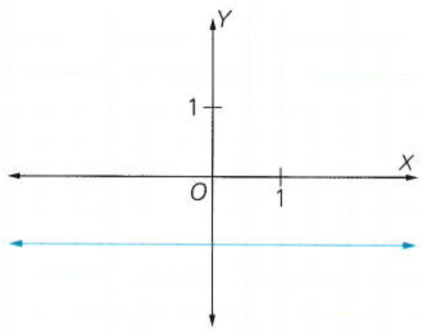


Figura 3.19

b.

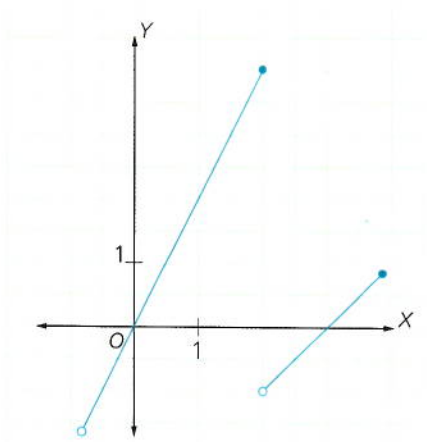


Figura 3.20

c.

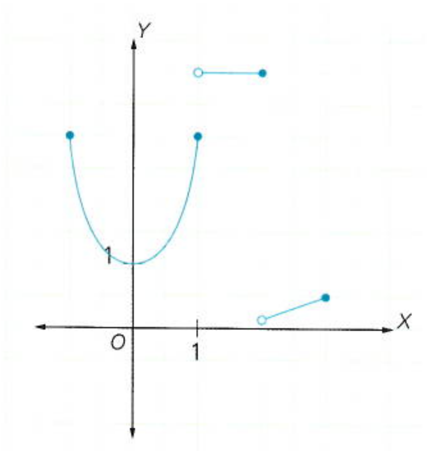


Figura 3.21

Ejercitación

2 Halla la tasa de variación de cada función en el intervalo $[-4, 3]$ e indica si es positiva, negativa o nula.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ b. $f(x) = -3x + 2$

c. $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ d. $f(x) = -3$

3 Observa las figuras dadas y escribe en qué puntos las funciones son discontinuas.

a.

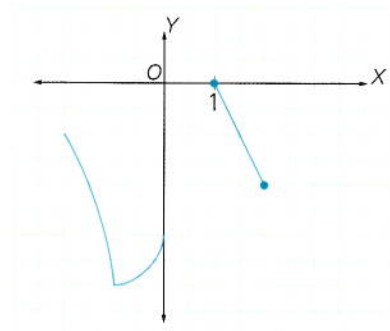


Figura 3.22

b.

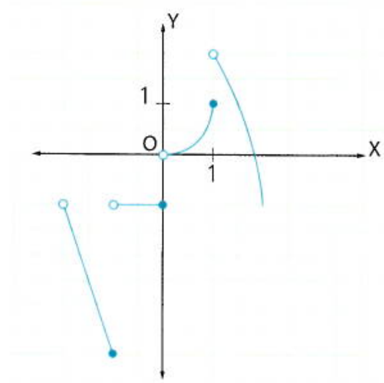


Figura 3.23

Razonamiento

4 Responde:

a. ¿Una función puede tener una tasa de variación nula en un intervalo y no ser constante?

b. ¿Qué sucede si en la fórmula para calcular la tasa de variación de una función se toma $f(a) - f(b)$?

Resolución de problemas

5 Un técnico de servicios cobra $ 30 000 por el desplazamiento y $ 10 000 por cada hora que dura la reparación. Representa la función que modela la situación e indica si es continua la función en todo su dominio.

Evaluación del aprendizaje

El precio por consumo de energía en estrato 3 es de $ 180 kw/h más un cargo fijo de $ 12 000. Si el consumo excede los 500 kw/h el precio del kw/h se incrementa a $ 225. Identifica la expresión algebraica e indica si la función es continua o discontinua.

7 Crecimiento y decrecimiento de funciones

Saberes previos

Traza las gráficas de las funciones $y = x$ y $y = -x$. ¿Qué diferencias observas en las gráficas?

Analiza

Debido a los efectos climáticos que experimenta la Tierra desde hace algunas décadas, la temperatura de un glaciar ha pasado de -26 °C en el año 1955 a -10 °C en el año 2015.

- ¿De qué tipo fue la variación de la temperatura en este lapso?, ¿en cuánto aumentó o disminuyó?

Conoce

Se sabe que la temperatura del glaciar pasó de -26 °C a -10 °C. Para determinar qué cambio tuvo, se calcula la tasa de variación en el intervalo de tiempo [1955, 2015] así:

$$TV[1955, 2015] = -10 - (-26) = -10 + 26 = 16$$

La tasa de variación es positiva; entonces, la temperatura aumentó en 16 °C.

Una función es **creciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la **tasa de variación es positiva** (Figura 3.24).

Una función es **decreciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la **tasa de variación es negativa** (Figura 3.25).

Una función es **constante** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la **tasa de variación es nula** (Figura 3.26).

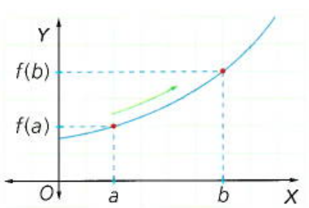


Figura 3.24

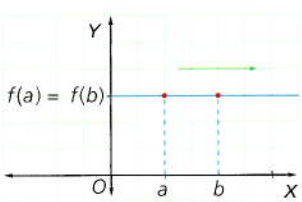


Figura 3.25

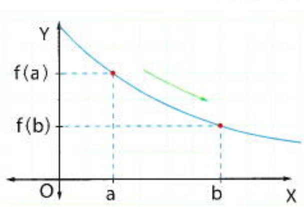


Figura 3.26

7.1 Máximos y mínimos

En una función continua se puede determinar un punto máximo o uno mínimo relativo según estas condiciones:

- **Máximo relativo**, si a su izquierda la función crece y a su derecha decrece.
- **Mínimo relativo**, si a su izquierda la función decrece y a su derecha crece.

Además, el mayor de todos los valores que tiene la función se llama **máximo absoluto** y el menor se llama **mínimo absoluto**.

Ejemplo 1

En la Figura 3.27 se muestra el número de personas conectadas a una página de internet desde las 8 a. m. hasta las 8 p. m.

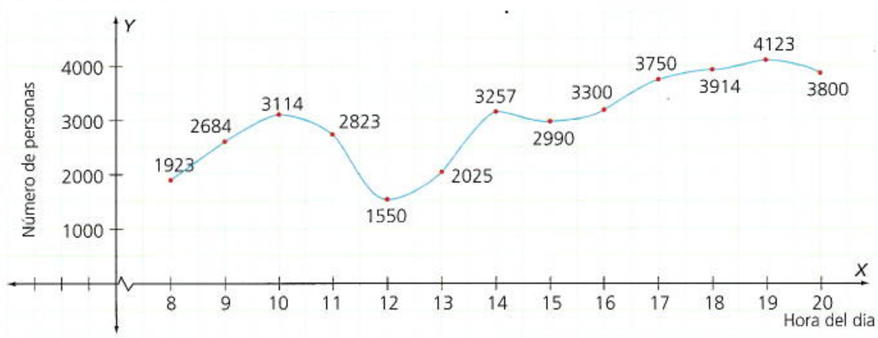


Figura 3.27

La función es creciente en los intervalos [8, 10], [12, 14] y [15, 19]. La función es decreciente en los intervalos [10, 12], [14, 15] y [19, 20].

La función presenta un máximo relativo en el punto $x = 10$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $x = 12$.

La función alcanza el máximo absoluto a las 19 horas y el mínimo absoluto a las 12 horas. De la misma forma, a las 12 está conectado el menor número de personas, y en este valor la función alcanza un mínimo absoluto.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Analiza el crecimiento o decrecimiento de la función representada en los intervalos dados.

a. $[-3, -1]$ b. $[0, 1]$

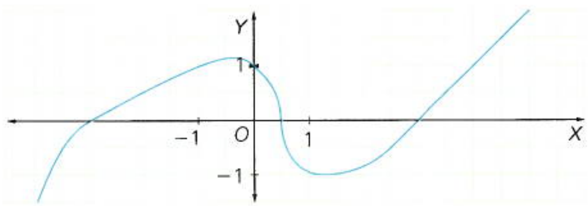


Figura 3.28

2 Determina los máximos y mínimos de la función.

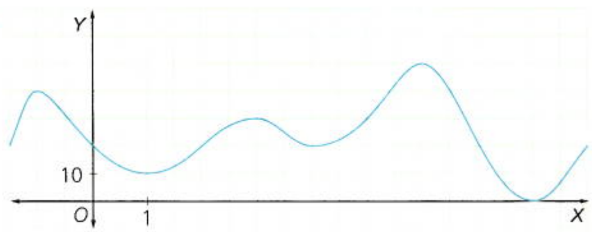


Figura 3.29

3 Indica los intervalos donde la función es creciente, constante y decreciente.

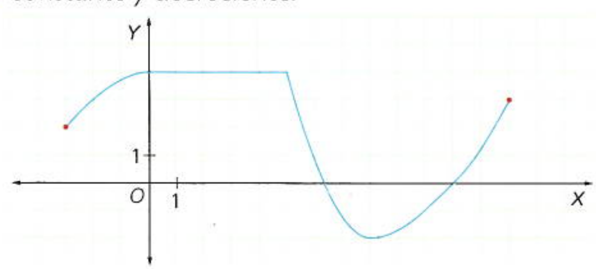


Figura 3.30

4 ¿Cuáles son los máximos y mínimos de la función en el intervalo $[-2, 2]$?, ¿son absolutos o relativos?

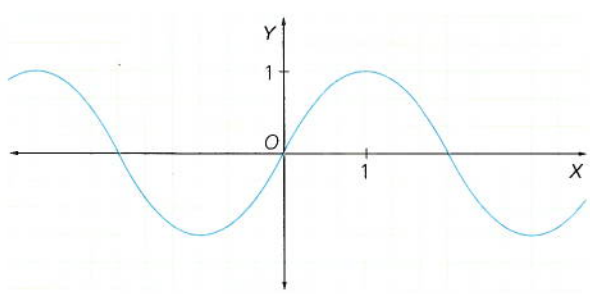


Figura 3.31

5 Traza la gráfica de una función cuyas características son las siguientes:

Dominio: $[-3, 3]$ Recorrido: $[-4, 5]$

Mínimos en $[-2, -4]$ y $[2, -4]$ Máximo en $[0, 5]$

Razonamiento

6 Indica dónde alcanzará los máximos y los mínimos una función cuyo estudio del crecimiento es:

Crece en los intervalos $[-\infty, -5]$ y $[-2, 4]$.

Decrece en los intervalos $[-5, -2]$ y $[4, \infty]$.

Resolución de problemas

7 Observa la Figura 3.32.

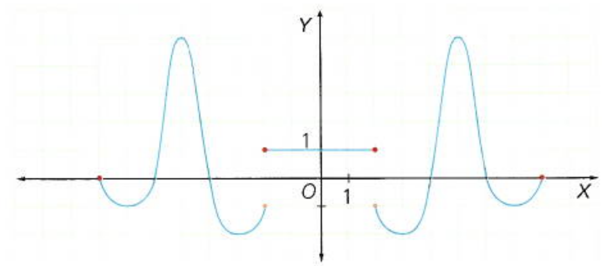


Figura 3.32

Determina:

a. El dominio y el recorrido.

b. Los intervalos de continuidad y discontinuidad.

c. El crecimiento y el decrecimiento.

d. Los máximos y mínimos absolutos y relativos.

Evaluación del aprendizaje

La ruta de un bus universitario se representa en la Figura 3.33. Responde.

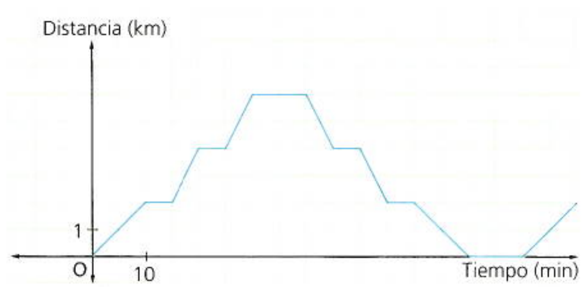


Figura 3.33

a. ¿A cuántos kilómetros está la universidad?

b. ¿Cuánto tiempo tarda el recorrido hasta la universidad?

c. ¿Cuánto tiempo está parado el bus en su recorrido?

d. ¿Qué significa el decrecimiento de la gráfica?

8 Función lineal. Proporcionalidad directa

Saberes previos

Escribe la proporción correspondiente y resuelve el problema. Para los lados de un rectángulo se establece la razón $\frac{4}{7}$. Encuentra las dimensiones de tres rectángulos que cumplan la misma razón.

Analiza

Marta trabaja por horas en un café internet y cobra \$ 20 000 por cada hora.

- ¿Cuánto recibirá si trabaja dos horas?, ¿y si trabaja tres horas?

Conoce

Marta cobra \$ 20 000 por una hora de trabajo. En dos horas ganará el doble y en tres horas el triple. Estas cantidades se calculan así:

- El doble de \$ 20 000: $2 \cdot 20\,000 = 40\,000$
- El triple de \$ 20 000: $3 \cdot 20\,000 = 60\,000$

Se evidencia que, si aumenta el número de horas de trabajo, también aumenta la cantidad de dinero que recibe Marta. Luego, es un caso particular de **proporcionalidad directa**.

Dos variables x y y están en **proporción directa** cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción; es decir, si su razón $\frac{y}{x}$ es constante.

Ejemplo 1

Observa cómo se relacionan el espacio recorrido por un tren de alta velocidad y el número de minutos de viaje.

Espacio (km)	10	50	200	500	...	y
Tiempo (min)	2	10	40	100	...	x

Tabla 3.17

De la información de la Tabla 3.17 se puede concluir que y (espacio) y x (tiempo transcurrido del viaje, expresado en minutos) son magnitudes directamente proporcionales, ya que presentan correlación directa y los cocientes de las cantidades correspondientes son constantes.

$$\frac{10}{2} = \frac{50}{10} = \frac{200}{40} = \frac{500}{100} = \frac{y}{x} = 5 \text{ km/min}$$

Una vez establecida la constante de proporcionalidad, se determina la expresión algebraica que relaciona las dos magnitudes:

$$y = 5x$$

Esta relación es una función, ya que para cada valor del tiempo x hay un único valor para el espacio y.

La función se representa gráficamente en la Figura 3.34.

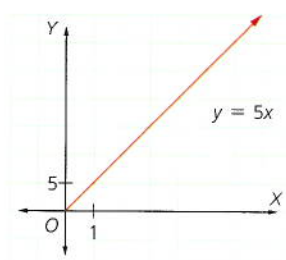


Figura 3.34

Ejemplo 2

Si tres paquetes de dulces cuestan \$ 8 100, ¿cuánto cuestan 15 paquetes?

Si y es el precio de x paquetes de dulces, entonces:

$$\frac{y}{x} = \frac{8100}{3}$$

Por tanto, el precio de 15 paquetes se obtiene sustituyendo $x = 15$.

$$\frac{y}{15} = \frac{8100}{3} = 40\,500$$

8.1 Función lineal

Las **funciones lineales** son de la forma $f(x) = mx$, donde m es una constante diferente de cero. Una función lineal transforma todos los elementos del dominio, multiplicándolos por un mismo número. La constante m recibe el nombre de **pendiente**.

Ejemplo 3

La función $f(x) = 5x$ es la función lineal que multiplica todos los números por cinco. La Tabla 3.18 es una tabla de valores para tal función.

x	-4	-2	0	1	8	9,3	100	1 234
$f(x)$	-20	-10	0	5	40	46,5	500	6 170

Tabla 3.18

El número m de la expresión $f(x) = mx$ puede ser negativo, decimal, una fracción, un irracional, etc.

Los siguientes son algunos ejemplos de funciones lineales:

$$f(x) = -4x \quad g(x) = 3{,}67x \quad h(x) = \frac{1}{2}x \quad i(x) = \sqrt{3}x$$

Las funciones lineales permiten estudiar las relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes. Además, la **pendiente** de la recta de una función indica el cambio de la variable y por cada unidad de la variable x.

Ejemplo 4

En la Figura 3.35 se muestra cómo una fuerza F, que actúa sobre un resorte para producir en él un alargamiento x, está dada por la expresión $F = kx$, donde x es el alargamiento producido y k es una constante que depende del tipo de material. Si se tiene que la constante de elasticidad es $k = 5$ N/m, la fórmula correspondiente se puede escribir como:

$f(x) = 5x$, que corresponde a una función lineal.

La Tabla 3.19 corresponde a la función $f(x)$. Para representar la función, basta con ubicar dos puntos de la función y trazar la recta que pasa por ellos. Observa la Figura 3.36.

x	$f(x)$
-2	-10
-1	-5
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20

Tabla 3.19

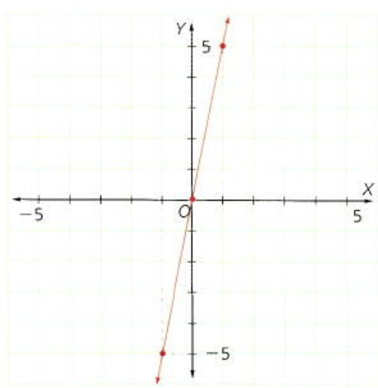


Figura 3.36

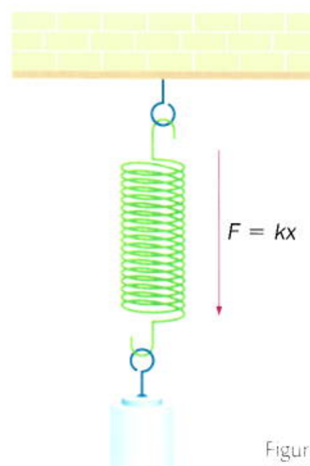


Figura 3.35

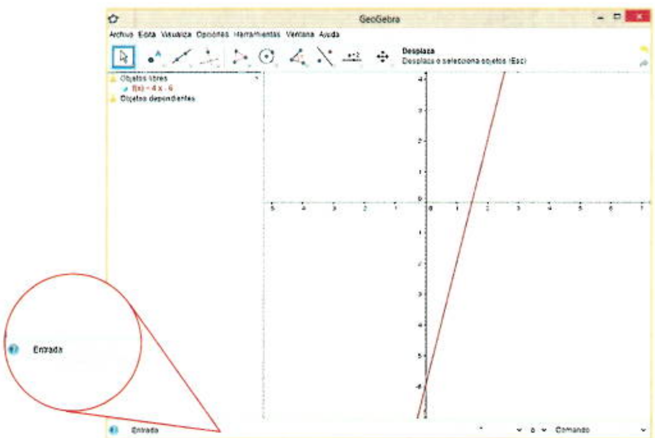
MatemaTICS

Grafica familias de funciones lineales con GeoGebra

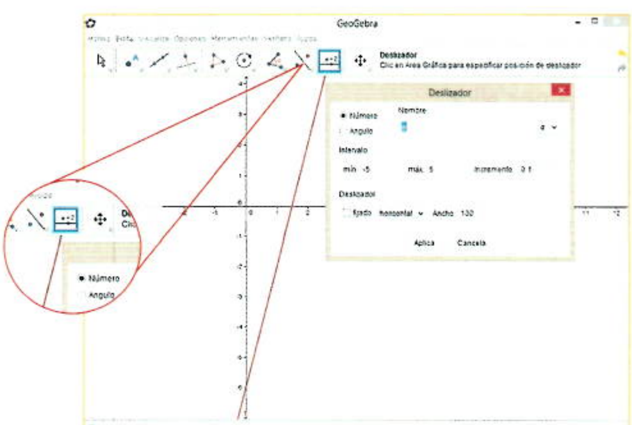
Abre el programa GeoGebra.

Digita en el cuadro de *Entrada* la expresión de una función lineal; en este caso se ha considerado $f(x) = 4x - 6$. Da *Enter*.

Haz clic derecho sobre la recta que obtengas y en la opción de *Propiedades*. Desde allí puedes cambiar su color, su estilo y su grosor.

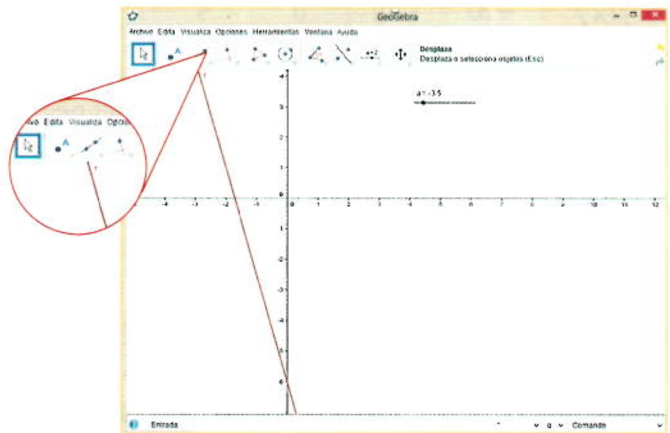


Selecciona en el botón la opción *Deslizador* y, una vez que aparezca un cuadro de diálogo como el que se muestra, selecciona sobre este la opción *Aplica* y aparecerá un segmento en el que se indicará la posición de un punto *a* que se puede desplazar entre dos valores mínimo y máximo prefijados. Estos valores se pueden modificar.

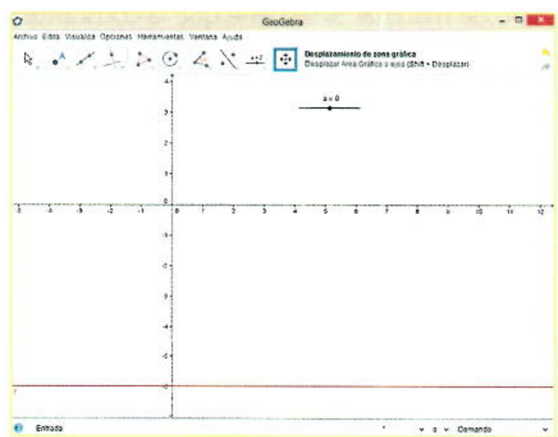


Varía el valor de *a* en el *Deslizador* haciendo clic en la flecha que se destaca en el pantallazo. Ubícate sobre el punto *a* y desplázalo. Observa cómo varía el valor de la pendiente mientras que el intersecto con el eje *y* se mantiene constante.

En este caso, se ha deslizado el valor de *a* hasta $-3{,}9$.



Observa que si seleccionas $a = 0$, la pendiente es 0 y la ecuación de la recta correspondiente es $f(x) = -6$.



Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Indica si las situaciones dadas son de proporcionalidad directa. En caso afirmativo, determina la expresión algebraica que las relaciona y la constante de proporcionalidad respectiva.

a. En un establo, 12 caballos consumen un camión de heno en cuatro días, y 24 caballos consumen la misma cantidad de heno en dos días.

b. Un vehículo que circula a velocidad constante recorre 20 kilómetros en cinco horas. Al cabo de ocho horas ha recorrido 32 kilómetros.

2 Construye las tablas de valores correspondientes para las siguientes funciones lineales. Represéntalas.

a. $y = 2x$ b. $y = 3x$

c. $y = -2x$ d. $y = 4x$

Razonamiento

3 Selecciona la tabla de valores que corresponde a la función $f(x) = \frac{4}{3}x$.

a.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0

Tabla 3.20

b.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{6}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

Tabla 3.21

4 ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de la función $y = x - \frac{3x}{7}$?

Comunicación

5 Expresa cada una de las funciones por medio de una ecuación e indica cuál o cuáles son de proporcionalidad directa. A cada número real

a. le corresponde su doble.

b. le corresponde su doble más cinco.

c. le corresponde su cuadrado más tres.

6 ¿Cuál de estas relaciones es una función lineal?

a. A cada número se le hace corresponder el triple de su siguiente.

b. A cada número real se le hace corresponder el producto de su anterior por su posterior.

Resolución de problemas

7 Tres kilos de harina de trigo cuestan $ 4 500, y por siete kilos del mismo producto se pagan $ 10 500.

a. Escribe la expresión algebraica que relaciona el precio que hay que pagar por x kilos de harina de trigo.

b. La expresión que resulta, ¿es una función lineal? Justifica tu respuesta.

c. Calcula cuánto hay que pagar por 5, 10, 25 y 120 kilogramos de harina de trigo.

Evaluación del aprendizaje

i Indica cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad directa.

a. $y = -5x$ b. $y = 0{,}04 + 23x$

c. $y = 1 - x^2$ d. $y = 0{,}3x$

ii Selecciona la ecuación que corresponde a la gráfica.

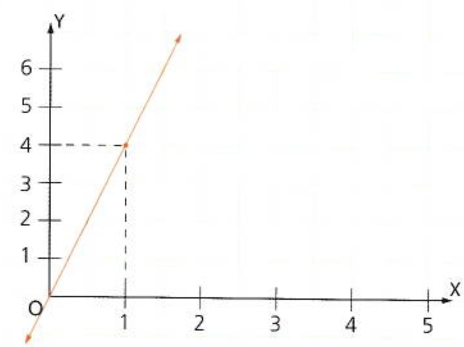


Figura 3.37

a. $y = 4x$ b. $y = -4x$ c. $y = \frac{1}{2}x$

Estilos de vida saludable

Diferentes estudios han demostrado que el rendimiento académico está relacionado directamente con la estabilidad emocional. ¿Cómo representarías esta relación gráficamente?

- ¿Cómo crees que tu bienestar emocional ayuda a tu rendimiento académico?

9 Función afín

Saberes previos

Representa en tu cuaderno las siguientes funciones:

$f(x) = 4x$; $g(x) = 2x$; $r(x) = 3x$ y $h(x) = x$.

Determina cuál de las rectas representadas tiene mayor inclinación respecto al eje X.

Analiza

La temperatura de un globo aerostático baja 1 °C por cada 200 m que sube (Figura 3.38).

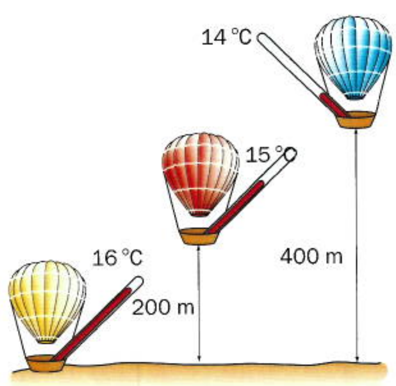


Figura 3.38

- Si al inicio del ascenso la temperatura marca 16 °C, ¿qué pasará cuando ascienda 0, 200... 800 m?

x	-1	0	1	2
$y = 2x + 3$	1	3	5	7

Tabla 3.23

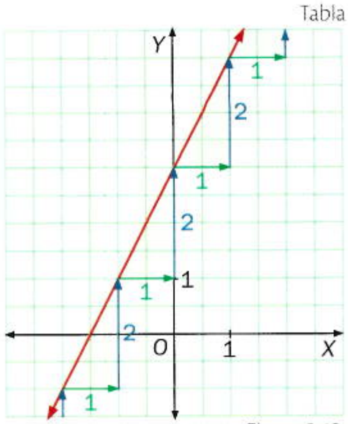


Figura 3.40

Conoce

Para saber la temperatura del globo a medida que asciende, se puede construir la Tabla 3.22.

Altura (m)	0	200	400	600	800
Temperatura (°C)	16	$16 - 1$	$16 - 2$	$16 - 3$	$16 - 4$
	16	$16 - \frac{200}{200}$	$16 - \frac{400}{200}$	$16 - \frac{600}{200}$	$16 - \frac{800}{200}$

Tabla 3.22

Las funciones de la forma $y = mx + n$ con m y n números reales se llaman **funciones afines de la función** $y = mx$. Su gráfica corresponde a una **recta**.

Ejemplo 1

Si x representa la altura (en metros) y y, la temperatura (en °C), la expresión algebraica de la relación que se muestra en la Tabla 3.22 es:

$$y = 16 - \frac{x}{200} \text{ o } y = -0{,}005x + 16$$

La Figura 3.39 representa esta función.

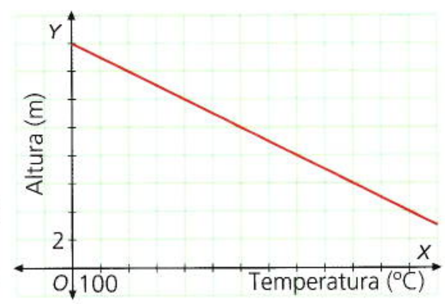


Figura 3.39

9.1 Caracterización de funciones afines

En las funciones afines $y = mx + n$, m está definida como la diferencia en el eje Y sobre la diferencia en el eje X para dos puntos distintos de la recta y n corresponde al punto de intersección de la recta con el eje Y. Este se calcula para $x = 0$.

Ejemplo 2

Para trazar la gráfica de la función $y = 2x + 3$ se construye una tabla de valores (Tabla 3.23) y se ubican los pares de valores en un sistema de coordenadas (Figura 3.40). Al observar la Figura 3.40 se determina que:

- Por cada unidad que aumenta la variable x, la variable y aumenta dos.
- La pendiente m en la función $y = 2x + 3$ es 2, porque es el coeficiente de x. También se puede calcular a partir de las coordenadas de dos puntos de la Tabla 3.23. Así: si $A(1, 5)$ y $B(0, 3)$, entonces $m = \dfrac{5 - 3}{1 - 0} = 2$.
- El punto de corte con el eje Y es la ordenada de la función para $x = 0$; es decir, $y = 2(0) + 3 = 3$.
- La recta interseca al eje Y en el punto $(0, 3)$ y el valor 3 coincide con el valor del término independiente.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Indica cuáles de las siguientes funciones son afines.

a. $y = -5$
b. $y = 0{,}04 + 23x$
c. $y = 1 - x^2$
d. $y = 0{,}3x$
e. $y = -2x^2$
f. $y = -0{,}5x + 2$
g. $y = 3x + 0{,}5$
h. $y = 3 + 6x^2$

2 Para cada función elabora una tabla de valores.

a. $f(x) = 3x - 7$
b. $f(x) = 0{,}2x + 0{,}6$
c. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$
d. $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$

Razonamiento

3 Completa a la Tabla 3.25 teniendo en cuenta la relación entre las variables x y y que se muestra en la Tabla 3.24. Luego, escribe una expresión algebraica que represente esta relación.

x	0	1	2	3
y	10	13	16	19

Tabla 3.24

x	0	1	2	3
y	10	10 + ...	10 + ...	10 + ...
	10	10 + ... · 1	10 + ... · 2	10 + ... · 3

Tabla 3.25

4 Determina la pendiente de las siguientes funciones.

a.

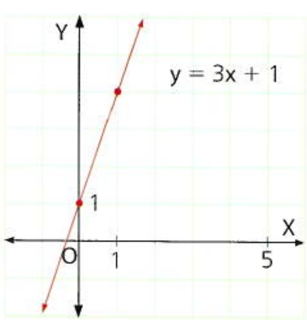


Figura 3.41

b.

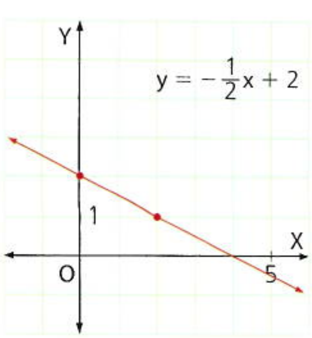


Figura 3.42

5 Relaciona cada tabla con su ecuación.

a.

x	5	−10
y	2	−1

Tabla 3.26

b.

x	4	8
y	−5	−8

Tabla 3.27

c.

x	5	−3
y	−1	1

Tabla 3.28

$y = \frac{-x + 1}{4}$

$y = 0{,}2x + 1$

$y = -\frac{3x}{4} - 2$

6 Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones.

a. $y = 3x$
b. $y = 6x - 3$
c. $y = -5x + 2$
d. $y = \frac{1}{2}x + 3$
e. $y = 3x + 1$
f. $y = 0{,}5x - 0{,}6$

Resolución de problemas

7 La función $y = 7{,}8x$ establece la relación entre el número de calorías quemadas por una persona de 50 kg de peso y la práctica de la natación durante un tiempo x.

a. Elabora una tabla que muestre la relación entre la cantidad de calorías quemadas en diferentes tiempos.
b. Dibuja la gráfica de la función.
c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
d. ¿Cuál es el punto de corte con el eje Y?
e. ¿Cuál es la pendiente de la función?

Evaluación del aprendizaje

i Elabora una tabla de valores para las siguientes funciones y represéntalas en el plano.

a. $f(x) = 3x - 2$
b. $h(x) = -x + \frac{1}{5}$

ii Escribe la expresión de la función que tiene pendiente 3 y ordenada en el origen −2. Represéntala en un sistema de coordenadas.

10 Aplicaciones de las funciones lineales y afines

Saberes previos

El reciclaje es una práctica que contribuye a la conservación de los recursos naturales no renovables. Por ejemplo, por cada 100 toneladas de Tetra Brik reciclados es posible recuperar 75 toneladas de papel, lo que tiene un impacto directo en la reducción de la tala de árboles.

Determina en esta situación, las variables dependiente e independiente y escribe la función que las relaciona.

Analiza

Para pasar de grados Fahrenheit (°F) a grados centígrados (°C) se aplica la siguiente fórmula:

$$°C = \frac{(°F - 32) \cdot 5}{9}$$

Es decir,

$$f(x) = \frac{(x - 32) \cdot 5}{9}$$

- Según lo anterior, ¿cuántos grados centígrados equivalen a 18 grados Fahrenheit?

Conoce

Para calcular la equivalencia que hay entre el número de grados centígrados y el de grados Fahrenheit, se sustituye x por 18 °F en la función, así:

$$f(18) = \frac{(18 - 32) \cdot 5}{9} \approx -7{,}8\ °C$$

En la Figura 3.43 se observa la representación gráfica de la función.

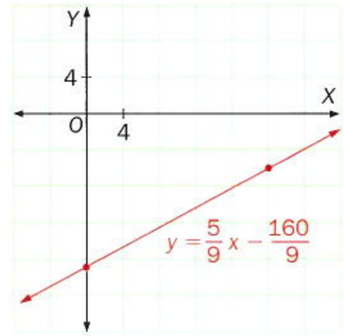


Figura 3.43

Las funciones lineales y afines tienen muchas aplicaciones en ciencias, economía, medicina, física, geología y astronomía.

10.1 Aplicaciones en las ciencias

Muchas ciencias se valen de funciones afines y lineales en la modelación y análisis de comportamientos como la velocidad de los objetos, la medida de distancias o el crecimiento proporcional de un elemento, entre otras.

Ejemplo 1

Dos ciudades A y B están a una distancia de 227,5 km. Si un carro rojo parte de la ciudad A hacia la ciudad B con una velocidad de 40 km/h, y al mismo tiempo parte un carro verde de la ciudad B hacia la ciudad A con una velocidad de 25 km/h, ¿en qué lugar se cruzan los dos carros?, ¿cuánto tiempo emplean?

- Se puede representar la información en una gráfica en la que se muestre la velocidad de los dos autos, tal como en la Figura 3.44.

  En este caso, se observa que la ecuación $y = 40t$ representa la velocidad del carro rojo y la ecuación $y = -25t + 227{,}5$ representa la velocidad del carro verde. Esta última ecuación corresponde a una función afín y la primera a una lineal.

- Para determinar con exactitud el tiempo en el que se cruzan los dos carros, se igualan las ecuaciones que representan sus velocidades.

$$40t = -25t + 227{,}5 \qquad t = \frac{227{,}5}{65} \qquad t = 3{,}5$$

Al reemplazar $t = 3{,}5$ en la ecuación $y = 40t$, se tiene que $y = 140$. Luego, se concluye que los carros se cruzan a las tres horas y media a una distancia de 140 km de la ciudad A.

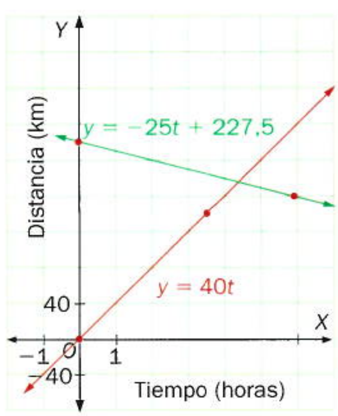


Figura 3.44

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

10.2 Aplicaciones en la economía

En economía se modelan funciones relacionadas con los costos, las utilidades, la demanda, la oferta, etc.

Ejemplo 2

Para revelar e imprimir las fotos de una cámara digital, se pagan \$ 2 000 por el procesado de la tarjeta de memoria y un costo adicional de \$ 250 por foto.

En esta situación, si x es el número de fotos y y es el costo, la ecuación de la función es $y = 250x + 2\,000$.

En la Figura 3.45 se observa la gráfica de la función. En esta no se pueden unir los puntos, puesto que no tendría sentido revelar, por ejemplo, 2,3 fotos.

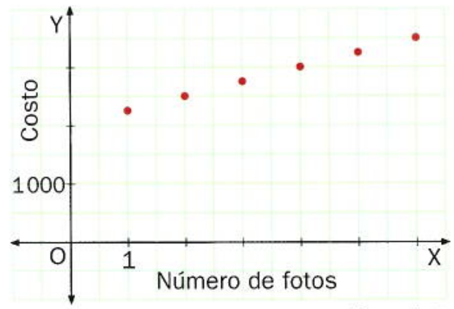


Figura 3.45

Actividades de aprendizaje

Modelación

1. En la Tabla 3.29 se relaciona el volumen de algunos cilindros de 10 cm de altura con el radio de su base.

Radio (cm)	0	2	3	4
Volumen (cm³)	0	40π	90π	160π

Tabla 3.29

a. Halla la ecuación de la relación.

b. Construye la gráfica de la función que relaciona los datos de la tabla.

Razonamiento

2. La señal preventiva de la Figura 3.46 indica que hay un descenso peligroso en la carretera sobre la que se desplaza un carro.

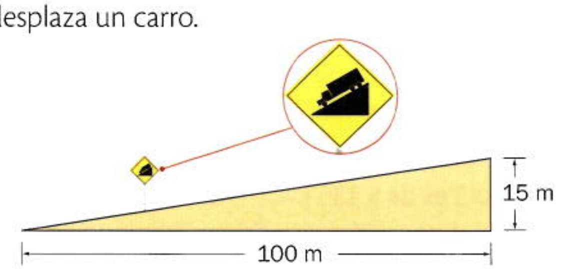


Figura 3.46

a. Calcula la pendiente de la recta sobre la que está ubicada la carretera por la que desciende el auto.

b. Explica el significado de la pendiente en esta situación.

Resolución de problemas

3. Para colaborar con las personas sin techo, una ONG elabora un periódico de reparto callejero. Cada vendedor recibe un salario fijo de \$ 75 000 al mes y, además, \$ 150 por ejemplar vendido.

a. Escribe la fórmula y representa la gráfica de la función que relaciona el número de periódicos vendidos con el dinero que recibe un vendedor al mes.

b. ¿Es una función afín o lineal?

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente?

d. ¿Cuál es el término independiente?

e. ¿Cuántos ejemplares tiene que vender un repartidor para cobrar en un mes \$ 555 000?

Evaluación del aprendizaje

A un tanque que contiene 150 L de gas propano se le inyecta del mismo gas a razón de 3 L por segundo.

a. Determina la función que relaciona las dos variables mencionadas

b. Calcula el contenido del tanque a los 10 s de iniciar la inyección del gas.

Practica más

Ecuaciones

Comunicación

1 Selecciona la ecuación equivalente a la dada en cada caso.

a. $x + 6 = -12$

$4x - 13 = 20$ $\qquad$ $-3x = 54$

b. $x - 250 = 100$

$350 - x = 400$ $\qquad$ $50 + x = 400$

Ecuaciones de primer grado

Comunicación

2 Expresa cada situación utilizando ecuaciones lineales. Elabora una pregunta por cada una y resuélvela.

a. La suma de tres números consecutivos es 51.

b. El perímetro de un triángulo equilátero es 36.

c. El perímetro de un rectángulo es 360 cm y su largo es el triple de su ancho.

d. El 30% de descuento de una maleta es \$ 15 000.

Comunicación

3 Escribe una situación que pueda ser modelada por cada una de estas ecuaciones.

a. $3x + 3 = 141$ $\qquad$ b. $x + \dfrac{x}{3} = 1$

c. $x + 21 = 45$ $\qquad$ d. $\dfrac{x}{3} + 12 = 141$

Ejercitación

4 Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $-3x + 12 = 141$ $\qquad$ b. $x - 15 = -41$

c. $23 + 3 = x + 2$ $\qquad$ d. $32 - 4 = 4x + 4$

Resolución de problemas

5 Resuelve cada situación con el uso de ecuaciones.

a. Una fábrica de botones produce 1 500 botones en una hora, pero la décima parte salen imperfectos. ¿Cuántos botones buenos se producen en dos horas?

b. La suma de tres números pares consecutivos es 54. ¿Cuáles son los tres números?

c. Tres hermanos reciben una herencia de \$ 920 000 000. Luis recibe el triple que Ana, y Pedro, el doble que Ana. ¿Cuánto recibe cada uno?

d. Las entradas a un concierto cuestan \$ 45 000 la general y \$ 90 000 la platino. Si asistieron 530 personas y los ingresos fueron de \$ 39 600 000, ¿cuántas personas entraron a general y cuántas a platino?

Dependencia entre magnitudes

Comunicación

6 Completa las tablas y realiza las representaciones gráficas correspondientes.

a. El costo de un segundo a celular es de \$ 3,3.

Min	0	1	2	3	4	5	6
Valor (\$)							

Tabla 3.30

b. El costo de un pasaje de bus es de \$1 550.

Pasaje	0	1	2	3	4
Valor (\$)					

Tabla 3.31

Funciones

7 Identifica si las gráficas son o no funciones. Determina el dominio y el rango en las que lo sean.

a.

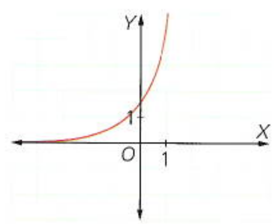


Figura 3.47

b.

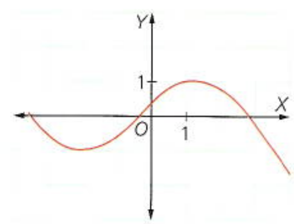


Figura 3.48

c.

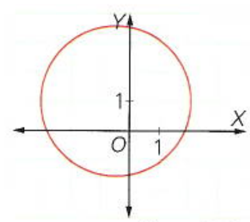


Figura 3.49

d.

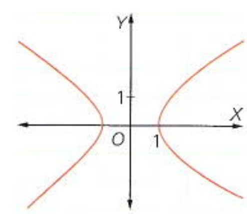


Figura 3.50

Continuidad y variación de funciones

Resolución de problemas

8 Traza la gráfica de cada función e indica si es continua o discontinua.

a. El precio a pagar por consumo de energía en estrato 3 es de \$ 135 kw/h más un cargo fijo de \$ 7 000. Si el consumo excede los 500 kw/h el precio del kw/h se incrementa a \$ 170.

b. Una distribuidora vende chocolatinas a \$ 70 cada una, si se compran hasta 15 000 unidades. Si se compran entre 15 000 y 30 000 el costo disminuye a \$ 50 cada una. Para cantidades mayores a 30 000 el costo es de \$ 45.

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Seguir un método

Problema

Un auto está esperando la luz verde. Cuando el semáforo cambia a verde, el auto arranca y aumenta poco a poco su velocidad. La distancia que recorre se modela por la función $d(x) = 2t^2$, t expresado en segundos y la distancia en metros. ¿Cómo cambia la distancia que recorre el auto a través del tiempo?

1. Comprende el problema

- ¿Cuáles son las variables involucradas en el problema?

  R: Las variables son el tiempo y la distancia recorrida.

- ¿Qué se debe averiguar?

  R: La relación que se establece entre el tiempo que transcurre y la distancia que el automóvil recorre.

2. Crea un plan

- Identifica la variable independiente y la dependiente. Después, representa en una tabla y en una gráfica la relación entre el tiempo y la distancia recorrida.

3. Ejecuta el plan

- La distancia que recorre el automóvil depende del tiempo que transcurre.
- Al reemplazar t por algunos números, se tiene que:

$t(s)$	0	1	2	3	4	5	6
$d(m)$	0	2	8	18	32	...	...

Tabla 3.32

- Al representar lo anterior gráficamente, se obtiene:

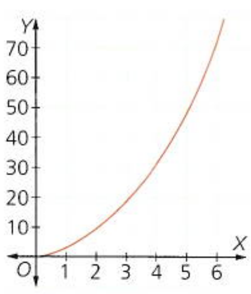


Figura 3.51

R: La distancia que recorre el auto aumenta cada vez más, pero no de manera directamente proporcional.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la función $d(t)$ es creciente en todo su dominio.

Aplica la estrategia

1. En un triángulo equilátero, la altura está dada por la expresión $h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, donde l es el lado del triángulo. Según lo anterior, ¿cómo cambia el área del triángulo al variar su lado?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. La función $f(x) = 3\,000x + 2\,000$ representa el costo de producción de ciertos artículos en una fábrica. ¿Cómo varían los costos cuando la producción pasa de 250 a 450 artículos?

Formula problemas

3. En cada caso, inventa una situación que se resuelva planteando la ecuación dada.

   a. $y = 40x + 10$

   b. $y = 5x + 20$

Enriquece tu vocabulario

- Escribe el significado de los pasos que se siguen en la ruta metodológica para resolver un problema de ecuaciones de primer grado.
  - Comprende:
  - Planea:
  - Resuelve:
  - Comprueba:

Evaluación del aprendizaje

Ecuaciones

Modelación

1 Relaciona cada enunciado con su expresión algebraica correspondiente. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. El doble de un número más 3 es 12. • $2x - 3 = 12$

b. Tres veces un número menos 2 es 12. • $3x - 2x = 12$

c. Tres veces el doble de un número es 12. • $2x + 3 = 12$

d. El doble de un número menos 3 es 12. • $3(2x) = 12$

e. El triple de un número menos dos veces el número es 12. • $3x - 2 = 12$

Ejercitación

2 Relaciona cada ecuación con su solución. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $6x = 58$ • 34

b. $107 - x = 73$ • 329

c. $-\frac{2}{5} = x + \frac{5}{3}$ • $\frac{29}{3}$

d. $16 + x = -35$ • $-\frac{31}{15}$

e. $x + 1(-126) = 203$ • -51

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ejercitación

3 Halla la medida de cada uno de los ángulos. ACTIVIDAD DE REFUERZO

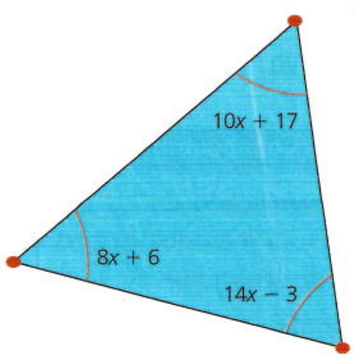


Figura 3.52

4 Determina tres números pares consecutivos tales que la suma del primero más cinco veces el segundo sea cinco veces el tercero. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Problemas con ecuaciones de primer grado

Resolución de problemas

5 Dos autos parten desde un mismo punto en direcciones opuestas. Si uno viaja a 85 km/h y el otro a 65 km/h, ¿cuánto tardarán en estar a una distancia de 300 km?

6 Un empleado recibe \$1 968 000 de salario mensual, luego de que le aplican deducciones del 18%. ¿Cuánto es el salario total del empleado? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Comunicación

7 La nota máxima en una clase de matemáticas es 5,0. Las calificaciones de un estudiante de matemáticas son 4,8 y 3,6. ¿Cuál debe ser la nota del tercer examen para que la definitiva sea igual a 4,8?, ¿qué puedes concluir? ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Ejercitación

8 Establece las dimensiones de cada uno de los rectángulos si la suma de sus áreas es igual a 56. ACTIVIDAD DE REFUERZO

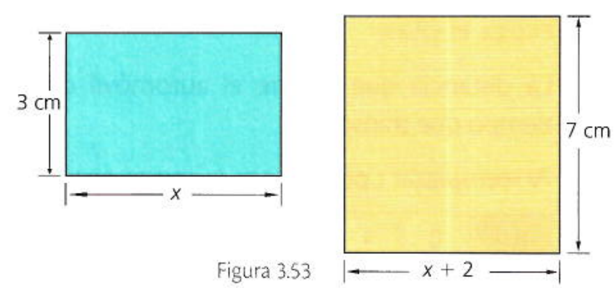


Figura 3.53

Dependencia entre magnitudes

Ejercitación

9 Determina en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). VERDADERO/FALSO

a. El dinero recolectado depende del número de personas que ingresen al estadio. ( )

b. La temperatura ambiente depende de la fuerza con la que sople el viento. ( )

c. La distancia recorrida depende del tiempo que dure el trayecto. ( )

d. La velocidad con la que cae un objeto depende de su masa. ( )

Funciones

Razonamiento

10 Con base en la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 0,5}$, establece si las afirmaciones son correctas o no. VERDADERO/FALSO

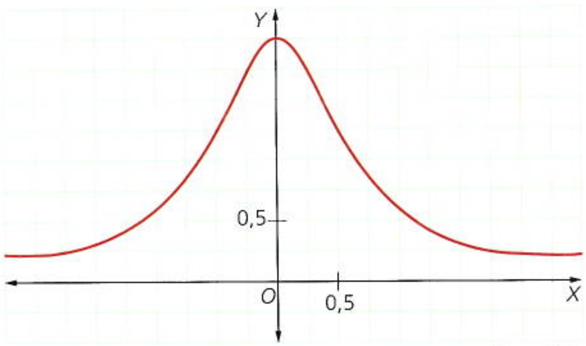


Figura 3.54

a. $D(f) = \mathbb{R}$ ( )

b. $D(f) = (0, 2]$ ( )

c. La imagen de $x_1 = -2$ es mayor que la imagen de $x_2 = 2$. ( )

d. El punto de intersección de la función con el eje Y es $(2, 0)$. ( )

e. La gráfica de la función cortará al eje X en dos puntos. ( )

Continuidad y variación de funciones

Comunicación

11 Determina la variación de la función $f(x) = x^2 - 9$ en $[-3, 3]$. ¿Es correcto afirmar que la variación es nula?, ¿por qué ocurre? Explica tu respuesta. PREGUNTA ABIERTA

Crecimiento y decrecimiento de funciones

Razonamiento

CUESTIONARIO

12 En la Figura 3.55 se representa la distancia recorrida (m) por un vehículo con respecto al tiempo (min).

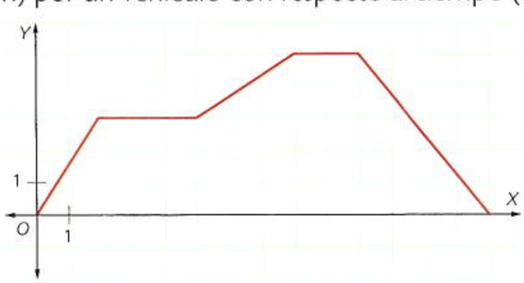


Figura 3.55

a. ¿Qué movimiento realizó en el intervalo $[2, 5]$?

b. ¿Qué movimiento realizó en el intervalo $[8, 14]$?

c. En total, ¿cuánta distancia recorrió?

Función lineal

Razonamiento

13 En cada caso ubica los puntos en el plano cartesiano y luego traza la recta que pasa por ellos. Determina si cada recta corresponde a una función lineal o no. Justifica tu respuesta. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $(-1, 2)$ y $(1, -4)$

b. $(-2, -3)$ y $(0, 1)$

c. $(3, 6)$ y $(5, 10)$

d. $(-4, 5)$ y $(4, -5)$

Modelación

14 Determina una expresión para calcular el dinero que se recibe por el ingreso a una piscina, si cada deportista debe pagar \$ 4 500. ¿Cuánto dinero se recolectó si a la piscina ingresaron 83 personas? ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

15 Un grifo suministra 12 litros de agua en 8 minutos. Escribe una función que permita conocer la cantidad de litros que suministra en grifo en un tiempo de t minutos. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Función afín

Ejercitación

16 Determina la ecuación de la recta que se representó en la Figura 3.56. ACTIVIDAD DE REFUERZO

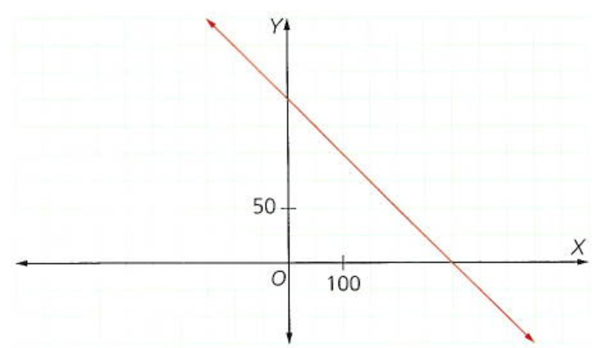


Figura 3.56

Resolución de problemas

17 El servicio de gas genera una factura mensual con un cargo fijo de \$ 2 728 y un costo de \$ 1 327 por metro cúbico consumido. Establece una función afín y calcula el valor del recibo si en un mes el consumo fue de $3,83\ m^3$. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4 Geometría plana y del espacio

Ya sabemos

- Reconocer elementos geométricos tales como ángulos, triángulos, cuadriláteros y circunferencias.

Vamos a aprender

- A entender las propiedades de las figuras y los sólidos geométricos que permiten resolver problemas de la vida real.

Nos sirve para

- Explicar las propiedades de objetos mediante representaciones geométricas.

1 Elementos básicos de la demostración

Saberes previos

En las calles y carreteras hay demarcaciones con líneas continuas y líneas discontinuas. ¿Sabes que significan estos dos tipos de demarcaciones?

Analiza

En la Figura 4.1 se observa la representación gráfica de un segmento.

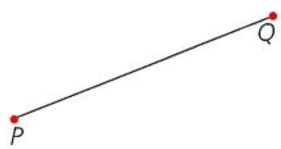


Figura 4.1

- Escribe la definición de este objeto geométrico.

Conoce

Para construir cualquier definición geométrica se parte del conocimiento de los elementos básicos tales como el punto, la recta y el plano (Figura 4.2).

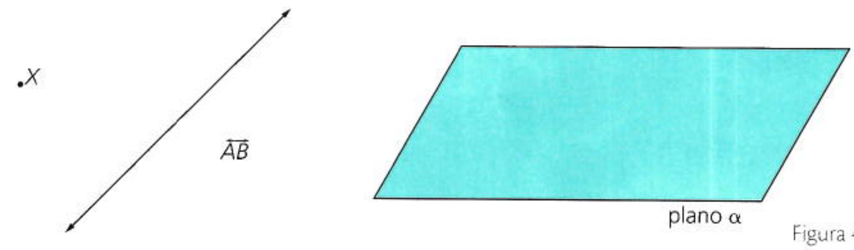


Figura 4.2

De ahora en adelante, se considerarán las rectas y planos como conjuntos de puntos.

Según lo anterior, para dos puntos cualesquiera A y B (de la $\overrightarrow{AB}$) se puede definir el segmento AB como el conjunto de puntos A y B y todos los puntos que están entre A y B. El segmento AB se denotará por $\overline{AB}$ y se entenderá que los puntos A y B son sus extremos.

Una **definición** es un enunciado que especifica las características de un objeto de manera que pueda identificarse y diferenciarse de otros.

1.1 La demostración en geometría

En ocasiones es necesario comprobar algunas propiedades de los objetos geométricos empleando el **método deductivo** que consiste en demostrar algunas afirmaciones, utilizando otras, que son aceptadas como verdaderas.

Las afirmaciones que se asumen como verdaderas, se llaman axiomas y postulados.

Los **axiomas** son enunciados simples que se aceptan como verdades universales. En geometría, son enunciados intuitivamente evidentes. Los **postulados** son enunciados más complejos, que describen propiedades fundamentales de los objetos geométricos y se aceptan como verdades.

Ejemplo 1

En los *Elementos* de Euclides (un tratado matemático y geométrico escrito por este célebre matemático griego) se presenta el siguiente ejemplo de un axioma: *"cosas iguales a una tercera son iguales entre sí."* Mientras que un ejemplo de postulado es: *"un segmento de recta puede ser construido en cualquier dirección a lo largo de una línea recta."* En el primer caso, el axioma presentado es una proposición tan evidente en sí misma que no requiere demostración. En el segundo caso, el postulado que se enuncia se admite sin demostración por un acuerdo previo de la comunidad matemática.

Cuando un enunciado requiere ser demostrado se llama **teorema**.

Un **teorema** es un enunciado que se debe demostrar desde el punto de vista de la lógica, usando las definiciones, axiomas o postulados establecidos.

Ejemplo 2

Identifica si los siguientes enunciados son axiomas, postulados o teoremas.

a. Un plano contiene al menos tres puntos distintos no colineales.

b. Por un punto exterior a una recta pasa solo una recta paralela a la recta dada.

c. Si dos rectas distintas se intersecan, su intersección es un único punto.

Las afirmaciones *a* y *b* son postulados, pero el enunciado *c* es un teorema.

Ejemplo 3

Los axiomas son la base fundamental de la geometría. Algunos axiomas básicos son:

- El espacio tiene infinitos puntos, rectas y planos.
- El plano tiene infinitos puntos y rectas.
- La recta tiene infinitos puntos.
- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Por una recta pasan infinitos planos.

Los métodos de demostración pueden ser **directos** e **indirectos.** El método directo parte de la hipótesis para llegar a la conclusión. El método indirecto parte de la negación de la conclusión para llegar a la negación de la hipótesis.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Los postulados son enunciados que deben comprobarse. ( )

b. Los axiomas son afirmaciones aceptadas como verdaderas. ( )

c. Un axioma es igual a un postulado. ( )

Modelación

2 Haz una representación gráfica de estos postulados de la geometría de Euclides.

a. Una línea recta puede ser dibujada pasando por dos puntos cualquiera.

b. Un segmento de recta puede ser construido en cualquier dirección a lo largo de una línea recta.

c. Un círculo puede ser dibujado siempre que estén dados el centro y el radio.

Resolución de problemas

3 Lee el enunciado y luego responde.

"Toda recta paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales."

- ¿Cuáles son la hipótesis y la tesis de esta demostración?

Evaluación del aprendizaje

En la Figura 4.3, *H*, *J* e *I* representan puntos colineales.

Figura 4.3

¿Bajo qué condiciones se puede hacer esta afirmación?

2 Ángulos

Saberes previos

Las articulaciones en el cuerpo se pueden representar diferentes tipos de ángulos. Supón que representas con un ángulo los elementos que forman la articulación de tu rodilla. ¿Cuál es el ángulo máximo que se puede formar en este caso?

Analiza

Observa las Figuras 4.4 y 4.5.

Figura 4.4

Figura 4.5

- ¿En cuál de las dos figuras está representado un ángulo?

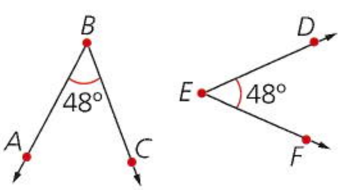


Figura 4.7

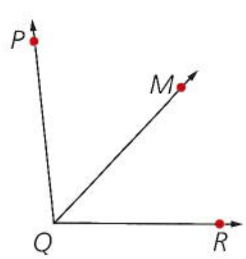


Figura 4.8

Conoce

La Figura 4.5 tiene dos segmentos con un extremo común, mientras que la Figura 4.6 tiene dos semirrectas con el mismo origen.

Por lo tanto, la primera figura no es un ángulo, pero la segunda sí lo es.

Un **ángulo** está formado por dos semirrectas que tienen el mismo origen. Los rayos se llaman **lados**, y el punto de origen, **vértice**.

Ejemplo 1

Los lados del $\measuredangle YXZ$ son las semirrectas $\overrightarrow{XY}$ y $\overrightarrow{XZ}$ y el vértice es el punto X.

Un ángulo se mide en grados. Para indicar la medida del ángulo YXZ de la Figura 4.7, se escribe $m\measuredangle YXZ$. En este caso: $m\measuredangle YXZ = 35°$.

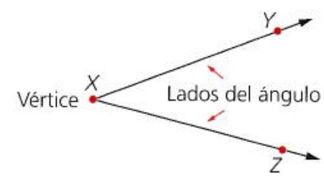


Figura 4.6

2.1 Postulado de la medida de ángulos

A cada ángulo ABC le corresponde un número real entre 0° y 180°.

Cuando dos ángulos tienen la misma medida son **congruentes**. (Figura 4.7.).

Para indicar que dos ángulos son congruentes se utiliza el símbolo $\cong$.

El ángulo ABC es congruente con el ángulo DEF. Se escribe: $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$

2.2 Postulado de la adición de ángulos

La medida de un ángulo se puede calcular por adición y sustracción, teniendo en cuenta el siguiente postulado.

Si un punto M está en el interior del ángulo PQR (Figura 4.8), entonces, se cumple que la medida del ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos interiores. Es decir:

$$m\measuredangle PQR = m\measuredangle PQM + m\measuredangle MQR$$

Ejemplo 2

La medida del ángulo CAB de la Figura 4.9 se puede calcular así:

$m\measuredangle CAD + m\measuredangle DAB = m\measuredangle CAB$

$46° + 73° = m\measuredangle CAB$

$119° = m\measuredangle CAB$

Entonces la medida del ángulo CAB es 119°.

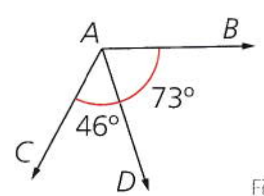


Figura 4.9

2.3 Clases de ángulos según su posición

Los ángulos se pueden clasificar según su posición o según su medida.

Ángulos adyacentes:

Dos **ángulos** son **adyacentes** si tienen en común el vértice y un lado pero no tienen puntos interiores en común.

Ejemplo 3

Los ángulos $\measuredangle X$ y $\measuredangle Y$ de la Figura 4.10 son adyacentes.

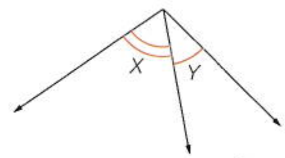


Figura 4.10

Par lineal:

Se les llama así a dos ángulos adyacentes cuyos lados no comunes están sobre la misma recta.

Ejemplo 4

Los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ de la Figura 4.11 forman un par lineal.

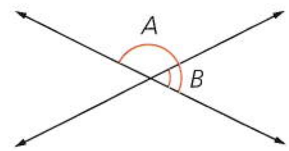


Figura 4.11

Ángulos opuestos por el vértice:

Son aquellos ángulos cuyos lados forman dos pares de rayos opuestos.

Ejemplo 5

Los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$ de la Figura 4.12 son opuestos por el vértice.

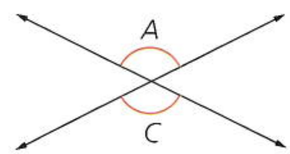


Figura 4.12

Ángulos complementarios y ángulos suplementarios:

Dos **ángulos** son **complementarios** si la suma de sus medidas es 90º.

Dos **ángulos** son **suplementarios** si la suma de sus medidas es 180º.

Ejemplo 6

Los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ de la Figura 4.13 son complementarios porque
$m\measuredangle A + m\measuredangle B = 61° + 29° = 90°$.

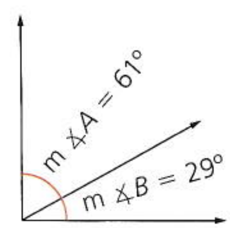


Figura 4.13

2.4 Postulado del suplemento

Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son **suplementarios**.

Ejemplo 7

Los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$ de la Figura 4.14 forman un par lineal.
Entonces, $m\measuredangle A + m\measuredangle B = 180°$.

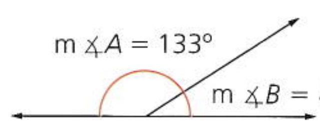


Figura 4.14

Ejemplo 8

En la Figura 4.15 el ángulo $\measuredangle AOC$ mide 180º y el $\measuredangle BOC$ mide 70º. Luego,
$m\measuredangle AOB = m\measuredangle AOC - m\measuredangle BOC = 110°$.

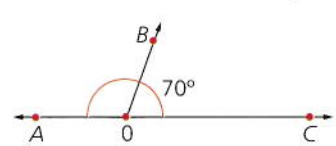


Figura 4.15

2 Ángulos

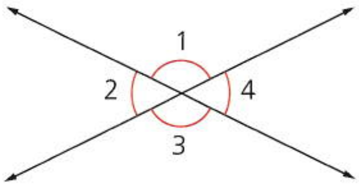


Figura 4.16

Ejemplo 9

Demuestra el teorema: *"los ángulos opuestos por el vértice son congruentes."*

Demostrar este teorema es equivalente a probar que en la Figura 4.16 el $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4$. En la Tabla 4.1 se presenta la demostración.

Afirmación	Razón
$\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ forman un par lineal. $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 4$ forman un par lineal.	Definición de par lineal.
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = 180°$ $m\measuredangle 1 + m\measuredangle 4 = 180°$	Los ángulos que forman un par lineal son suplementarios.
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = m\measuredangle 1 + m\measuredangle 4$	Igualando las expresiones.
$m\measuredangle 2 = m\measuredangle 4$	Se simplifica la igualdad.
$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4$	Definición de congruencia.

Tabla 4.1

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 De acuerdo con la Figura 4.17, encuentra:

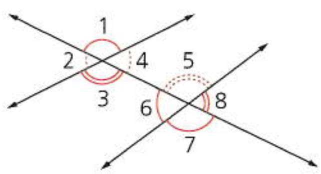


Figura 4.17

a. Los ángulos adyacentes con el $\measuredangle 1$.

b. Un par de ángulos opuestos por el vértice.

c. Un ángulo congruente con el $\measuredangle 3$.

2 Clasifica los ángulos de cada grupo de según la posición de sus lados.

a.

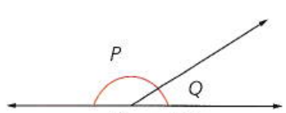


Figura 4.18

b.

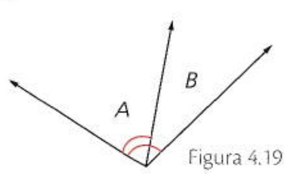


Figura 4.19

c.

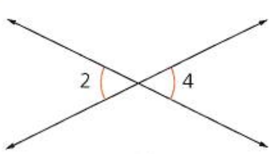


Figura 4.20

d.


Figura 4.21

Comunicación

3 Halla el suplemento de cada ángulo.

a. 38°   b. 100°   c. 92°

d. 115°   e. 87°   f. 102°

4 Ten en cuenta los ángulos de la Figura 4.22.

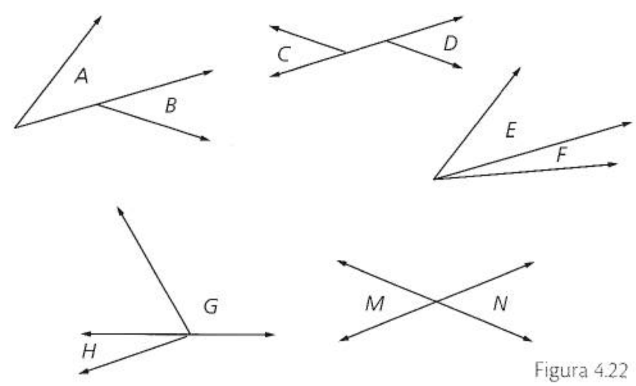


Figura 4.22

¿Cuáles pares de ángulos son opuestos por el vértice?, ¿cuáles son adyacentes?

5 Determina y explica con tus palabras si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

b. Dos ángulos agudos pueden ser suplementarios.

Razonamiento

6 Calcula la medida del ángulo CAB de la Figura 4.23.

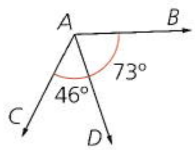


Figura 4.23

7 Halla la suma de las medidas de los ángulos A y B. Clasifica los ángulos que intervienen en la adición.

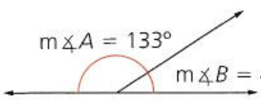


Figura 4.24

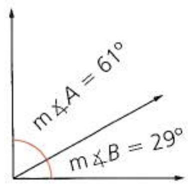


Figura 4.25

8 Halla los valores de los ángulos α, β y δ

a.

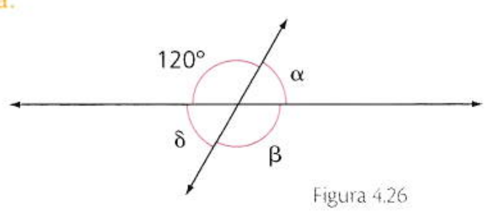


Figura 4.26

$\alpha =$
$\beta =$
$\delta =$

b.

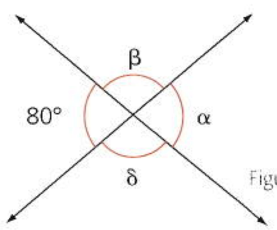


Figura 4.27

$\alpha =$
$\beta =$
$\delta =$

c.

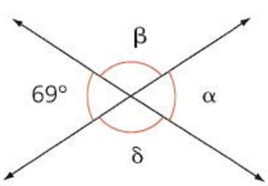


Figura 4.28

$\alpha =$
$\beta =$
$\delta =$

Modelación

9 ¿Cuál es el valor de α en cada figura? Explica.

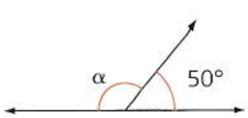


Figura 4.29

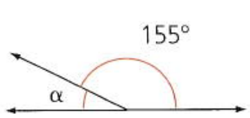


Figura 4.30

Resolución de problemas

10 Observa las figuras. Luego, responde las preguntas.

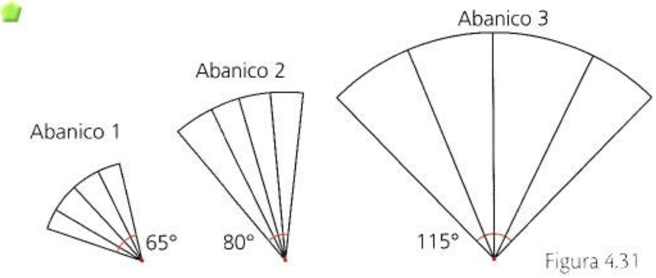


Figura 4.31

a. ¿Cuánto mide el ángulo formado al ubicar los abanicos 3 y 2, compartiendo uno de sus lados y coincidiendo en el vértice?

b. ¿Cuáles abanicos pueden formar ángulos suplementarios? Presenta un argumento gráfico.

11 Completa la medida de los ángulos, (Figura 4.32).

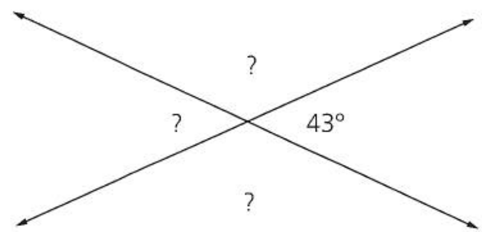


Figura 4.32

12 En la torre de control del aeropuerto, Catalina y Simón dirigen la maniobra de aterrizaje. El avión debe girar 90° y ha girado 45,6°. ¿Cuántos grados más tiene que girar para completar la maniobra?

Evaluación del aprendizaje

Los profesores Herlinda y Humberto llevaron media torta de mora para compartir con sus cursos. Según el número de estudiantes decidieron que el ángulo de corte de la porción de Humberto debía medir 97°. Entonces, ¿cuánto midió el ángulo de la porción de Herlinda?

3 Ángulos determinados por rectas paralelas y una secante

Saberes previos

Luis armó un andamio y cuando terminó se dio cuenta de que probablemente se va a caer. Observa el esquema de andamio y explica la razón de la afirmación de Luis.

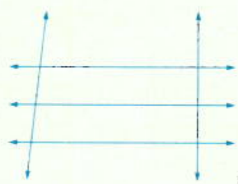


Figura 4.33

Analiza

Se quiere hacer una estructura como la que se observa en la Figura 4.34.

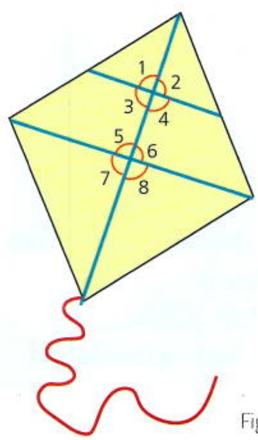


Figura 4.34

- Si los palos dispuestos horizontamente deben ser paralelos, ¿qué especificaciones deben cumplir los ángulos marcados en la figura?

Conoce

3.1 Relaciones de congruencia entre ángulos determinados por paralelas y una secante

Se pueden identificar las propiedades de los **ángulos formados entre rectas paralelas cortadas por una secante**.

Si las rectas paralelas *a* y *b* de la Figura 4.35 son cortadas por la secante *t*, se forman ocho ángulos que reciben nombres diferentes según su posición.

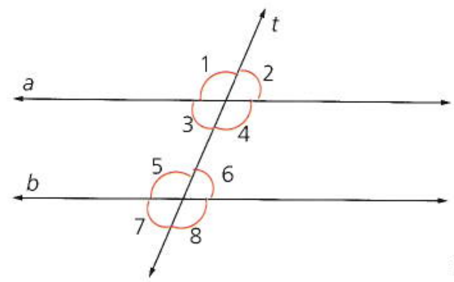


Figura 4.35

- **Ángulos alternos internos.** Están en lados opuestos con respecto a la secante *t* y se encuentran en la región comprendida entre las rectas *a* y *b*.

  Por lo tanto, los $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 6$ son ángulos alternos internos. También lo son los $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$. En todo caso, los ángulos alternos internos son congruentes entre sí.

- **Ángulos alternos externos.** Están en lados opuestos con respecto a la secante *t* y se encuentran fuera de la región comprendida entre las rectas *a* y *b*.

  Se observa que los $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 8$ son ángulos alternos externos, al igual que los $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 7$. En todo caso, los ángulos alternos internos son congruentes entre sí.

Por lo tanto, se tienen las siguientes relaciones de congruencia:

$$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 6 \text{ y } \measuredangle 4 \cong \measuredangle 5 \qquad \measuredangle 1 \cong \measuredangle 8 \text{ y } \measuredangle 2 \cong \measuredangle 7$$

3.2. Ángulos correspondientes entre rectas cortadas por una secante

En la Figura 4.36 los ángulos nombrados como $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 1'$ son **correspondientes.**

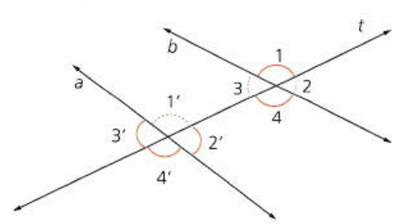


Figura 4.36

Análogamente, son pares de ángulos correspondientes:

$\measuredangle 2$ y $\measuredangle 2'$ $\qquad$ $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 3'$ $\qquad$ $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 4'$

Postulado: si dos rectas paralelas son intersecadas por una secante, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 En la Figura 4.37 $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{n}$, encuentra el valor de los ángulos *W*, *X*, y *Y*.

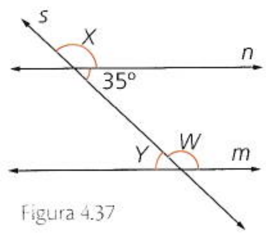


Figura 4.37

a. $m\measuredangle Y =$ ☐ porque los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes (teorema).

b. $m\measuredangle X =$ ☐ porque los ángulos que forman un par lineal son suplementarios (teorema).

c. $m\measuredangle W =$ ☐ porque los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes (postulado).

Ejercitación

2 Observa la Figura 4.38. Luego, haz lo que se indica a continuación.

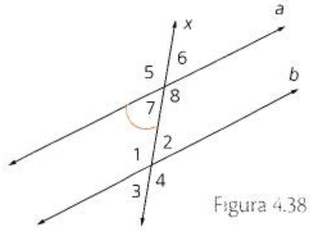


Figura 4.38

Si se sabe que las rectas *a* y *b* son paralelas:

a. Identifica un par de ángulos alternos internos.

b. Nombra dos ángulos alternos externos.

c. Marca un par de ángulos correspondientes.

Razonamiento

3 Encuentra el valor de la incógnita en cada caso.

a. $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{l}$

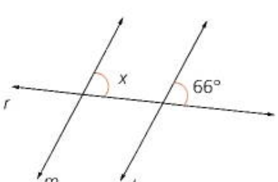


Figura 4.39

b. $\overrightarrow{t} \parallel \overrightarrow{s}$

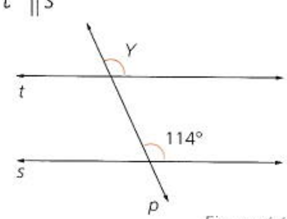


Figura 4.40

c. $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{l}$

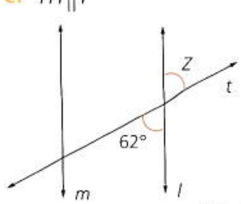


Figura 4.41

d. $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{r}$

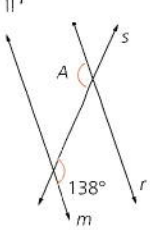


Figura 4.42

Resolución de problemas

4 Daniel pegó un afiche en la pared de su habitación de la siguiente manera:

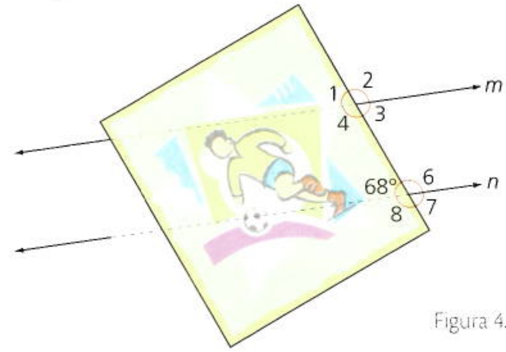


Figura 4.43

Si se sabe que $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{n}$, responde:

a. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle 1$?

b. ¿Cómo están relacionados los $\measuredangle 6$ y $\measuredangle 8$?

c. Si Daniel desea ubicar correctamente el afiche, ¿en cuánto se reduce la medida del $\measuredangle 2$?

Evaluación del aprendizaje

i Encuentra el valor de *x* en la Figura 4.44.

$\measuredangle\alpha = (3x + 5)°$ y $\measuredangle\beta = (5x - 25)°$.

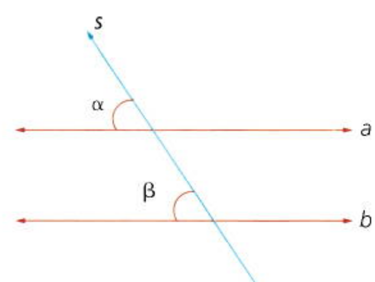


Figura 4.44

ii En la Figura 4.45 $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, $m\measuredangle 1 = 40°$ y $m\measuredangle 2 = 120°$. ¿Cuál es la medida de los demás ángulos señalados?

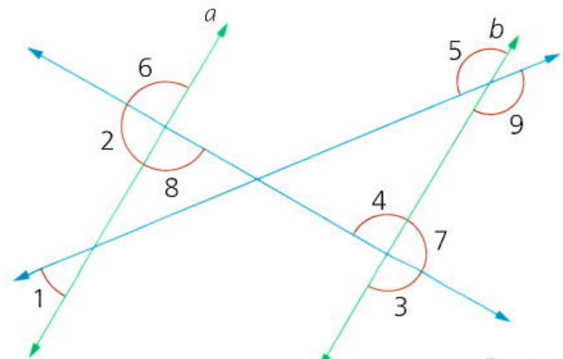


Figura 4.45

4 Polígonos

Saberes previos

Observa el piso de tu salón de clase, el de tu casa y el de algún otro lugar que frecuentes y escribe qué forma tienen las baldosas que los recubren.

Analiza

Don Ismael quiere embaldosar las paredes de su baño y debe elegir uno de los tres diseños siguientes:

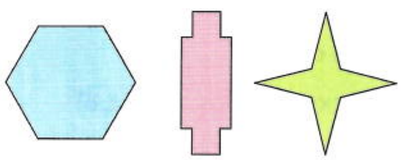


Figura 4.46

- ¿Cuál será la mejor elección para que las paredes queden recubiertas con la misma baldosa?

Conoce

Aunque las tres formas de baldosas son modelos creativos, solamente la primera, en forma de hexágono regular, le permitirá a don Ismael obtener una pared completamente cubierta con baldosas de la misma forma. Observa el ejemplo de la Figura 4.47:

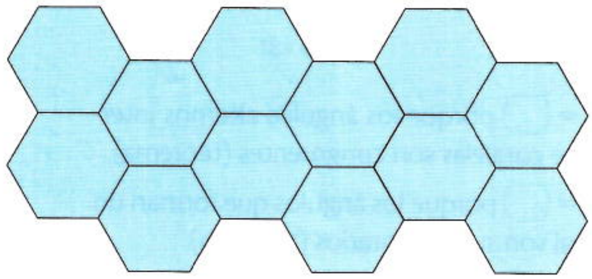


Figura 4.47

Algunas formas poligonales tienen las propiedad de recubrir completamente un plano sin dejar espacios; cuando un polígono cumple con esta característica se dice que **tesela** el plano.

Ejemplo 1

El cuadrilátero cóncavo de la Figura 4.48 tesela el plano. Observa también la Figura 4.49.

Figura 4.48

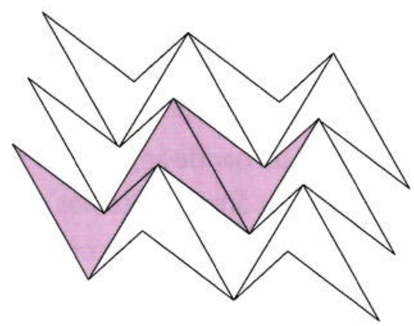


Figura 4.49

Aunque muchos teselados se logran con polígonos regulares, una condición importante para identificar polígonos que recubran el plano es la de que la suma de los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice sea 360°. Esto se verifica en las figuras 4.50 a 4.52

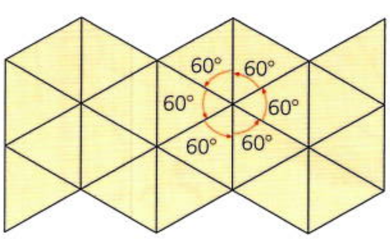


Figura 4.50

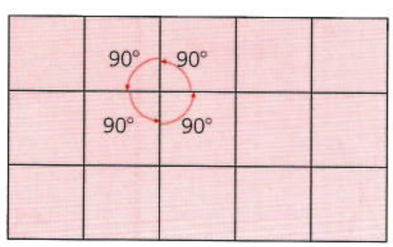


Figura 4.51

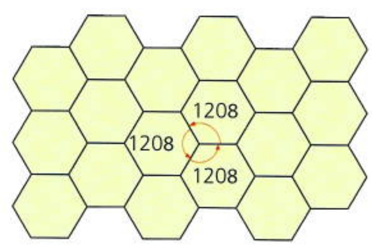


Figura 4.52

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Observa detenidamente los siguientes polígonos regulares y determina si es posible teselar con ellos una superficie.

a.

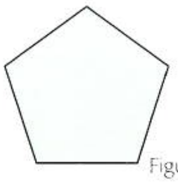


Figura 4.53

b.

Figura 4.54

c.

Figura 4.55

d.

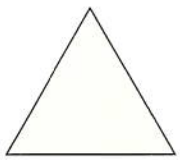


Figura 4.56

2 Construye dos tipos diferentes de rombos y recubre con cada uno la superficie de una cartulina conservando los patrones mostrados.

a.

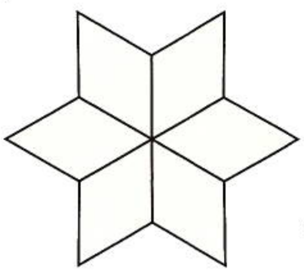


Figura 4.57

b.

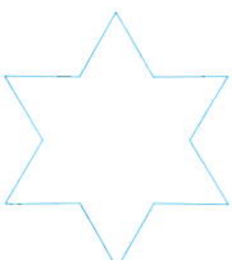


Figura 4.58

Razonamiento

3 Analiza, responde y justifica tu respuesta con un dibujo que se relacione.

a. ¿Todos los tipos de trapecios teselan la superficie?

b. ¿Qué tipos de triángulos teselan una superficie? ¿Qué tipos de triángulos no teselan una superficie?

c. ¿Para que un polígono recubra una superficie debe ser regular?

d. ¿Es posible recubrir una superficie con círculos?

Comunicación

4 Reconstruye el polígono mostrado en la imagen y elabora un modelo de recubrimiento similar pero con tu toque artístico personal.

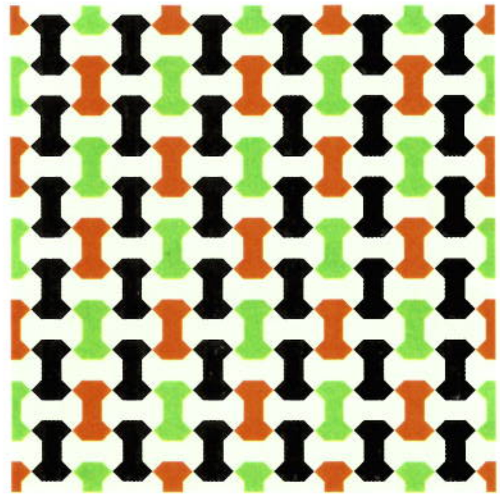


Figura 4.59

5 Lee el siguiente texto. Luego, realiza lo que se indica.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) fue un artista holandés conocido por reflejar en sus obras, su visión única de las matemáticas en numerosas representaciones gráficas.

a. Averigua más datos y curiosidades acerca de la vida y obra de Escher.

b. Establece la relación entre su obra y las matemáticas y comparte tus hallazgos con tus compañeros.

Evaluación del aprendizaje

i Observa el cuadrilátero asimétrico y analiza la forma en la que se acomodan los ángulos para que dicho polígono tesele una superficie.

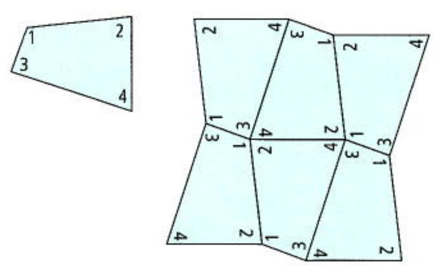


Figura 4.60

ii Escribe una conclusión en relación con los ángulos del cuadrilátero anterior y los recubrimientos de superficies.

5 Construcción de líneas notables en el triángulo

Saberes previos

Dibuja un triángulo y marca sus tres vértices; haciendo una estimación del centro, construye una circunferencia que pase exactamente por los tres vértices de este triángulo.

Analiza

La plaza principal de cierto pueblo tiene la forma que se observa en la Figura 4.61.

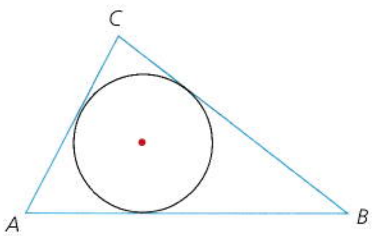


Figura 4.61

- Si se quiere ubicar una fuente en el punto central del círculo, ¿cómo pueden los ingenieros determinar la posición exacta de dicho punto?

Conoce

El plano de la plaza se representó como un triángulo con una circunferencia inscrita en él. El centro de esta circunferencia es el punto en el que se cortan las bisectrices del triángulo (Figura 4.62).

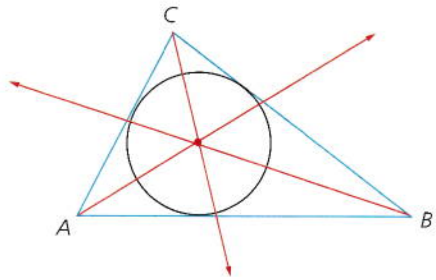


Figura 4.62

Las bisectrices son uno de los tipos de líneas notables de un triángulo.

Las **líneas notables de un triángulo** son: las **alturas**, las **bisectrices**, las **mediatrices** y las **medianas**.

- **Altura:** es cada uno de los tres segmentos perpendiculares que se pueden trazar desde uno de los vértices del triángulo hasta el lado opuesto. Se cortan en un punto llamado **ortocentro** y se trazan así:

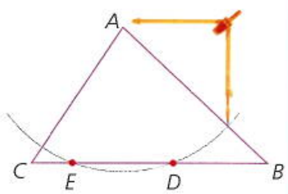


Figura 4.63

1. Se ubica el compás en uno de los vértices y se traza un arco que corte en dos puntos el lado opuesto.

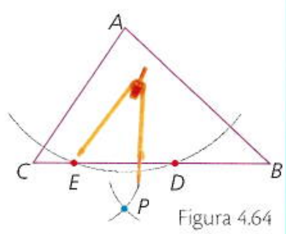


Figura 4.64

2. Se hace centro en cada punto y se traza un arco. Los arcos se cortan en un punto p.

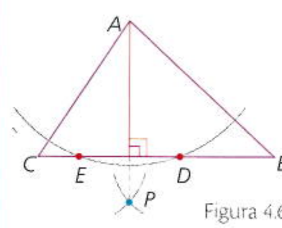


Figura 4.65

3. Se traza la altura uniendo el vértice con el punto de corte p.

- **Bisectriz:** es la semirrecta que divide un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos congruentes. Se cortan en un punto llamado **incentro**. Una bisectriz se traza así:

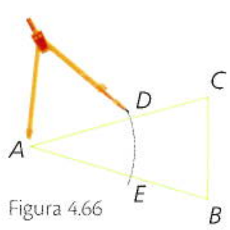


Figura 4.66

1. Se ubica el compás en uno de los vértices y se traza un arco que corte en un punto cada uno de los lados.

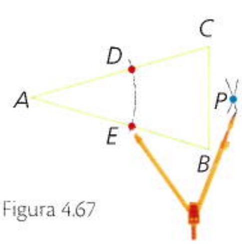


Figura 4.67

2. Se hace centro en cada punto y se traza un arco. Los arcos se cortan en un punto P.

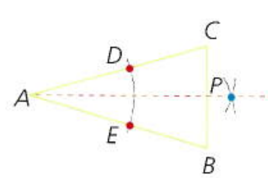


Figura 4.68

3. Se traza la bisectriz uniendo el vértice con el punto de corte P.

- **Mediatriz de un lado:** es la recta perpendicular en el punto medio de cada uno de los tres lados del triángulo. Se cortan en un punto llamado **circuncentro** y se trazan así:

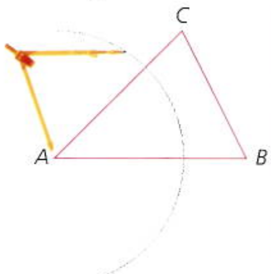


Figura 4.69

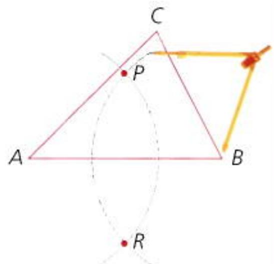


Figura 4.70

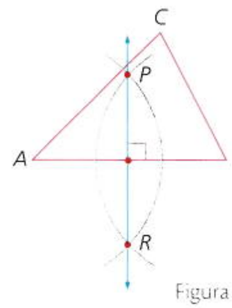


Figura 4.71

1. Se hace centro en uno de los extremos de un lado del triángulo, con una abertura mayor a la mitad de la longitud del lado, y se traza un arco grande.
2. Con la misma abertura del compás se hace centro en el otro extremo del lado y se traza un arco que corta el anterior en dos puntos, *P* y *R*.
3. Se traza la mediatriz uniendo con una línea los dos puntos de corte que se hallaron en el paso anterior.

- **Mediana:** cada uno de los tres segmentos que unen un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Se cortan en un punto llamado **baricentro**.

Ejemplo 1

Traza la mediana de un triángulo cualquiera *ABC*.

Este es el proceso para trazar una de las medianas de un triángulo.

1. Con el compás se hace centro en *A* y, con una abertura mayor que la mitad del segmento *AC*, se trazan dos arcos a uno y otro lado del segmento (Figura 4.72).

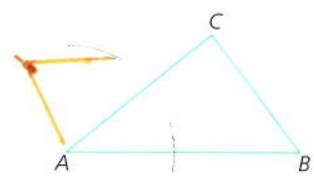


Figura 4.72

2. Se repite el proceso en el vértice *C*, marcando dos puntos de corte *P* y *R* (Figura 4.73).

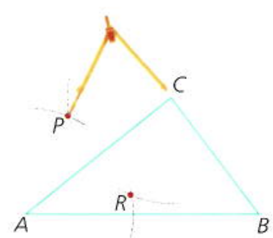


Figura 4.73

3. El punto *T* de intersección entre el lado *AC* y el segmento que une los puntos *P* y *R* es el punto medio de *AC* (Figura 4.74).

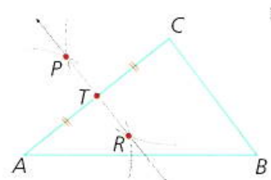


Figura 4.74

4. Se traza el segmento *BT* y se genera la mediana relativa al lado *AC* (Figura 4.75).

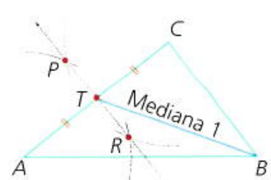


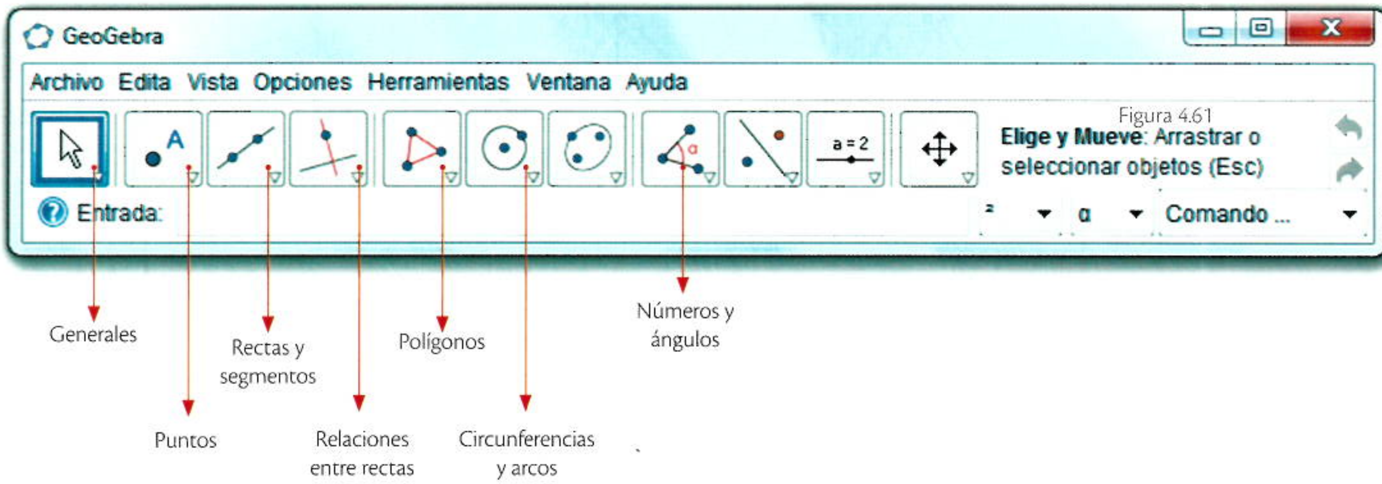
Figura 4.75

5 Construcción de líneas notables en el triángulo

MatemaTICS

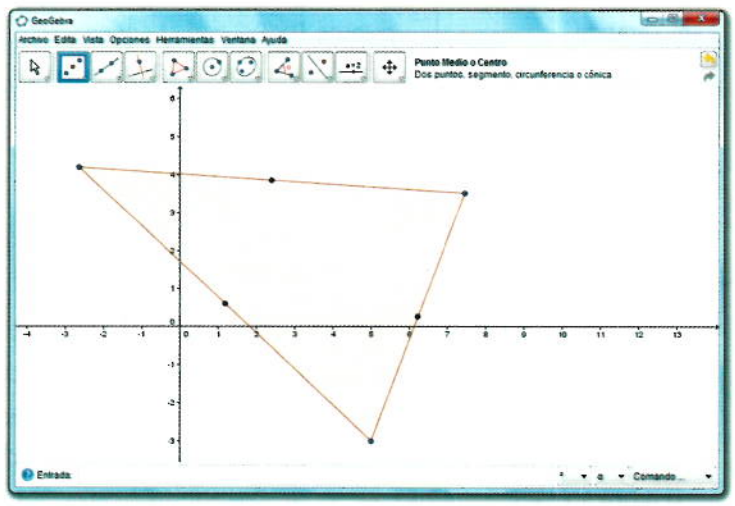
Traza las medianas de un triángulo con GeoGebra

Para trazar las medianas de un triángulo vas a necesitar algunas de las siguientes herramientas en GeoGebra.



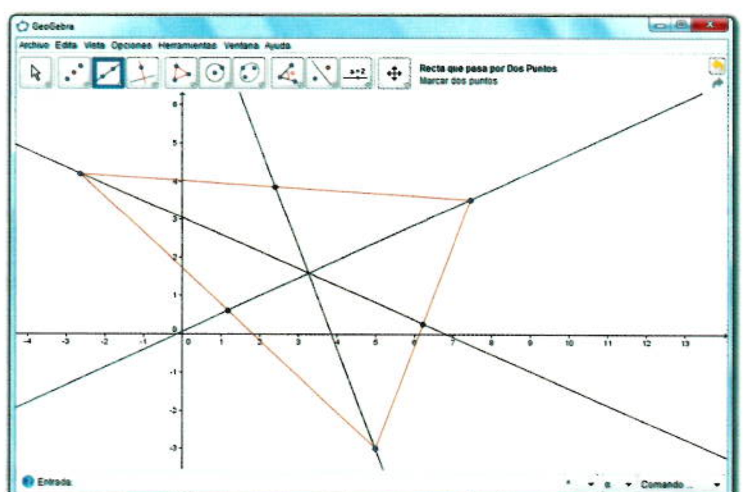
- El proceso para trazar las medianas es:

Se construye un triángulo mediante la herramienta *polígono*. Para ello se ubican los vértices dando clic sobre el área de vista gráfica y asegurándose de cerrar correctamente la figura.



Se halla el punto medio de cada lado. Se selecciona el ícono *puntos*, se elige la herramienta *punto medio* y, luego, se da clic en los lados *a*, *b* y *c* del triángulo.

Ahora se trazan las medianas. En el ícono *rectas y segmentos* selecciona la herramienta *recta que pasa por dos puntos* y une cada punto medio con el vértice opuesto dando clic sobre cada uno.



Las tres medianas se intersecaron entre sí en un punto llamado **baricentro**. Para nombrarlo se recurre al ícono *puntos*, luego, a la herramienta *intersección de dos objetos* y se da un clic en dos de las medianas.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Escribe el nombre de las líneas notables que se han trazado en cada triángulo.

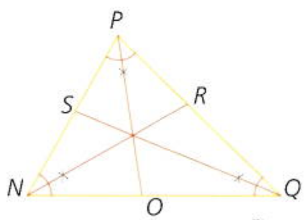


Figura 4.76

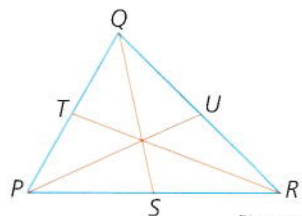


Figura 4.77

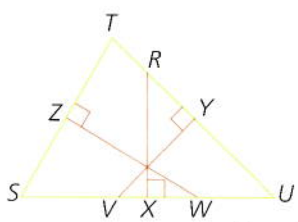


Figura 4.78

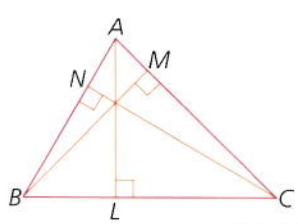
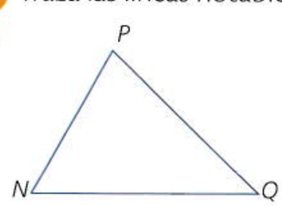


Figura 4.79

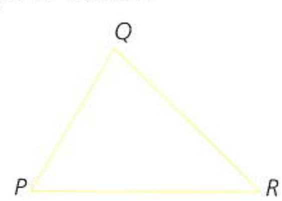
Ejercitación

2 Traza las líneas notables que se indican.



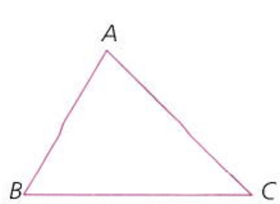
Altura

Figura 4.80



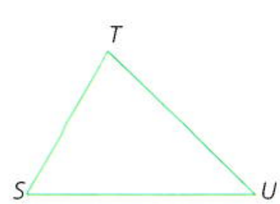
Bisectriz

Figura 4.81



Mediana

Figura 4.82



Mediatriz

Figura 4.83

Resolución de problemas

3 La estructura de cierta ala Delta (Figura 4.84) está diseñada con base en dos triángulos y varios tubos transversales dispuestos de forma que determinan líneas notables en dichos triángulos.

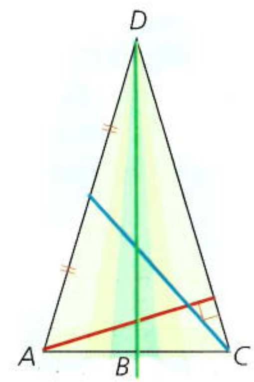


Figura 4.84

Identifica la línea notable que corresponde a cada segmento con color.

Evaluación del aprendizaje

Relaciona de forma conveniente.

a. Recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio.

b. Segmento perpendicular desde uno de los vértices hasta el lado opuesto.

c. Divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

d. Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

- Altura
- Bisectriz
- Mediatriz
- Mediana

Estilos de vida saludable

Un mandala es un arte milenario que permite expresar emociones y fortalecer la creatividad mediante el diseño de figuras geométricas concéntricas alrededor de un círculo. Crea tu propio mandala, haciendo uso de los elementos que acabas de aprender. ¿Cómo crees que contribuye este ejercicio a tu bienestar intelectual?

6 Criterios de congruencia de triángulos

Saberes previos

Un tangram de siete piezas está formado por cinco triángulos y dos cuadriláteros. Escribe diferencias y semejanzas entre los triángulos que forman el tangram.

Analiza

El uso de rampas en deportes extremos es cada vez más común. Existen rampas cuya inclinación puede llegar a los 80°, especialmente en el *skate*.

Observa que los triángulos laterales de las rampas son conguentes.

Conoce

La congruencia entre figuras consiste en la igualdad de forma y tamaño. Para ello se comparan lados y ángulos correspondientes.

Al analizar los triángulos laterales de las rampas, se tiene:

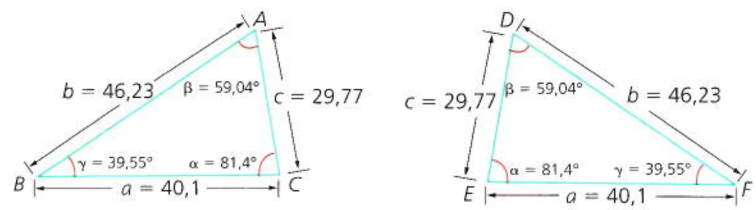


Figura 4.85

Para concluir si dos triángulos son congruentes se comprueba que los lados y los ángulos correspondientes tienen igual medida. Así, se concluye que:

$\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle F$, $\measuredangle C \cong \measuredangle E$

$\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$

Entonces, los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes.

Dos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son **congruentes** si los lados correspondientes entre ellos son congruentes y los ángulos correspondientes también lo son.

Ejemplo 1

Los triángulos *MLR* y *UST* de la Figura 4.86 son congruentes porque:

Sus lados son congruentes:

$\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$

Y sus ángulos son congruentes:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

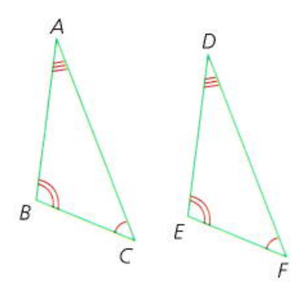


Figura 4.86

Ejemplo 2

¿Qué se puede deducir de la figura 4.87?

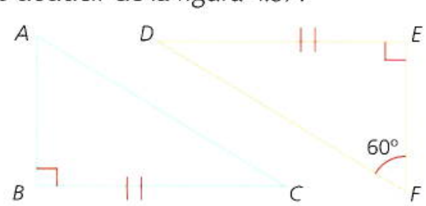


Figura 4.87

La congruencia se simboliza con ≅, de la siguiente manera:

$BC \cong DE$, $AB \cong EF$ y $AC \cong DF$

Los ángulos *B* y *E* miden 90°. Como el ángulo *F* mide 60°, y el ángulo *A* es correspondiente a *F*, también mide 60°, entonces la medida de los ángulos faltantes se calcula así:

$$x = 180° - (90° + 60°) = 30°$$

Los ángulos *C* y *D*, miden 30°.

6.1 Criterios de congruencia de triángulos

Los **criterios de congruencia** permiten establecer si dos triángulos son congruentes a partir de algunas de las medidas de sus lados o sus ángulos.

En la Tabla 4.2 se enuncian los criterios.

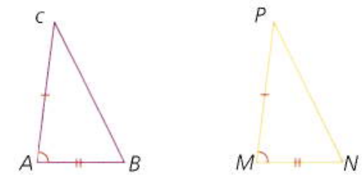
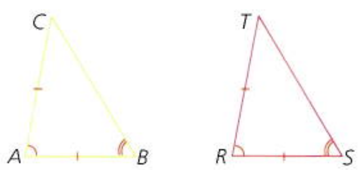
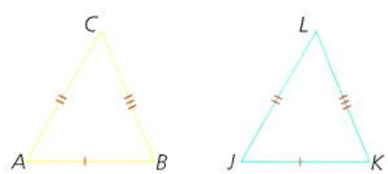
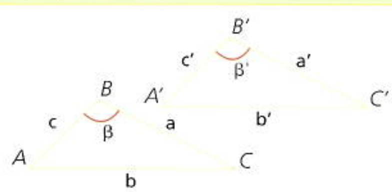
Criterios de congruencia de triángulos	
Lado-Ángulo-Lado (LAL)	
Dos triángulos son congruentes si sus dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes.	 $\overline{CA} \cong \overline{PM}$ $\measuredangle A \cong \measuredangle M$ $\overline{AB} \cong \overline{MN}$
Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)	
Dos triángulos son congruentes si sus dos ángulos y el lado común son congruentes.	 $\measuredangle A \cong \measuredangle R$ $\measuredangle B \cong \measuredangle S$ $\overline{AB} \cong \overline{RS}$
Lado-Lado-Lado (LLL)	
Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados son congruentes.	 $\overline{AB} \cong \overline{JK}$ $\overline{BC} \cong \overline{KL}$ $\overline{AC} \cong \overline{JL}$
Lado-Lado-Ángulo (LLA)	
Dos triángulos son congruentes si dos lados son congruentes y los ángulos opuestos al mayor de los lados también son congruentes.	 $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$

Tabla 4.2

Ejemplo 3

Los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes. Observa cómo se determina el valor de los $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$ y $\measuredangle E$ (Figura 4.88).

Como $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$, entonces $m\measuredangle C = 43°$. La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, $m\measuredangle B = 53°$.

También se sabe que $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, así que, $m\measuredangle D = 84°$. Finalmente, como $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, entonces $m\measuredangle E = 53°$.

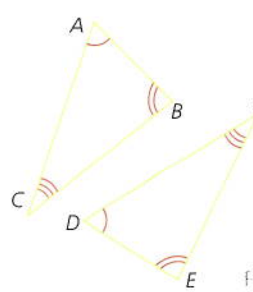


Figura 4.88

6 Criterios de congruencia de triángulos

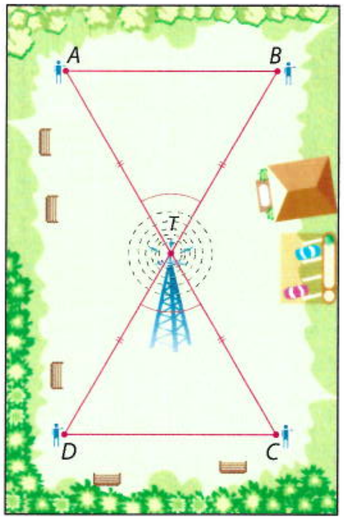


Figura 4.89

Ubicación de una antena receptora en un terreno.

Ejemplo 4

En la Figura 4.89 se observa la ubicación de una antena. En los puntos *A*, *B*, *C* y *D* se encuentran algunas personas que reciben la señal con la misma intensidad. ¿Por qué sucede esto?

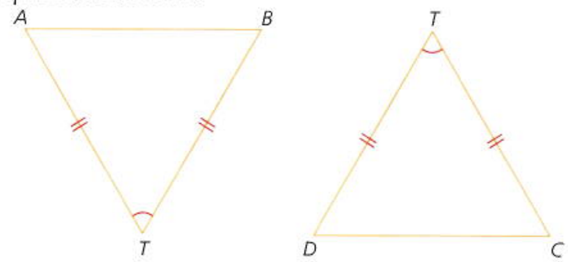


Figura 4.90

Los $\triangle ABT$ y $\triangle DCT$, determinados en la Figura 4.90, son congruentes por el criterio LAL.

Ejemplo 5

Observa la Figura 4.91 y comprueba que el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *FDE*.

1. $\measuredangle C \cong \measuredangle E$
2. $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
3. $\measuredangle B \cong \measuredangle D$
4. Por criterio ALA, $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

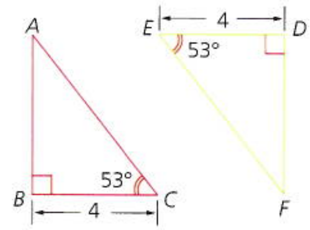


Figura 4.91

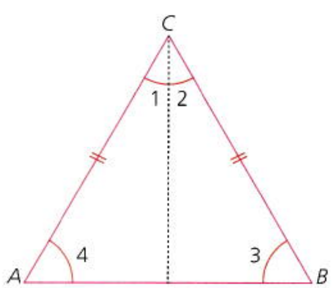


Figura 4.92

Ejemplo 6

A partir de la información de la Figura 4.92, comprueba que en el triángulo isósceles *ABC*, si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, los triángulos determinados por la bisectriz *b* que interseca al lado $\overline{AB}$ son congruentes.

Por definición de bisectriz: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$.

Por definición de triángulo isósceles: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Por propiedad de la congruencia de segmentos: $\overline{BD} \cong \overline{BD}$.

Por el criterio de congruencia LAL: $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.

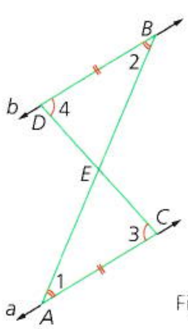


Figura 4.93

Ejemplo 7

Observa cómo se demuestra que dadas las rectas *a* y *b* paralelas, y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ congruentes (Figura 4.93), los $\triangle ACE$ y $\triangle BDE$ son congruentes.

1. Por la información dada en el enunciado se sabe que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ y $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ son alternos internos entre paralelas.
3. Por el criterio de congruencia ALA: $\triangle ACE \cong \triangle BDE$.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Identifica si las parejas de triángulos son congruentes. Escribe cuál de los criterios te permite comprobarlo.

a.

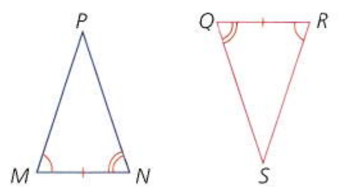


Figura 4.94

b.

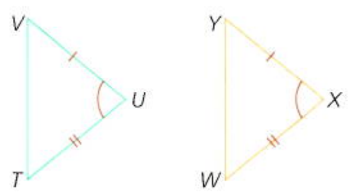


Figura 4.95

c.

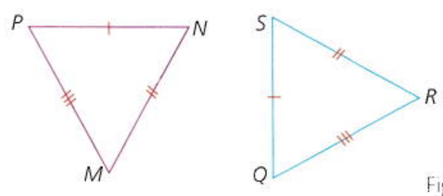


Figura 4.96

d.

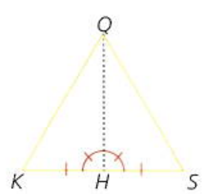


Figura 4.97

Razonamiento

2 Teniendo en cuenta la información de las figuras, decide si los triángulos son congruentes. En caso afirmativo, escribe el criterio que justifica la congruencia.

a.

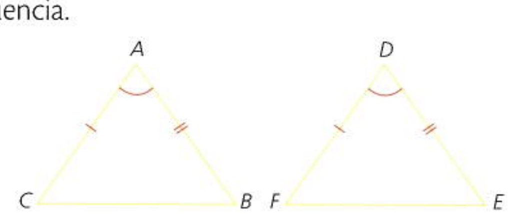


Figura 4.98

b.

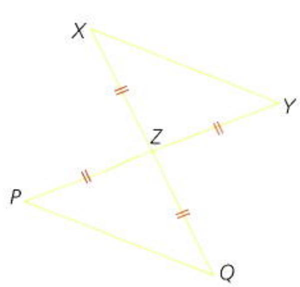


Figura 4.99

3 Escribe (V) si la afirmación es verdadera o (F) si es falsa.

a. Todos los triángulos equiláteros son congruentes. ( )

b. Un triángulo equilátero puede ser congruente con un triángulo isósceles. ( )

c. Un triángulo acutángulo nunca es congruente con un triángulo obtusángulo. ( )

d. Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{QR}$. ( )

Resolución de problemas

4 Camilo hizo una pintura en la que destacó con color amarillo los triángulos que él creyó congruentes a su original, sin embargo, cometió algunos errores.

- ¿Cuáles son los triángulos que no son congruentes con el original?

Figura 4.100

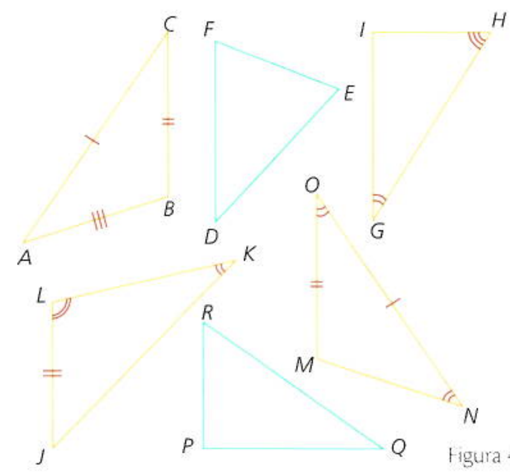


Figura 4.101

Evaluación del aprendizaje

Si $\triangle ABC \cong \triangle FED$, encuentra el valor de x y el valor del ángulo E en la Figura 4.102.

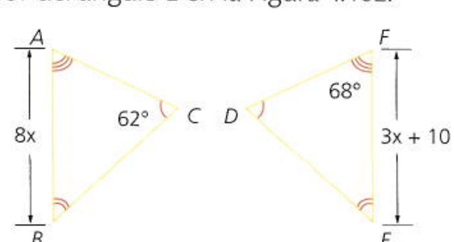


Figura 4.102

7 Teorema de Tales

Saberes previos

Dibuja un triángulo rectángulo cuyos lados midan 6 cm, 8 cm y 10 cm, respectivamente. Sobre el lado de 8 cm traza una perpendicular que pase exactamente por la mitad. Determina, aproximadamente, la longitud de los lados del nuevo triángulo que se formó.

Analiza

En la Figura 4.103 se observa que los lados del triángulo ABC miden 4 cm, 6 cm y 8 cm.

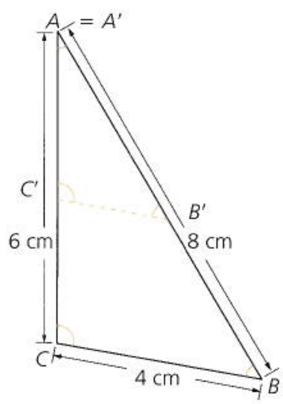


Figura 4.103

- Si $\overline{C'B'}$ es paralelo a $\overline{CB}$ e interseca los otros dos lados del triángulo ABC en su punto medio, ¿se puede afirmar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes?

Conoce

Para responder la pregunta, se pueden seguir estos pasos:

1. Se determina si los ángulos son congruentes.

Los $\measuredangle A$ y $\measuredangle A'$ son congruentes. Los $\measuredangle B$ y $\measuredangle B'$, y $\measuredangle C$ y $\measuredangle C'$ son, respectivamente, congruentes, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

2. Se determina si los lados son proporcionales.

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$$

Se concluye que los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes. Esto se simboliza así: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. En este caso, 2 es la razón de semejanza.

Lo anterior permite generalizar el **teorema de Tales**.

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes. Dicho de otra manera, si dos rectas secantes son cortadas por tres o más rectas paralelas, entonces los segmentos determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.

En la Figura 4.104 se observan dos rectas secantes (r y s) cortadas por varias rectas paralelas (a, b y c).

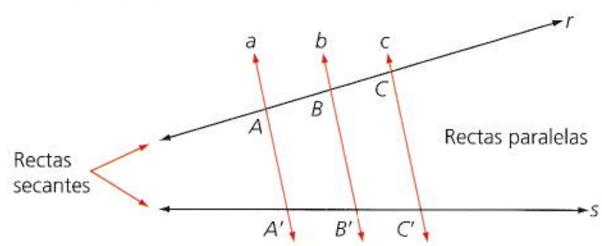


Figura 4.104

Según el teorema de Tales, los segmentos determinados sobre la recta r son proporcionales a los segmentos determinados sobre la recta s. Es decir:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se halla la longitud del segmento $A'B'$ de la Figura 4.105, sabiendo que $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$.

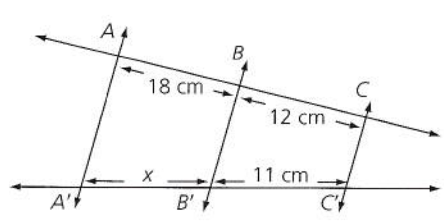


Figura 4.105

Según el teorema de Tales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{18}{x} = \frac{12}{11} \Rightarrow 12 \cdot x = 18 \cdot 11 \Rightarrow x = \frac{18 \cdot 11}{12} = 16{,}5.$$

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Analiza y responde.

- ¿Los triángulos formados por una farola, un poste vertical y su sombra pueden representar las condiciones del teorema de Tales?

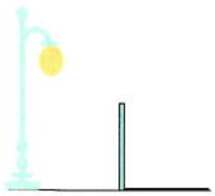


Figura 4.106

Razonamiento

2 Dibuja un triángulo rectángulo de catetos 15 cm y 8 cm. Al unir sus puntos medios, ¿resulta un triángulo semejante a este? Justifica tu respuesta.

3 Observa la Figura 4.107, donde al unir los puntos medios de los lados del triángulo se forma otro. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo pequeño?

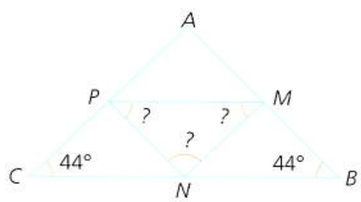


Figura 4.107

Ejercitación

4 Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud de los segmentos que faltan en cada caso.

a. $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{c} \parallel \overleftrightarrow{d}$

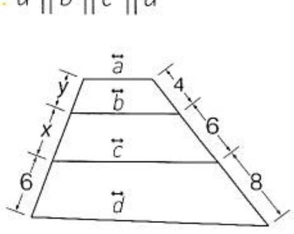


Figura 4.108

b. $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s} \parallel \overleftrightarrow{t} \parallel \overleftrightarrow{u} \parallel \overleftrightarrow{v}$

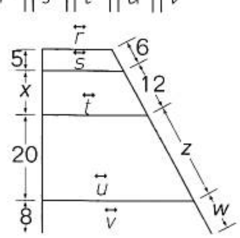


Figura 4.109

c. $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{p} \parallel \overleftrightarrow{q}$

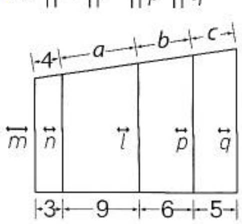


Figura 4.110

d. $\overleftrightarrow{e} \parallel \overleftrightarrow{f} \parallel \overleftrightarrow{g} \parallel \overleftrightarrow{h}$

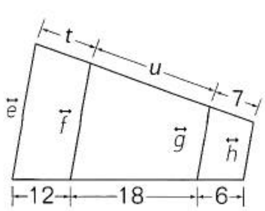


Figura 4.111

5 Analiza y responde.

- ¿Qué valor debe tener k para que el triángulo MNO sea semejante al triángulo PQR?

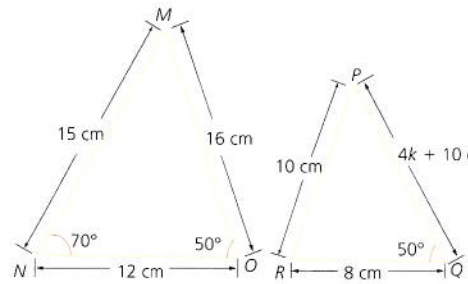


Figura 4.112

Evaluación del aprendizaje

i En un triángulo ABC, las medidas de los lados son $a = 6$ cm, $b = 8$ cm y $c = 10$ cm. Calcula los lados de un triángulo $A'B'C'$, semejante al triángulo ABC, de perímetro igual a 36 cm.

ii Una fotografía rectangular de 10 cm de base por 15 cm de altura se enmarca dejando una franja de 1 cm de ancho por todo el borde, como muestra la Figura 4.113. ¿Son semejantes los rectángulos que se forman al interior y al exterior?

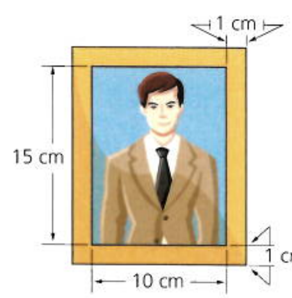


Figura 4.113

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Un estudiante de grado undécimo mide 1,85 m. A cierta hora del día proyecta una sombra de 2,80 m y su compañera proyecta una sombra de 2,45 m. ¿Quién de los estudiantes es más alto? ¿Cuáles deben ser las características para ser elegido en el equipo de baloncesto del colegio: su género, su estatura, sus habilidades para el juego, entre otras?

8 Criterios de semejanza de triángulos

Saberes previos

Lina trajo de París varias réplicas de la Torre Eiffel. Si la Torre real tiene 324 m de altura, ¿podrías explicar cómo se pueden hacer réplicas pero pequeñas?

Analiza

La profesora de matemáticas dibujó en el tablero la Figura 4.114.

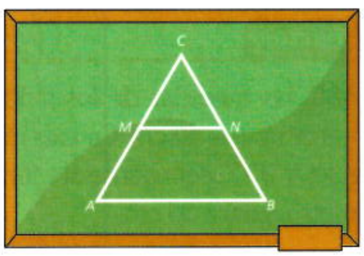


Figura 4.114

- Si $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AB}$, se puede concluir que ¿los triángulos ABC y MNC son semejantes?

Conoce

7.1 Criterio 1: ángulo-ángulo

Los criterios de semejanza constituyen las condiciones mínimas necesarias para establecer que dos triángulos son semejantes sin necesidad de medir y comparar todos sus lados y todos sus ángulos.

Por ejemplo, en la Figura 4.115 se tiene que $m\measuredangle CAB = m\measuredangle CMN = a$ y $m\measuredangle ABC = m\measuredangle MNC = b$, por ser ángulos correspondientes entre paralelas.

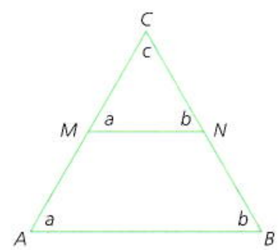


Figura 4.115

Se concluye que los triángulos ABC y MNC son semejantes, de acuerdo con el criterio de semejanza de triángulos ángulo-ángulo.

Dos triángulos son semejantes si se comprueba que tienen dos ángulos correspondientes congruentes.

Ejemplo 1

Los triángulos ABC y MPN tienen un ángulo correspondiente que mide 40°. Para determinar si son semejantes, se dibujan los triángulos y se comprueba que tienen los tres ángulos congruentes, ya que $90° - 40° = 50°$.

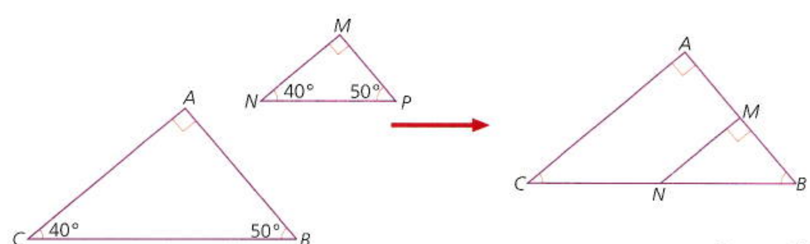


Figura 4.116

En el tercer triángulo se construyó un triángulo semejante al triángulo ABC tomando el lado $\overline{MB}$ con la misma medida que el lado $\overline{MP}$ y trazando un segmento paralelo al lado $\overline{AC}$ (Figura 4.116).

Por el teorema de Tales, los triángulos ABC y MBN son semejantes.

Como los triángulos MPN y MBN son congruentes por tener un lado y los tres ángulos congruentes, se concluye que ABC y MPN son semejantes.

8.2 Criterio 2: lado-lado-lado

Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales.

Ejemplo 2

Para saber si los triángulos de la Figura 4.117 son semejantes, se dibuja sobre el triángulo más grande o semejante el pequeño, tomando la medida de 5 cm sobre el lado de 25 cm y trazando una paralela al lado más largo. (Figura 4.118)

Por teorema de Tales, los triángulos son semejantes y los lados proporcionales:

$$\frac{5}{25} = \frac{x}{30} = \frac{y}{20}$$

Entonces, $x = 6$ cm y $y = 4$ cm. Estas medidas coinciden con las del triángulo pequeño. Luego, el triángulo grande y el pequeño son semejantes.

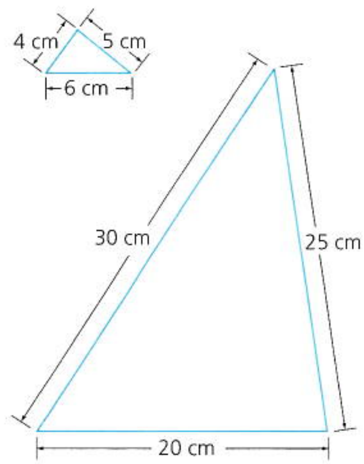


Figura 4.117

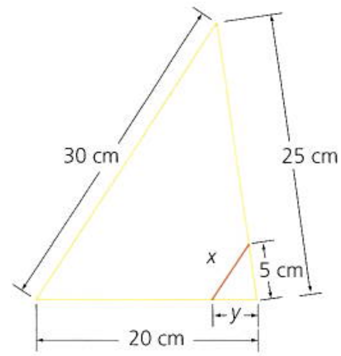


Figura 4.118

7.3 Criterio 3: lado-ángulo-lado

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos congruentes.

Ejemplo 3

Observa cómo se prueba que: si el ángulo desigual de los dos triángulos isósceles de la Figura 4.119 mide 50° y los lados congruentes se encuentran en una relación de 4 a 1, los dos triángulos son semejantes.

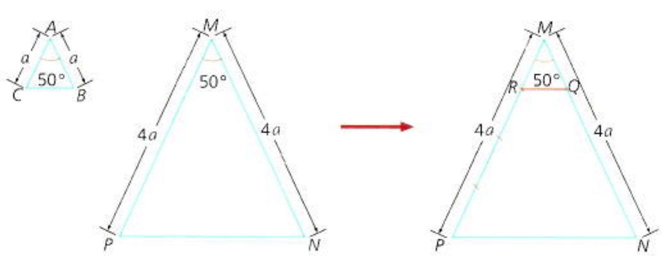


Figura 4.119

Para determinar si estos triángulos son semejantes, se dibuja en el triángulo más grande un nuevo triángulo tomando la cuarta parte de uno de los lados iguales y trazando una paralela al lado desigual.

Por el teorema de Tales, los triángulos *MQR* y *MNP* son semejantes y los lados correspondientes son proporcionales. Se conserva la proporción, por lo que los triángulos coinciden y, por tanto, son semejantes.

8 Criterios de semejanza de triángulos

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Muestra que los triángulos de la Figura 4.120 son semejantes. Indica el criterio que utilizaste.

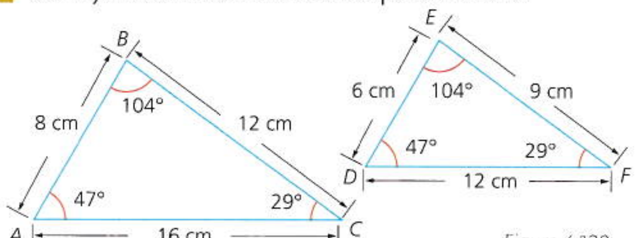


Figura 4.120

2 Determina las medidas de los lados BC y AC si se sabe que los dos triángulos son semejantes. (Figura 4.121).

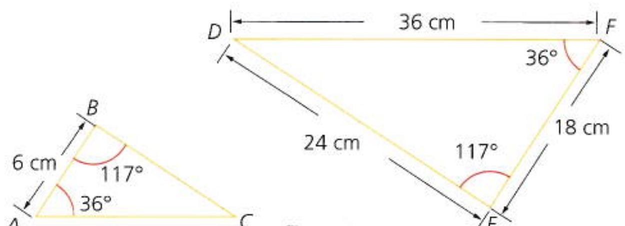


Figura 4.121

3 Lee y responde.

Un triángulo cuyos lados miden 24 cm, 40 cm y 28 cm es semejante a otro que tiene 46 cm de perímetro. ¿Cuánto miden los lados del segundo triángulo?

4 Calcula BC si E es el punto medio de AB y $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$.

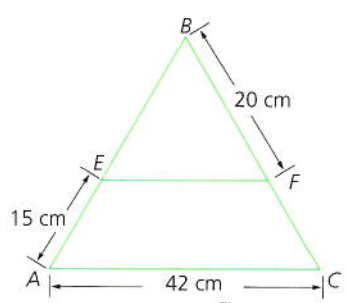


Figura 4.122

5 Determina si son semejantes los triángulos a los que corresponden las siguientes medidas.

a. $m\measuredangle A = 60°$, $m\measuredangle B = 40°$ y $m\measuredangle D = 80°$, $m\measuredangle E = 60°$

b. $m\measuredangle A = 90°$, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm y $m\measuredangle A' = 90°$, $b' = 5$ cm, $c' = 7$ cm

Modelación

6 Calcula la longitud que se indica de acuerdo con la siguiente información. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 cm y 8 cm. Teniendo en cuenta que la hipotenusa de otro triángulo rectángulo semejante mide 20 cm, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa del primero y de los catetos del segundo?

Ejercitación

7 Calcula la medida del segmento CN en la Figura 4.123 si los lados $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ son paralelos. .

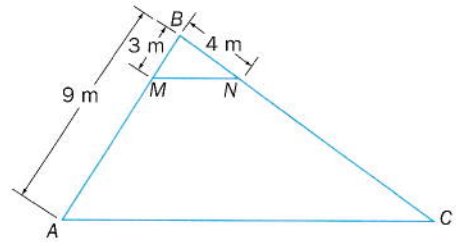


Figura 4.123

Razonamiento

8 En un triángulo rectángulo se traza la altura sobre la hipotenusa. ¿Son semejantes los triángulos en los que queda dividido el triángulo dado?

Comunicación

9 Determina si los siguientes pares de triángulos son semejantes, indicando, en caso afirmativo, el criterio de semejanza utilizado.

a.

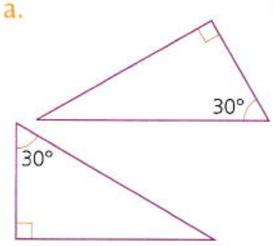


Figura 4.124

b.

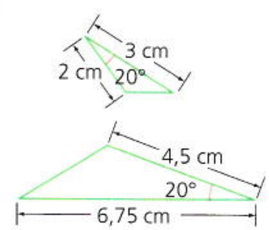


Figura 4.125

c.

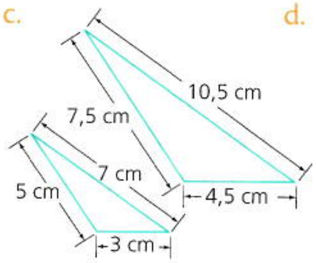


Figura 4.126

d.

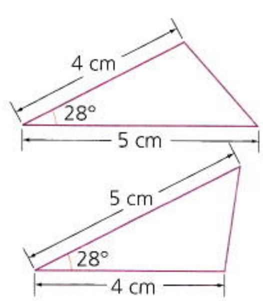


Figura 4.127

Razonamiento

10 Indica si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes afirmaciones.

a. Todos los cuadrados son semejantes.

b. Los ángulos de dos triángulos semejantes son proporcionales.

c. Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo congruente son semejantes.

d. Todas las circunferencias son semejantes.

Comunicación

11 ¿Cuánto deben medir el lado $\overline{A'C'}$ y el ángulo C' para que sean dos triángulos semejantes?, ¿qué criterio de semejanza utilizas?

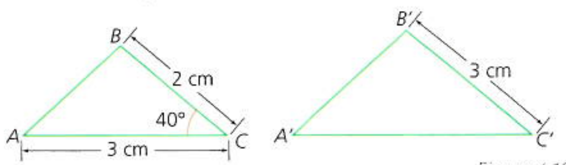


Figura 4.128

Ejercitación

12 Completa los datos que faltan para que los triángulos sean semejantes.

a. $\triangle ABC$ $\quad$ $\triangle A'B'C'$

$\overline{AB} = 15$ cm $\quad$ $\overline{A'B'} =$

$\overline{AC} = 18$ cm $\quad$ $\overline{A'C'} =$

$\overline{BC} = 16$ cm $\quad$ $\overline{B'C'} = 5{,}3$ cm

b. $\triangle MN\tilde{N}$ $\quad$ $\triangle M'N'\tilde{N}'$

$\overline{MN} =$ $\quad$ $\overline{M'N'} = 150$ cm

$\overline{N\tilde{N}} = 120$ cm $\quad$ $\overline{N'\tilde{N}'} = 6$ m

$\overline{M\tilde{N}} =$ $\quad$ $\overline{M'\tilde{N}'} =$

c. $\triangle OPQ$ $\quad$ $\triangle O'P'Q'$

$\overline{OP} = 18$ cm $\quad$ $\overline{O'P'} = 54$ cm

$\overline{PR} = 7$ cm $\quad$ $\overline{P'R'} =$

$\overline{RQ} =$ $\quad$ $\overline{R'Q'} =$

Ejercitación

13 Resuelve. Los lados de un triángulo miden 5 cm, 6 cm y 10 cm. Encuentra la longitud del lado más largo de un triángulo semejante, cuyo lado más corto mide 15 cm.

Resolución de problemas

14 Cierto día, la sombra que proyectaba en el piso un niño de 1,50 m era de 2,40 m. La sombra del árbol a esa misma hora tenía una longitud de 8,6 m. ¿Cuál era la altura del árbol?

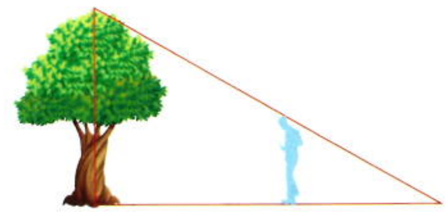


Figura 4.129

15 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 12 cm y uno de sus catetos, 9,6 cm. La hipotenusa de otro triángulo rectángulo mide 4 cm. Si se hacen coincidir los dos ángulos rectos de los triángulos, las hipotenusas son paralelas. Determina la medida de los tres lados de cada triángulo.

Evaluación del aprendizaje

i Calcula la altura de una casa teniendo en cuenta que en un determinado momento del día proyecta una sombra de 3,5 m y una persona que mide 1,87 m tiene, en ese mismo instante, una sombra de 85 cm.

ii Dos tiendas se encuentran en un mismo edificio por la misma acera. Cristina, que está en la portería del edificio de enfrente, quiere comprar una libra de azúcar. Observa el dibujo e indica cuál de las dos tiendas está más cerca de Cristina haciendo los cálculos que correspondan. ¿A qué distancia está Cristina de la peluquería?

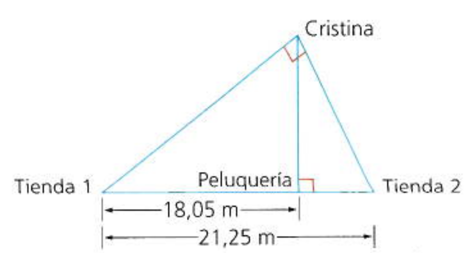


Figura 4.130

9 Poliedros

Saberes previos

Busca entre los objetos de tu casa una caja que tenga una forma "rara". Obsérvala con detenimiento y escribe el nombre de las diferentes formas planas que la componen.

Analiza

El fútbol es el deporte más popular del mundo.

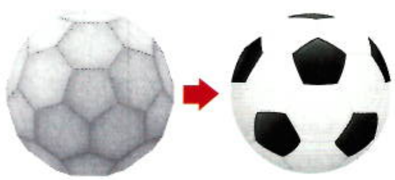


Figura 4.131

- ¿Conoces el nombre que recibe el sólido que constituye un balón de fútbol?

Conoce

La *Federación Internacional de Fútbol Asociado* (FIFA) ha diseñado sus balones de fútbol con base en un icosaedro truncado, como se muestra en la Figura 4.132.

Hoy en día este organismo internacional ha cambiado sus balones por otra forma poliédrica, llamada rombicosidodecaedro.

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más polígonos.

Clasificación de los poliedros

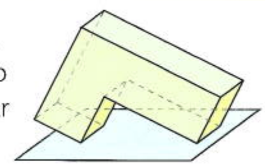
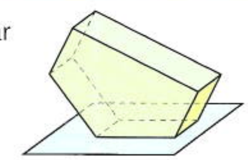
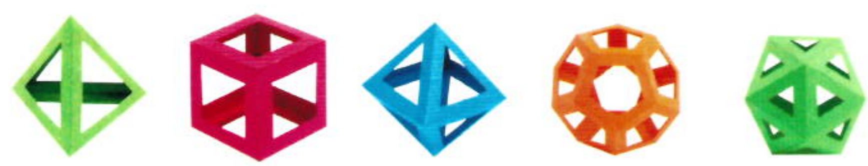
Cóncavos	Convexos
Tiene al menos una cara que no se puede apoyar sobre el plano. 	Se puede apoyar sobre el plano por cualquiera de sus caras. 

Tabla 4.3

Los poliedros también se pueden clasificar según sus caras, vértices y aristas.

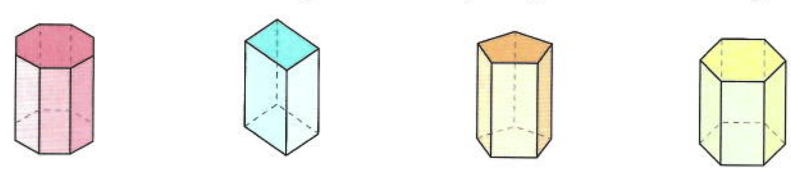
Poliedros regulares

Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro



Prismas

P. octagonal, P. rectangular, P. pentagonal, P. hexagonal



Pirámides

P. octagonal, P. cuadrangular, P. pentagonal, P. hexagonal

Tabla 4.4

9.1 Poliedros regulares

Un **poliedro regular** es aquel cuyas caras son polígonos regulares congruentes, de modo que en cada vértice concurren el mismo número de caras.

Poliedros regulares convexos

Los poliedros regulares convexos son poliedros con todas sus caras en forma de polígonos regulares iguales y todos los ángulos sólidos iguales, como aparece en la Figura 4.132.

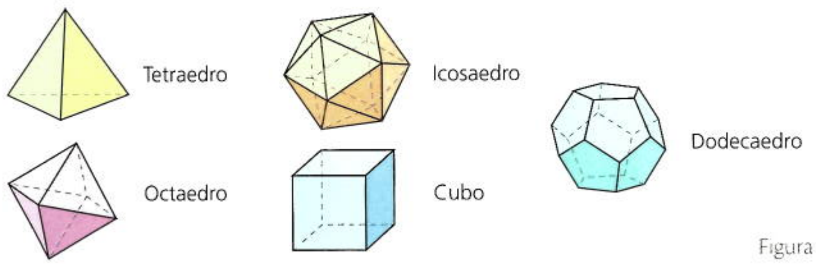


Figura 4.132

Poliedros regulares no convexos

Son poliedros cuyas caras son polígonos regulares y en todos sus vértices se encuentran el mismo número de caras, como se observa en la Figura 4.133.

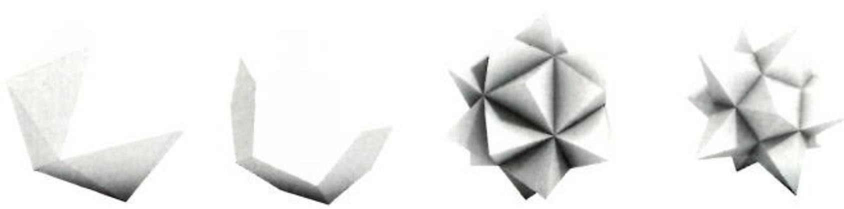


Figura 4.133

9.2 Prismas

Los **prismas** tienen dos caras paralelas iguales llamadas bases, mientras que el resto de sus caras son paralelogramos.

En algunos, cualquier cara puede ser base porque todas son paralelogramos y se llaman paralelepípedos.

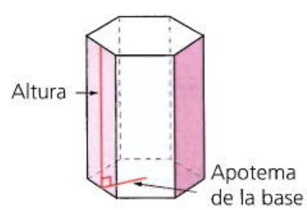


Figura 4.134

Bases: dos polígonos congruentes y paralelos.

Caras laterales: paralelogramos.

Los **paralelepípedos** se clasifican en:

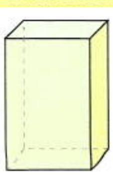
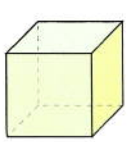
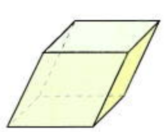
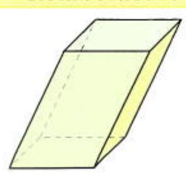
Ortoedro	Cubo	Romboedro	Romboidedro
			
Todas sus caras son rectángulos.	Todas sus caras son cuadrados.	Todas sus caras son rombos.	Todas sus caras son romboides.

Tabla 4.5

9.3 Pirámides

Las **pirámides** tienen una base y, el resto de sus caras, son triángulos. Cuando una pirámide se corta por un plano paralelo a la base, se obtienen dos cuerpos que se llaman **tronco de pirámide** y **pirámide deficiente** (Figura 4.136).

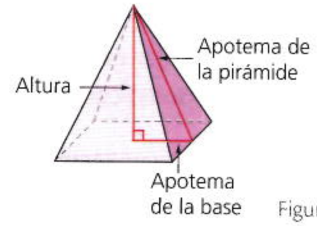


Figura 4.135

Base: un polígono
Caras laterales: triángulos.

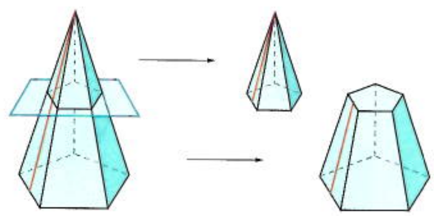


Figura 4.136

Ejemplo 1

Describe el poliedro de la Figura 4.137 y clasifícalo.

En la imagen se puede identificar que el poliedro tiene 2 bases rectangulares, 4 caras laterales rectangulares, es un prisma recto, es un prisma cuadrangular y un ortoedro.

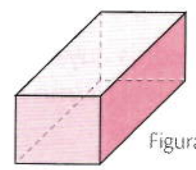


Figura 4.137

Formula de Euler

Leonhard Euler (1707-1783) nacido en Suiza, fue uno de los más grandes matemáticos de la historia. Fue el creador de una conocida fórmula que indica que si C representa el número de caras del poliedro, A representa el número de aristas y V representa el número de vértices del poliedro entonces se cumple que: $C + V - A = 2$.

Por ejemplo, para un cubo, $C = 6$, $V = 8$ y $A = 12$, por lo tanto:

$C + V - A = 6 + 8 - 12 = 2$

Ejemplo 2

Observa cómo se completa la Tabla 4.6 y la conclusión que puede deducirse de su información.

	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

Tabla 4.6

	Caras (C)	Vértices (V)	Aristas (A)	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Cubo	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

Tabla 4.7

Se concluye que se cumple la fórmula de Euler: $\boldsymbol{C + V = A} + 2$.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Identifica si los poliedros son cóncavos o convexos. Comprueba la fórmula de Euler para cada uno.

a.

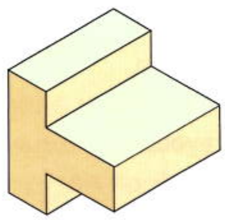


Figura 4.138

b.

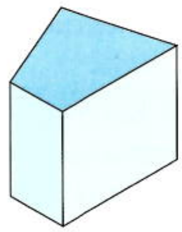


Figura 4.139

c.

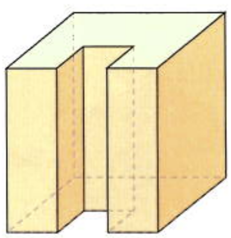


Figura 4.140

d.

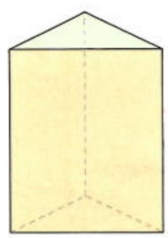


Figura 4.141

Modelación

2 Realiza la gráfica de:

a. El tronco de una pirámide con base hexagonal.

b. Una pirámide oblicua con base pentagonal.

Razonamiento

3 ¿Cuántas pirámides regulares se pueden construir de modo que las caras laterales sean triángulos equiláteros?

4 ¿Puede coincidir la altura de una pirámide con alguna arista? Si es así, dibuja o construye una pirámide que cumpla esta condición.

Comunicación

5 Escribe el nombre de cada uno de los elementos del poliedro de la Figura 4.142.

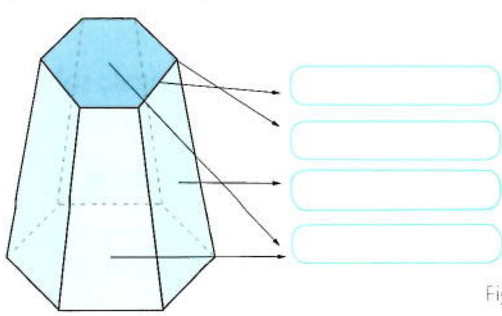


Figura 4.142

6 ¿Qué tipo de poliedro es cada sólido?

a.

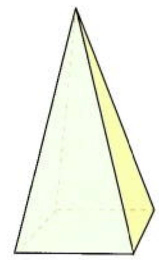


Figura 4.143

b.

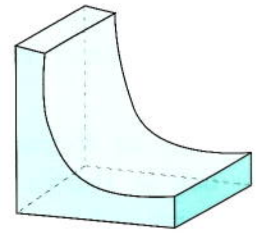


Figura 4.144

c.

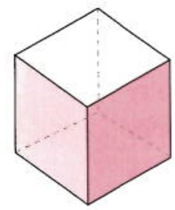


Figura 4.145

d.

Figura 4.146

Evaluación del aprendizaje

Observa la Figura 4.147 y completa la Tabla 4.8.

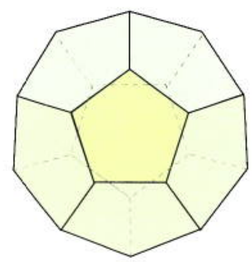


Figura 4.147

Nombre del poliedro	Nº de caras	Nº de aristas	Nº de vértices

Tabla 4.8

Educación ambiental

Reciclar papel es una de las formas más beneficiosas para evitar el desgaste del planeta. Encuentra material reciclado apropiado para construir algunos sólidos geométricos, visita el siguiente enlace (https://www.youtube.com/watch?v=Jl3fqUZhyhQ) y elabora una estrella de doce puntas. Explica por qué que el reciclaje trae beneficios para el medio ambiente.

10 Cuerpos redondos

Saberes previos

Busca en Internet las instrucciones para construir un sombrero de copa.

Examina las formas planas con las que se elabora y las formas tridimensionales.

Analiza

Muchos elementos de la naturaleza y de los objetos que usas diariamente, son ejemplos de los sólidos geométricos. (Figura 4.148)

Figura 4.148

- ¿Qué relación tienen las formas que se identifican en la fotografía?

Conoce

En la fotografía de la Figura 4.148 se identifica un helado compuesto por dos sólidos geométricos: una esfera y un cono. Estos dos cuerpos tienen al menos una superficie curva y pertenecen a la familia de los cuerpos redondos.

Los **cuerpos redondos** tienen, como mínimo, una de sus caras o superficies curvas. En algunos casos son llamados **cuerpos de revolución** ya que se pueden obtener por el giro de una figura plana alrededor de un eje.

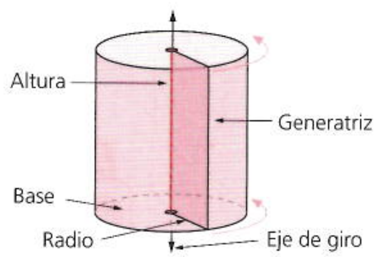
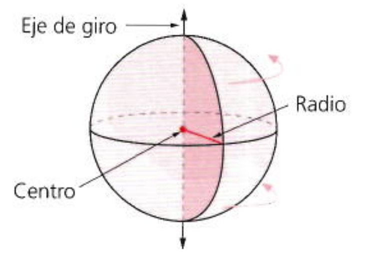
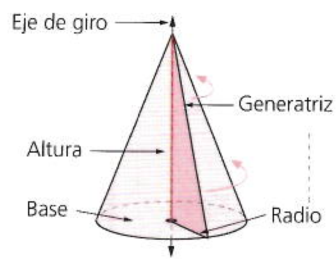
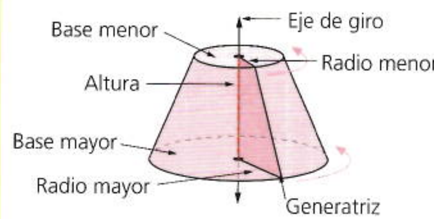
Cilindro	Esfera
 Consiste en un cuerpo que se genera al hacer girar un rectángulo, tomando como eje uno de sus lados.	 Es el sólido que se genera al hacer girar una semicircunferencia, tomando como eje su diámetro.
Cono	**Tronco de cono**
 Es el sólido que se genera al girar un triángulo rectángulo, tomando como eje uno de sus catetos.	 Es el sólido que se genera al girar un trapecio rectángulo cuyo eje es el lado perpendicular a las bases.

Tabla 4.9

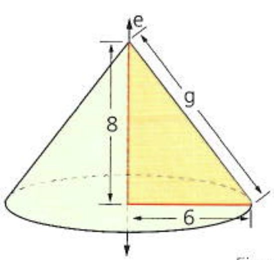


Figura 4.149

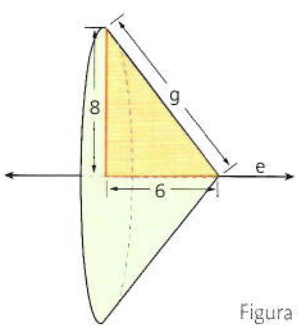


Figura 4.150

Ejemplo 1

¿Qué cuerpo se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos si miden 6 cm y 8 cm, respectivamente?, ¿cuál es su generatriz?

Al girar el triángulo como se indica, se obtienen los conos de las figuras 4.149 y 4.150.

La generatriz mide lo mismo en los dos conos: $g = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm.

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Dibuja los cuerpos geométricos que se obtienen al girar las siguientes figuras.

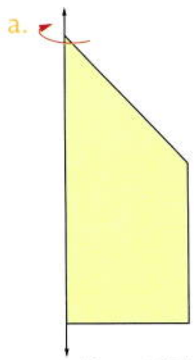


Figura 4.151

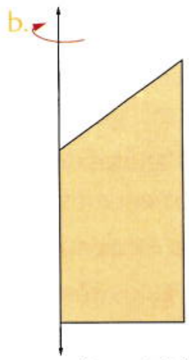


Figura 4.152

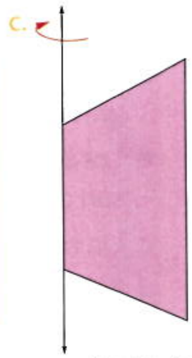


Figura 4.153

2 Escribe verdadero (V) o falso (F), según el caso.

a. Un cono tiene base triangular. ( )

b. Un cono tiene dos vértices. ( )

c. Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. ( )

d. El desarrollo de la cara lateral del cilindro es un rectángulo. ( )

e. La generatriz del cono es mayor que su altura. ( )

3 Escribe qué sólido se obtiene y halla su generatriz.

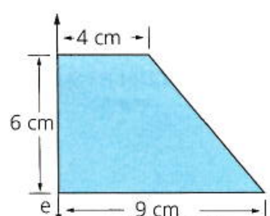


Figura 4.154

Sólido:

Generatriz:

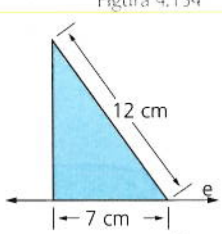


Figura 4.155

Sólido:

Generatriz:

4 Experimenta la forma de obtener los sólidos en revolución. Para ello:

a. Elabora un rectángulo, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un trapecio rectángulo usando cartulina o cartón.

b. Ubica un palo de pincho o un pitillo sobre uno de los lados rectos.

c. Gira rápidamente la figura y escribe lo que observas.

Comunicación

5 Dibuja en cada caso el sólido que se pide.

Cono oblicuo	
Cilindro recto	
Cilindro oblicuo	
Cono recto	
Esfera	
Tronco de cono	

Tabla 4.10

Resolución de problemas

6 El cartón de un rollo de papel tiene un diámetro de 4,6 cm y una altura de 9,7 cm. ¿Qué dimensiones tiene el desarrollo plano del cartón?

Evaluación del aprendizaje

¿Qué figura del espacio se genera al girar un rectángulo sobre el lado que determina su altura?

Practica más

Elementos básicos de la demostración

Comunicación

1 Observa la Figura 4.156 y haz afirmaciones basadas en postulados o definiciones.

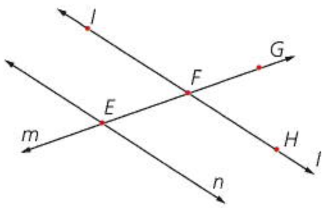


Figura 4.156

Ángulos

2 De acuerdo con la Figura 4.157, nombra:

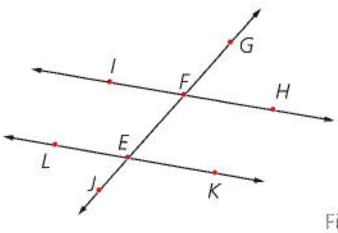


Figura 4.157

a. Ángulos opuestos por el vértice.

b. Ángulos adyacentes.

c. Ángulos complementarios.

d. Par lineal.

e. Ángulos suplementarios

Ángulos determinados por rectas paralelas y una secante

Razonamiento

3 Considerando que en la Figura 4.158 $m||l$, halla la medida de los ángulos X y Y.

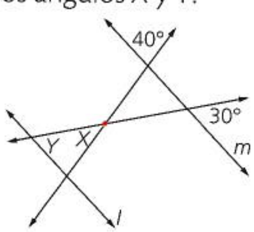


Figura 4.158

4 Explica cómo puedes hallar la medida del ángulo A teniendo en cuenta la medida del ángulo B, si $m||l$.

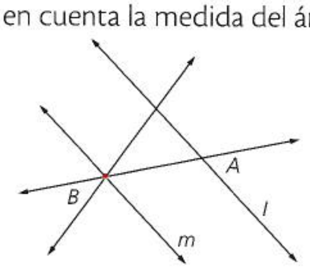


Figura 4.159

Congruencia de triángulos

Resolución de problemas

5 Explica en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. Si los ángulos externos en un triángulo son congruentes, el triángulo es equilátero. ( )

b. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios. ( )

c. Un triángulo escaleno es acutángulo. ( )

d. Existen triángulos isósceles que son a la vez triángulos rectángulos. ( )

Razonamiento

6 Construye un triángulo isósceles, uno equilátero y uno escaleno. Halla el incentro, el circuncentro y el baricentro en cada uno de ellos. ¿Qué conclusión puedes sacar?

7 Escribe las características que debe cumplir un triángulo para que, al trazar un segmento desde el punto medio de uno de sus lados hasta el vértice opuesto, se obtengan triángulos congruentes.

Poliedros

Resolución de problemas

8 Dibuja el desarrollo de un prisma triángular.

9 Investiga qué es un deltaedro y cuál es su desarrollo.

Cuerpos redondos

Comunicación

10 Escribe las características de los siguientes cuerpos.

a.

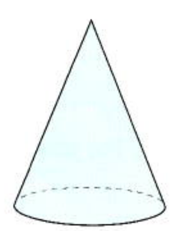


Figura 4.160

b.

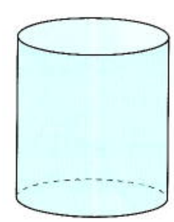


Figura 4.161

Resolución de problemas

Estrategia: Analizar un dibujo

Problema

En el triángulo ABC de la Figura 4.162, ¿cuál es la medida del ángulo x?

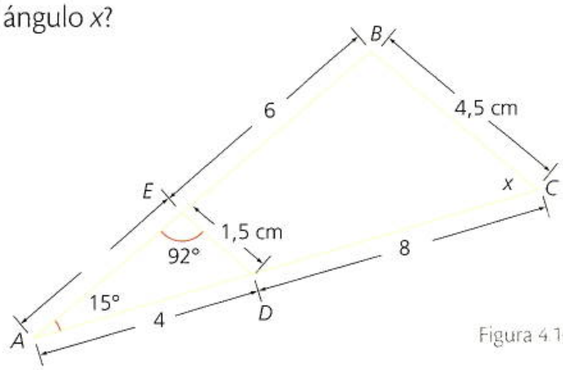


Figura 4.162

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes obtener de la figura?

  R: La medida de dos de los ángulos del triángulo EAD y la medida de los lados de los triángulos EAD y BAC.

- ¿Qué debes hallar?

  R: La medida del ángulo x.

2. Crea un plan

- Establece una relación entre la medida de los lados correspondientes de los triángulos que se forman en la figura y encuentra una propiedad que puedas aplicar.

3. Ejecuta el plan

- Observa que $\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = 3$; entonces, los triángulos ABC y EAD son semejantes por el criterio de semejanza lado - lado - lado.
- $m\measuredangle ABC = m\measuredangle AED = 92°$, $m\measuredangle BAC = m\measuredangle ADE = 15°$ y $m\measuredangle ACB = m\measuredangle ADE = x$ por ser ángulos correspondientes de triángulos semejantes.
- Como $m\measuredangle ABC + m\measuredangle BAC + m\measuredangle ACB = 180°$, la medida del ángulo x se obtiene reemplazando la medida de los ángulos y despejando como se muestra a continuación.

$$92° + 15° + x = 180°$$

$$x = 180° - (15° + 92°) = 73°$$

R: La medida del ángulo x es 73°.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$.

Aplica la estrategia

1. En la Figura 4.163 se trazó el $\overline{ED}$ paralelo al $\overline{AC}$. ¿Cuál es el valor de x?

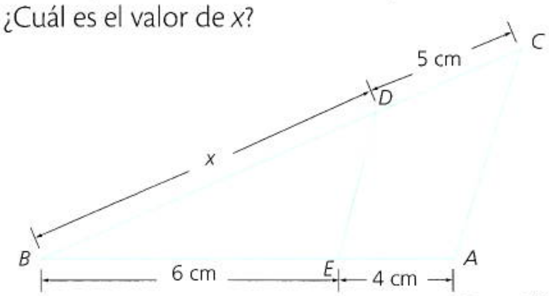


Figura 4.163

Comprende el problema

....

Crea un plan

....

Ejecuta el plan

....

Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2. A cierta hora del día, un edificio de 50 m de altura proyecta, una sombra de 75 m. ¿Qué sombra proyecta a la misma hora, una persona de 1,75 m de estatura?

3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm. Al trazar una altura sobre ella, esta la divide en dos segmentos de 12 cm y 8 cm, respectivamente. ¿Cuál es la longitud de dicha altura?

Formula problemas

4. Plantea y resuelve un problema que involucre la información de la Figura 4.164.

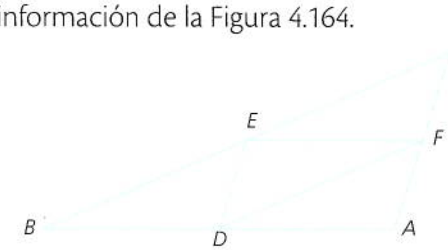


Figura 4.164

Enriquece tu vocabulario

- De acuerdo con la definición, ¿se puede afirmar que dos figuras *congruentes* son semejantes?

Evaluación del aprendizaje

Elementos básicos de la demostración

Razonamiento

1 Escribe falso (F) o verdadero (V) según corresponda. VERDADERO/FALSO

a. Los teoremas se demuestran empleando el método deductivo. ( )

b. Un teorema puede ser demostrado a partir de axiomas y postulados. ( )

2 Escribe y explica si cada enunciado se trata de un axioma o un postulado. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Todos los ángulos rectos son iguales congruentes.

b. Dada una recta l y un punto P que no esté sobre la recta l, existe una única recta m que pasa por P y que es paralela a l.

3 Lee la información. Luego, responde las preguntas y justifica tu respuesta. SELECCIÓN MÚLTIPLE

La afirmación *"el volumen de una pirámide es un tercio del producto de su altura y el área de la base"* es:

a. Una definición.

b. Un teorema.

c. Un postulado.

Ángulos

Ejercitación

4 Calcula el suplemento de cada ángulo. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. 15° b. 53° c. 27°

d. 79° e. 78° f. 81°

5 Encuentra el valor de x en cada caso. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\overrightarrow{m} \parallel \overrightarrow{l}$

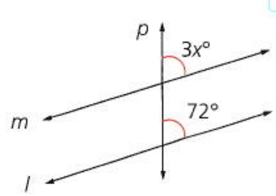


Figura 4.165

b. $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$

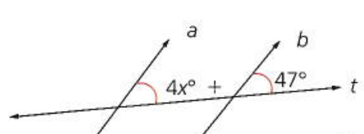


Figura 4.166

Ángulos determinados por rectas paralelas y una secante

6 En la Figura 4.167, $\overrightarrow{p} \parallel \overrightarrow{n}$ y m$\measuredangle 3 = 54°$. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

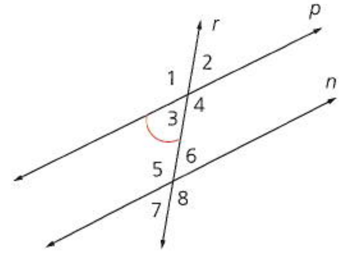


Figura 4.167

a. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle 5$?

b. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle 8$?

c. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle 6$?

d. ¿Cómo son los $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 7$?

7 Determina las relaciones entre los ángulos de la Figura 4.168. Luego, marca con ✓ la casilla correspondiente en la Tabla 4.11. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

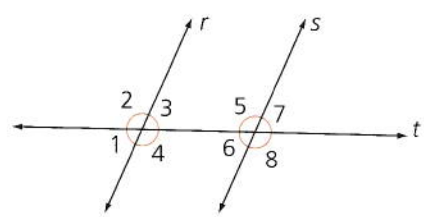


Figura 4.168

Ángulos	Correspondientes	Alternos internos	Alternos externos	Opuestos por el vértice
1 y 3				
3 y 7				
6 y 3				
4 y 2				
6 y 7				
2 y 5				
2 y 8				

Tabla 4.11

Polígonos

Razonamiento

8 Determina con cuáles de los siguientes polígonos se puede teselar una superficie. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

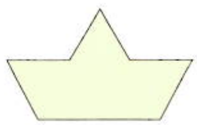


Figura 4.169

b.

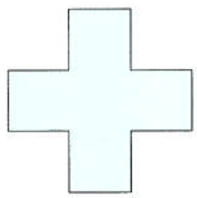


Figura 4.170

c.

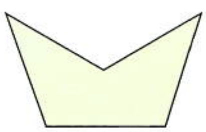


Figura 4.171

d.

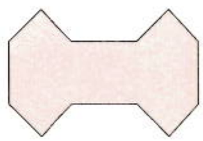


Figura 4.172

Líneas notables en el triángulo

Comunicación

9 Une con una línea cada definición con el punto correspondiente. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. Punto de intersección de las bisectrices.	Incentro
b. Punto de corte de las mediatrices.	Circuncentro
c. Punto de intersección de las medianas.	Baricentro
d. Punto de intersección de las alturas.	Ortocentro

Teorema de Tales

Resolución de problemas

10 Las dimensiones de una fotografía son 6,5 cm por 2,5 cm. Si se quiere ampliar de manera que el lado mayor mida 26 cm, ¿cuánto medirá el lado menor? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Comunicación

11 Traza en un triángulo ABC una recta paralela al lado $\overline{BC}$ desde un punto B', de manera que $AB' = 0{,}25AB$. ¿Cuál es la razón de semejanza? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Congruencia y semejanza de triángulos

Ejercitación

12 Encuentra la medida de BC en la Figura 4.173, si el segmento DE es paralelo al segmento AC, $BD = 4$ cm, $DA = 6$ cm y $EC = 8$ cm. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

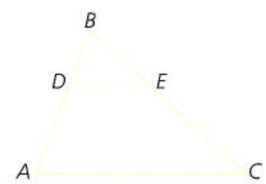


Figura 4.173

13 Dibuja dos triángulos acutángulos isósceles que sean congruentes. Justifica con los criterios dicha congruencia.

Poliedros y cuerpos redondos

Modelación

14 El siguiente es un modelo plano de un poliedro. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

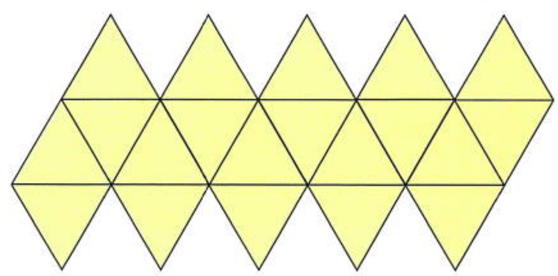


Figura 4.174

¿Cuántas aristas tiene el poliedro?

Razonamiento

15 Escribe si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). VERDADERO/FALSO

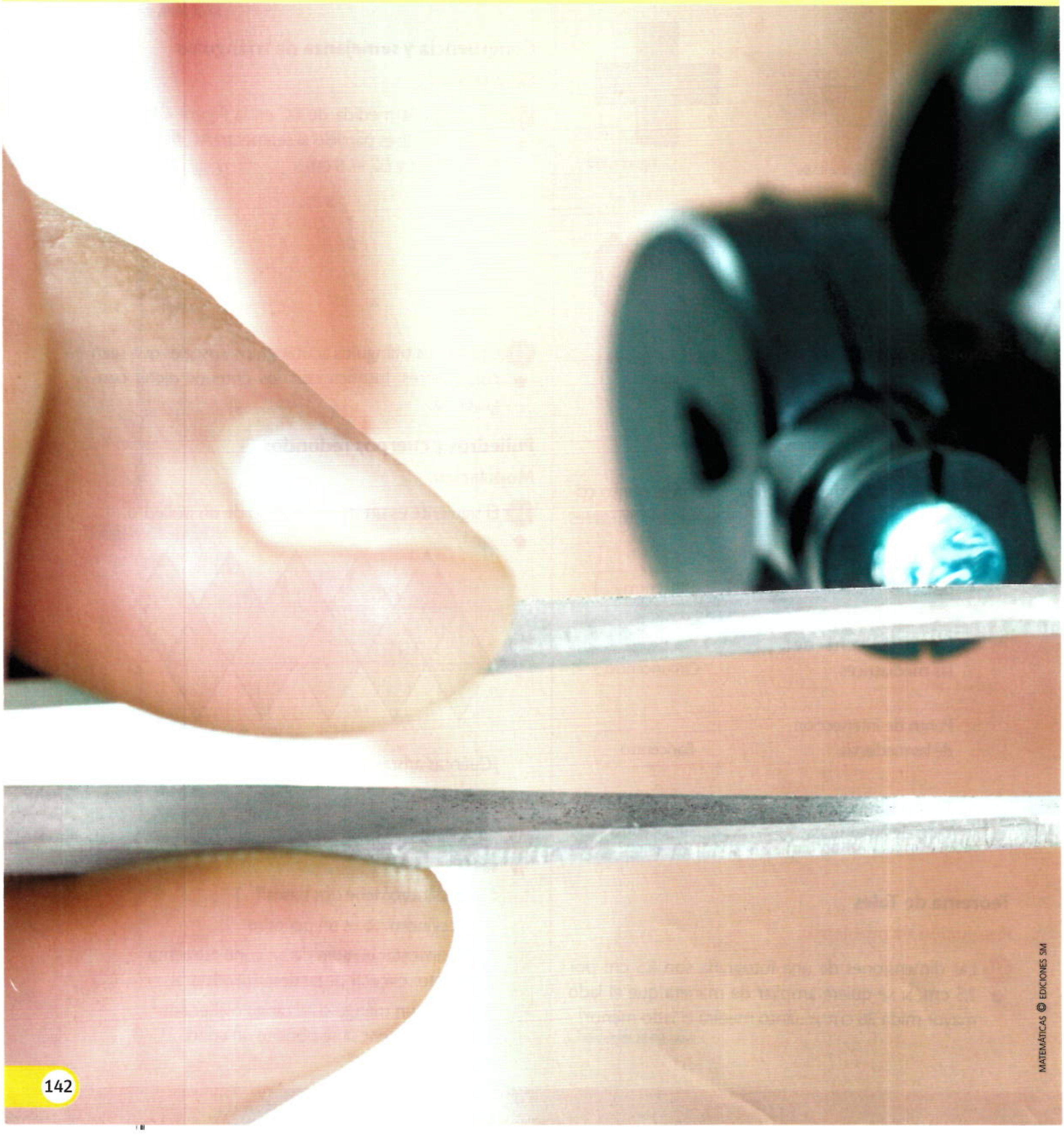
a. Un cilindro tiene dos bases. ( )

b. Un cilindro no es un poliedro. ( )

c. Al aumentar el radio de un cono aumenta el sector circular de su desarrollo lateral. ( )

d. Al girar un triángulo rectángulo alrededor de su hipotenusa se obtiene un cono. ( )

5 Longitudes, áreas y volúmenes



Ya sabemos

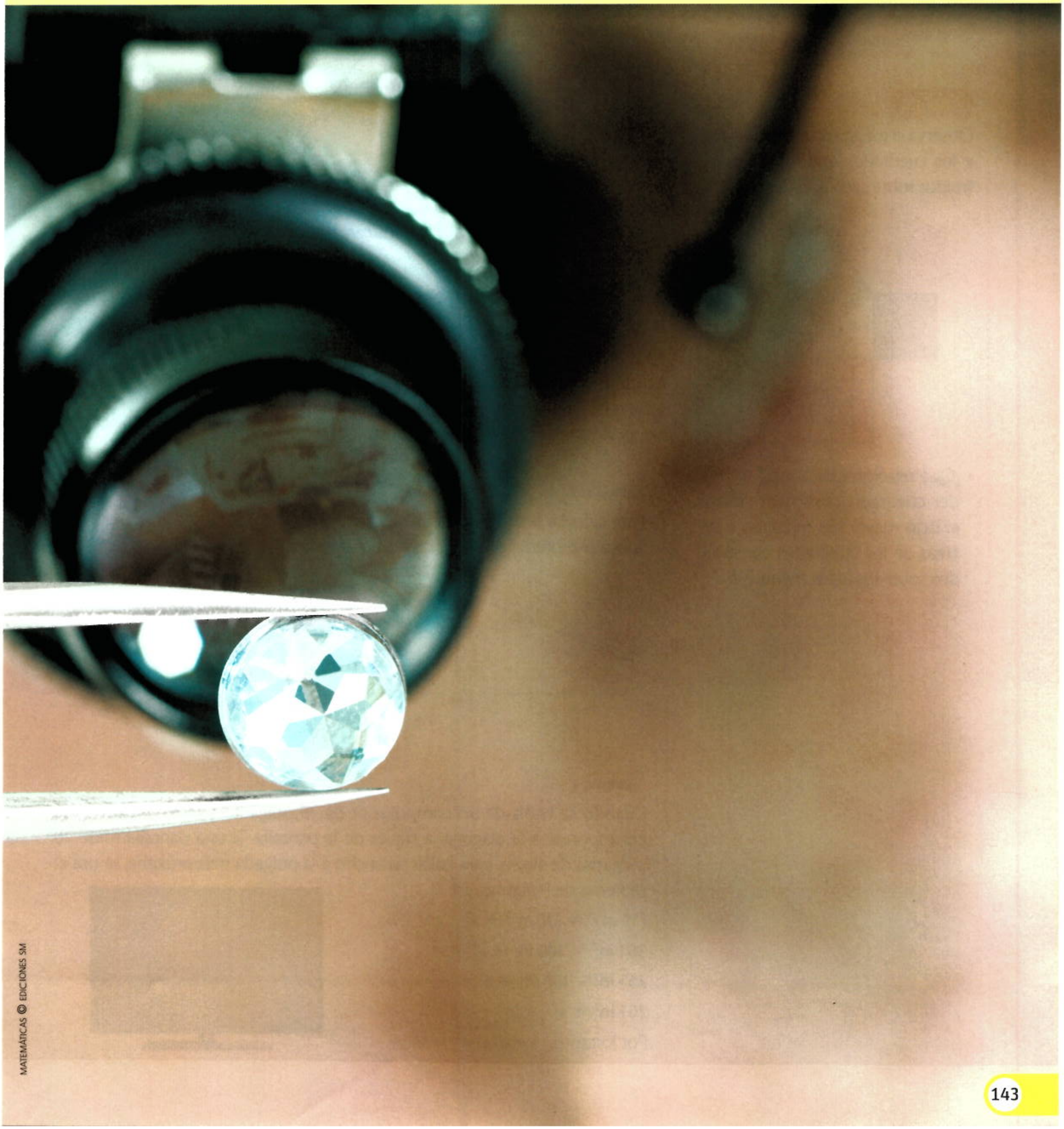
- Clasificar cuerpos geométricos en poliedros y cuerpos redondos.

Vamos a aprender

- A hallar el área lateral, el área total y el volumen de algunos cuerpos redondos.

Nos sirve para

- Resolver problemas reales en los que se involucren el área y el volumen.



1 Teorema de Pitágoras

Saberes previos

En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 8 cm y el cateto menor $\frac{3}{4}$ de la longitud del mayor. ¿Cuál es su área?

Analiza

Observa el triángulo rectángulo azul y los cuadrados que fueron construidos sobre cada uno de sus lados.

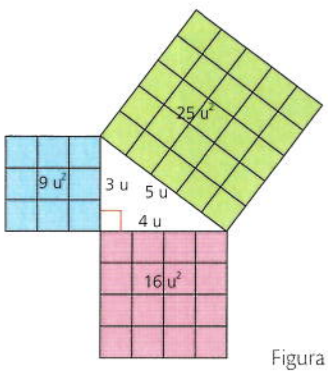


Figura 5.1

- ¿Qué relación existe entre el área del cuadrado construido sobre el lado mayor del triángulo y las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados menores?

Conoce

En la Figura 5.1, se puede establecer que el área del cuadrado sobre el lado mayor del triángulo rectángulo (hipotenusa) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados menores (catetos). Esto es:

$25 = 16 + 9$ o en forma equivalente: $5^2 = 4^2 + 3^2$.

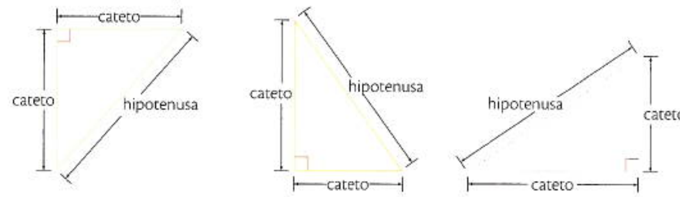
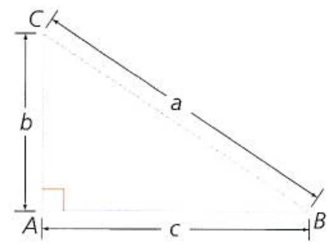


Figura 5.2

En todo triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados son los **catetos**.

1.1 Teorema de Pitágoras

El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

Figura 5.3

Ejemplo 1

Para calcular la longitud de la hipotenusa en el triángulo de la Figura 5.4, se aplica el teorema de Pitágoras como se indica:

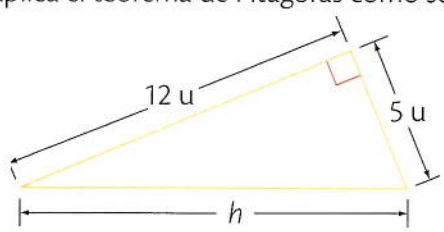


Figura 5.4

$h^2 = (12\text{ u})^2 + (5\text{ u})^2$

De donde:

$h^2 = 144\text{ u}^2 + 25\text{ u}^2$

Así:

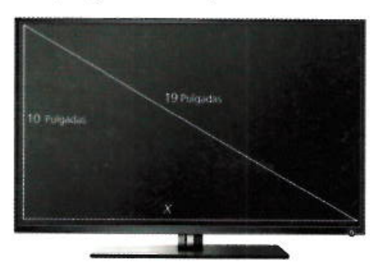
$h^2 = 169\text{ u}^2$

Por lo tanto, $h = \sqrt{169\text{ u}^2}$

Es decir, $h = 13$ u.

Ejemplo 2

Cuando se habla de un computador de 19 pulgadas (19 in), esa distancia corresponde a la diagonal a través de la pantalla. Si una pantalla mide 10 pulgadas de altura, para hallar su ancho a la pulgada más próxima, se usa el teorema de Pitágoras, así:



$(19\text{ in})^2 = (10\text{ in})^2 + x^2$

$361\text{ in}^2 = 100\text{ in}^2 + x^2$

$361\text{ in}^2 - 100\text{ in}^2 = x^2$

$261\text{ in}^2 = x^2$

Por lo tanto, $x = \sqrt{261\text{ in}^2} \approx 16$ in

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla las medidas de los catetos o las hipotenusas que hacen falta en los triángulos rectángulos.

a.

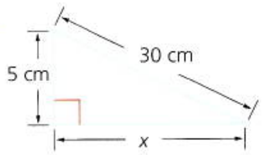


Figura 5.5

b.

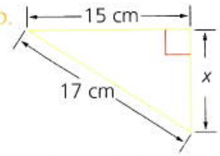


Figura 5.6

c.

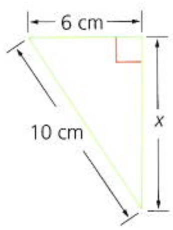


Figura 5.7

d.

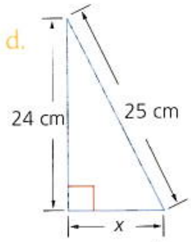


Figura 5.8

2 Para el triángulo rectángulo, de la Figura 5.9, halla el valor del lado que hace falta en cada caso usando el teorema de Pitágoras.

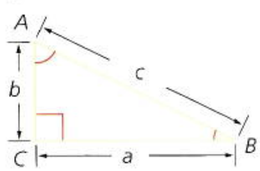


Figura 5.9

a. $a = 12, b = 9, c =$

b. $a = 11, b =$ $, c = 17$

c. $a =$ $, b = 8, c = 9$

d. $a =$ $, b = 60, c = 61$

3 Halla el perímetro y el área de cada uno de los siguientes triángulos rectángulos.

a.

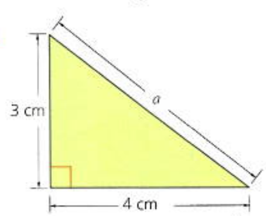


Figura 5.10

b.

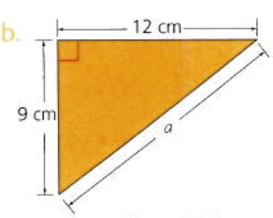


Figura 5.11

4 Halla el área y el perímetro de la Figura 5.12.

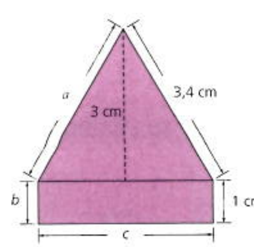


Figura 5.12

Resolución de problemas

5 Una maleta mide 60 cm de largo y 45 cm de alto. ¿Cuál es la medida de la longitud de la diagonal de la maleta al cm más cercano?

Figura 5.13

6 Dos atletas corren 8 km al norte y después 8 km al occidente. ¿Cuál es la distancia más corta, al kilómetro más cercano, que deben recorrer para volver al punto de partida?

Evaluación del aprendizaje

i *A*, *B* y *C* son tres ciudades. La ciudad *A* se encuentra a 65 km al oeste de la ciudad *B*. La ciudad *C* se encuentra al norte de *B* y a 97 km de distancia de A. Carlos y Diana salen de la ciudad A al mismo tiempo. Carlos va directo a *C* a una velocidad de 25 km por hora. Diana va de la ciudad A a la *B* y luego a *C* a una velocidad de 30 km por hora.

a. ¿Quién llega primero a la ciudad *C*?

b. ¿Cuánto más tiempo le tomará a la segunda persona llegar a la ciudad *C*?

ii Una escalera de 4 m de longitud se ubica a 1,5 m de distancia de una pared. La distancia desde el suelo hasta la parte superior de la pared es de 4 m. ¿Alcanza la escalera la parte superior de la pared?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Además de matemático, Pitágoras fue filósofo. Averigua cuáles son los cinco errores que, según su doctrina, cometen todos los seres humanos.

- Piensa cuáles de ellos has cometido y de qué manera puedes enmendarlos. Comparte tus opiniones con tus compañeros de clase.

2 Distancia entre dos puntos

Saberes previos

Ubica en el plano cartesiano los puntos $(-4, 0)$ y $(5, 0)$ y halla la distancia entre ellos.

Analiza

Dos pájaros se encuentran en los puntos de coordenadas $(-4, 4)$ y $(10, -2)$.

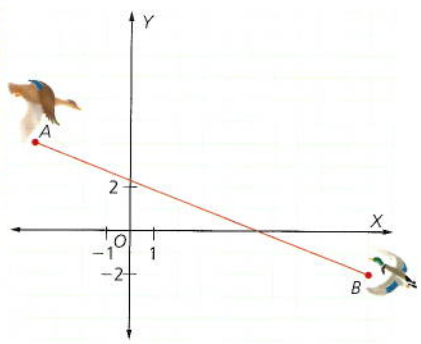


Figura 5.14

- ¿Qué distancia hay entre los dos pájaros? Considera que cada unidad representa 30 metros.

Conoce

2.1 Distancia entre dos puntos del plano

Para saber la distancia que separa a los dos pájaros, se puede completar un triángulo rectángulo en el que dicha distancia sea la hipotenusa (Figura 5.15), así:

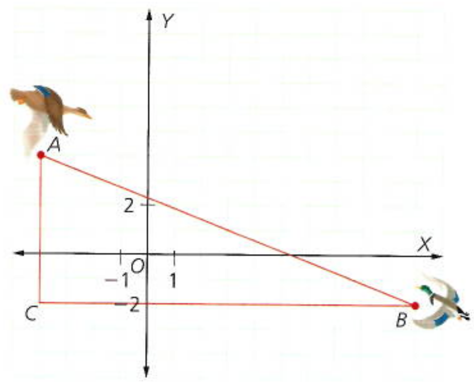


Figura 5.15

Se puede observar que del punto A al punto C hay 6 unidades de distancia que corresponden a: $6 \cdot 30 = 180$ m.

De otra parte, entre C y B hay 14 unidades de distancia que equivalen a: $14 \cdot 30 = 420$ m.

Luego, la distancia AB, puede calcularse mediante el teorema de Pitágoras así:

$$AB^2 = (180 \text{ m})^2 + (420 \text{ m})^2 = 208\,800 \text{ m}^2$$

Por tanto, $AB = \sqrt{208\,800 \text{ m}^2} \approx 456{,}9$ m

La **distancia entre dos puntos** cualesquiera $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano (Figura 5.16), se denota $d(P, Q)$ y se determina mediante la fórmula:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

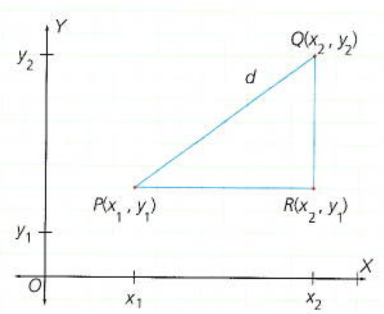


Figura 5.16

La fórmula anterior se deduce teniendo en cuenta que el triángulo PRQ de la Figura 5.16 es rectángulo. La longitud de sus catetos se calcula aplicando las fórmulas de la distancia:

$PR = |x_1 - x_2|$ ← Distancia entre dos puntos con la misma abscisa

$QR = |y_1 - y_2|$ ← Distancia entre dos puntos con la misma ordenada

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que la longitud de la hipotenusa es:

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (QR)^2$$

Se reemplazan PQ, PR y QR y se despeja d.

$$d^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 \Rightarrow d = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

Como $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $|y_1 - y_2|^2 = (y_1 - y_2)^2$, entonces

$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Ejemplo 1

La distancia entre los puntos $A(-4, 4)$ y $B(10, -2)$ se obtiene aplicando la fórmula de la distancia, así:

$$d = \sqrt{(10 - (-4))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{14^2 + (-6)^2} = \sqrt{232} \approx 15{,}231$$

2.2 Teorema de Pitágoras en el espacio

En un ortoedro, el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de los valores de sus tres dimensiones. Por lo tanto, la diagonal es la raíz cuadrada de dicha suma; es decir, $D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Este resultado se conoce como **teorema de Pitágoras en el espacio**.

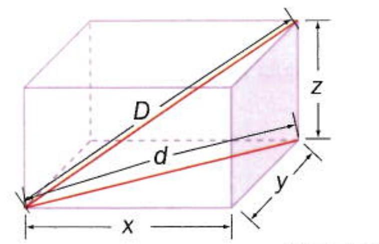


Figura 5.17

Para llegar a la fórmula de la diagonal, se descompone la Figura 5.17 en dos triángulos rectángulos: el triángulo formado por la diagonal de la base (d) y los lados x y y; y el triángulo formado por la altura (z), la diagonal del ortoedro (D) y la diagonal de la base (d).

La diagonal de la base es $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la diagonal del ortoedro se calcula por medio de la expresión: $D = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ejemplo 2

Para saber si un listón de madera de 1 m de longitud cabe en la caja de la Figura 5.18, se puede calcular la longitud de la diagonal del ortoedro. Si esta es mayor que 1 m, el listón cabe; de lo contrario, no.

Primero, se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la diagonal de la base: $d^2 = 30^2 + 40^2$; entonces, $d = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50\text{cm}$.

Conociendo la longitud de la diagonal de la base y la altura del ortoedro, se vuelve a aplicar el teorema de Pitágoras, para calcular la longitud de la diagonal del ortoedro:

$D^2 = 50^2 + 80^2$; entonces, $D = \sqrt{2500 + 6400} = \sqrt{8900} \approx 93{,}34$ cm.

Por tanto, el listón no cabe en la caja.

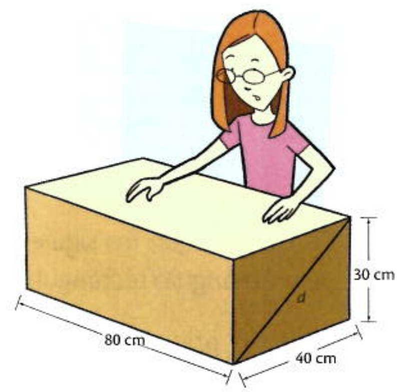


Figura 5.18

2.3 Distancia entre dos puntos en el espacio

Un **sistema de coordenadas tridimensional** se construye trazando un eje Z, perpendicular en el origen de coordenadas a los ejes X y Y. Cada punto en este sistema de coordenadas viene determinado por tres coordenadas: $P(x, y, z)$.

La distancia entre dos puntos cualesquiera $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ del espacio (Figura 5.19), se determina mediante la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

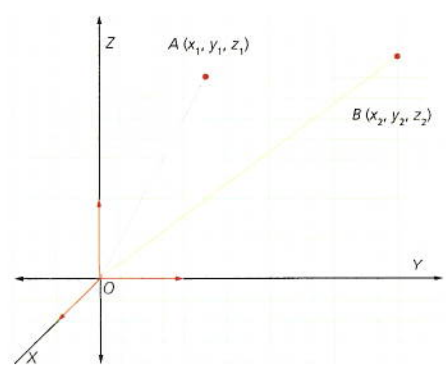


Figura 5.19

Ejemplo 3

Para hallar la distancia entre los puntos $A(-1, 4, 7)$ y $B(0, -2, 3)$ del espacio tridimensional, se puede hacer la siguiente correspondencia:

$$\begin{array}{c} (x_1, y_1, z_1) \text{ y } (x_2, y_2, z_2) \\ \downarrow \\ A(-1, 4, 7) \text{ y } B(0, -2, 3) \end{array}$$

Así, $d = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-2-4)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}28$.

2 Distancia entre dos puntos

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla la distancia entre cada par de puntos.

a.

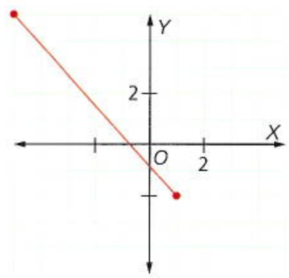


Figura 5.20

b.

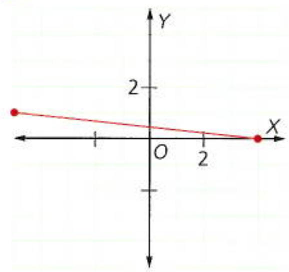


Figura 5.21

c.

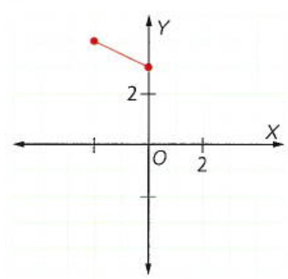


Figura 5.22

d.

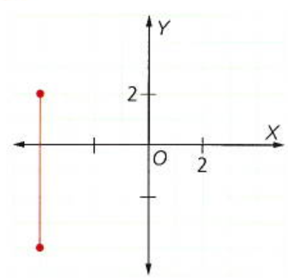


Figura 5.23

Razonamiento

2 Demuestra que los siguientes puntos son vértices de un triángulo rectángulo.

a. $A(3, 2)$, $B(5, -4)$ y $C(1, -2)$

b. $A(2, 4)$, $B(4, 8)$ y $C(6, 2)$

c. $A(3, 4)$, $B(-2, -1)$ y $C(4, 1)$

3 Demuestra que los puntos cuyas coordenadas son $A(3, 8)$, $B(-11, 3)$ y $C(-8, -2)$, son vértices de un triángulo isósceles.

Ejercitación

4 Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a $\sqrt{13}$ es el punto $A(-1, -5)$. Si la abscisa del otro extremo es 2, halla su ordenada. Hay dos soluciones.

5 Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, 1)$. Halla las coordenadas del tercer vértice. Hay dos soluciones.

6 Demuestra que los puntos $A(3, 3)$, $B(-3, -3)$ y $C(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Ejercitación

7 Halla el perímetro del triángulo cuyos vértices tienen como coordenadas: $A(-2, 5)$, $B(4, 3)$ y $C(7, -2)$.

8 Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud igual a 10 es el punto $A(-3, 6)$. Si la abscisa del otro extremo es 3, halla su ordenada. Hay dos soluciones.

9 Los puntos $(-3, 2)$ y $(12, 10)$ son los puntos extremos del diámetro de una circunferencia. ¿Cuál es el radio de la circunferencia?

10 La distancia entre los puntos $(-2, y)$ y $(3, -7)$ es 13 unidades. ¿Cuáles son los posibles valores de y?

11 Las coordenadas de los vértices de un triángulo rectángulo son: $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ y $C(7, 4)$. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa del triángulo?

12 Halla el perímetro de la Figura 5.24.

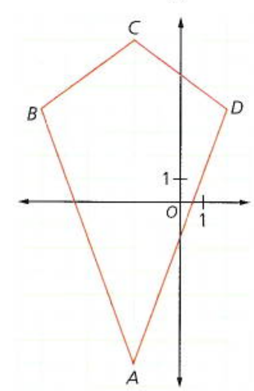


Figura 5.24

13 Las aristas del ortoedro de la Figura 5.25 miden respectivamente 12 cm, 4 cm y 3 cm. Halla la longitud de la diagonal d.

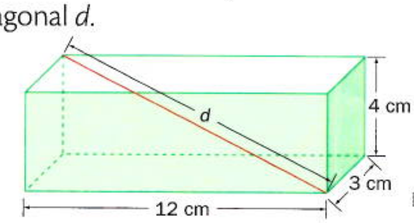


Figura 5.25

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejercitación

14 Halla el elemento desconocido en los prismas de las figuras 5.26 y 5.27.

Las medidas están dadas en centímetros.

a.

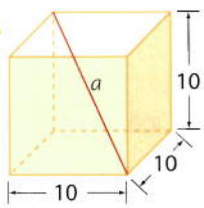


Figura 5.26

b.

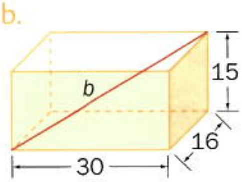


Figura 5.27

15 Calcula el elemento desconocido en estas pirámides. Las medidas están dadas en centímetros.

a.

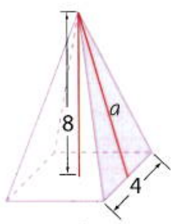


Figura 5.28

b.

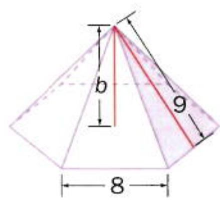


Figura 5.29

Comunicación

16 Una esfera de centro $P(a, b, c)$ es un conjunto de puntos en el espacio que equidistan del punto P.

La ecuación de la esfera de centro P y radio r es:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Encuentra la ecuación de una esfera con centro en el punto de coordenadas (1, 1, 1) y cuyo radio es 2.

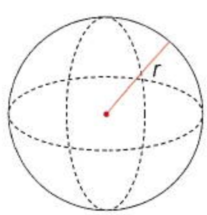


Figura 5.30

Resolución de problemas

17 Verifica que el tetraedro cuyos vértices son los puntos de coordenadas $P(0, 0, 3)$, $Q\left(0, \sqrt{8}, -1\right)$, $R\left(-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -1\right)$ y $S\left(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -1\right)$ es regular, es decir, tiene todas sus aristas de la misma longitud.

Figura 5.31

18 Jorge quiere guardar el asta de la bandera en el cajón de su clóset. Si el cajón tiene forma ortoédrica y sus dimensiones son:

Altura = 72 cm Ancho = 25 cm Largo = 32 cm

a. Representa con un dibujo la información que ofrece el problema.

b. ¿Cuál es la longitud máxima que debería tener el asta de la bandera para que se pueda guardar diagonalmente en el cajón?

c. Si el asta mide 0,9 m y se guarda de manera diagonal, ¿cabe en el cajón?

Evaluación del aprendizaje

i Observa la Figura 5.32 y resuelve.

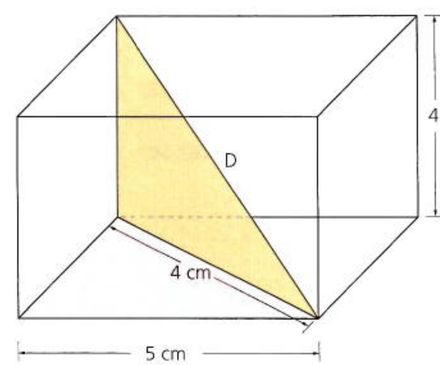


Figura 5.32

a. Calcula el área de cada uno de esos triángulos.

b. Halla la razón entre las áreas de los triángulos representados.

ii Susana tiene sobre su escritorio un portalápices en forma de ortoedro cuya base es un cuadrado de 7,2 cm de lado y con una altura de 9,5 cm. Al guardar diagonalmente un pincel de 28,3 cm de largo, en el portalápices, ¿cuál es la longitud de la parte del pincel que queda por fuera?

Figura 5.33

3 Perímetro de figuras planas

Saberes previos

Marcos participa en una carrera de 5,5 km de longitud. Si ha recorrido 34 hm del circuito, ¿cuántos metros le faltan para completar la carrera?

Analiza

Para la realización de un evento cultural en el Hotel Las Palmas, se quiere colocar una cinta de seguridad alrededor de un espacio rectangular de 40 m de largo por 20 m de ancho.

- ¿Cuántos metros de cinta de seguridad se necesitan?

Conoce

Para resolver la situación, se debe hallar la longitud del contorno o perímetro del espacio.

- Se hace un dibujo para visualizar mejor la situación.

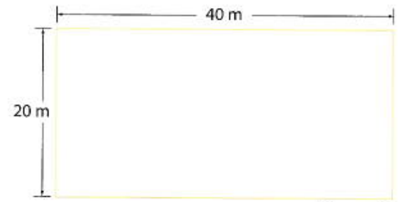


Figura 5.34

- Se calcula el perímetro:

$$40 \text{ m} + 20 \text{ m} + 40 \text{ m} + 20 \text{ m} = 120 \text{ m}$$

o también

$$(40 \text{ m} \cdot 2) + (20 \text{ m} \cdot 2) = 80 \text{ m} + 40 \text{ m} = 120 \text{ m}$$

Entonces, se necesitan 120 m de cinta de seguridad para cercar el terreno.

3.1 Perímetro

El **perímetro de una figura geométrica** plana es igual a la suma de las longitudes de sus lados.

Ejemplo 1

A continuación se muestra el cálculo del perímetro de algunos polígonos regulares.

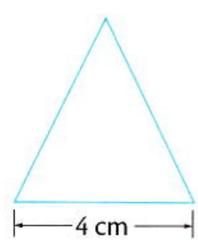


Figura 5.35

Figura 5.36

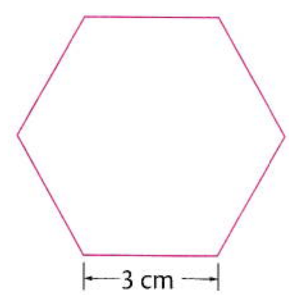


Figura 5.37

Triángulo equilátero	Cuadrado	Hexágono regular
$P = 3 \cdot l$	$P = 4 \cdot l$	$P = 6 \cdot l$
$P = 3 \cdot 4 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$	$P = 4 \cdot 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$	$P = 6 \cdot 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$

Ejemplo 2

El perímetro de la Figura 5.38 es 31 m. Para saber la longitud del lado desconocido, se usa el concepto de perímetro.

Así, si P es el perímetro entonces:

$$P = 31 \text{ m} = 8 \text{ m} + 6 \text{ m} + 10 \text{ m} + x$$

Al despejar la incógnita, se tiene que:

$$31 \text{ m} - 8 \text{ m} - 6 \text{ m} - 10 \text{ m} = x \Rightarrow 7 \text{ m} = x$$

Por tanto, la longitud del lado desconocido es 7 m.

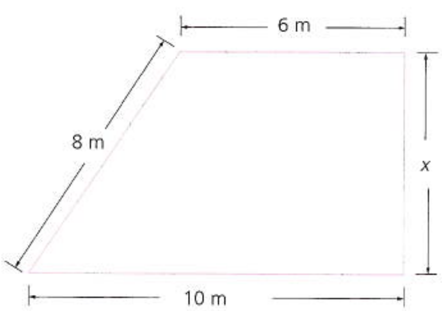


Figura 5.38

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el perímetro de los polígonos de las figuras 5.39 a 5.43. Las medidas están dadas en centímetros.

a.

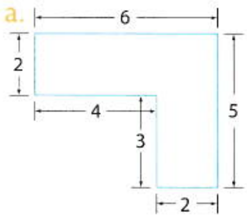


Figura 5.39

b.

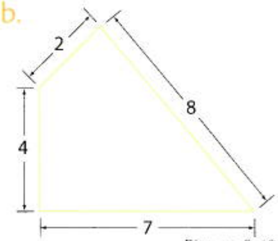


Figura 5.40

c.

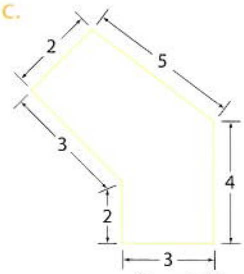


Figura 5.41

d.

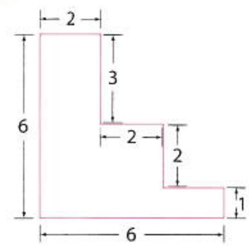


Figura 5.42

e.

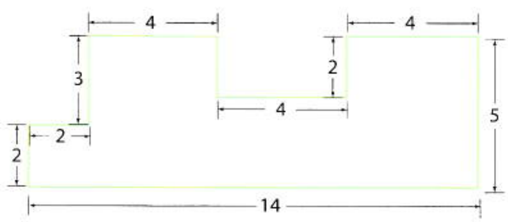


Figura 5.43

Comunicación

2 Relaciona cada polígono regular con la fórmula para calcular su perímetro.

a. Pentágono	$P = 6 \cdot l$
b. Hexágono	$P = 4 \cdot l$
c. Cuadrado	$P = 12 \cdot l$
d. Heptágono	$P = 8 \cdot l$
e. Dodecágono	$P = 10 \cdot l$
f. Octágono	$P = 7 \cdot l$
g. Decágono	$P = 5 \cdot l$

3 Dibuja en tu cuaderno:

a. Un cuadrado que tenga 12 cm de perímetro.

b. Un rectángulo que tenga 14 cm de perímetro.

c. Un triángulo de 15 cm de perímetro.

Resolución de problemas

4 Se quiere cercar un lote de 3 dam de largo por 7 m de ancho, con dos cuerdas de alambre. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan?

5 Mariela quiere colocar encaje por el borde de un mantel rectangular que elaboró. Si el mantel mide 200 cm de ancho y el doble de largo, ¿cuántos metros de encaje debe comprar?

6 El palacio Escorial tiene una estructura rectangular de 2 070 dm de largo y 15 300 cm de ancho.

Si se deben ubicar banderas alrededor del palacio, una por cada metro de distancia, incluyendo los vértices, ¿cuántas banderas se necesitarán?

Evaluación del aprendizaje

i En un parque con forma rectangular como el de la Figura 5.44, se planta un árbol cada 2 metros a lo largo de todo el contorno del parque, ¿cuántos árboles encierran el parque?

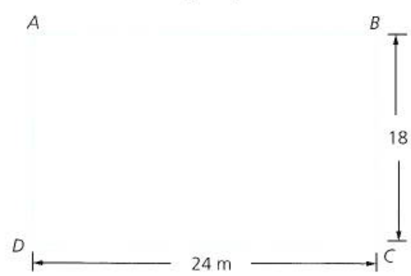


Figura 5.44

ii Calcula el perímetro de la Figura 5.45.

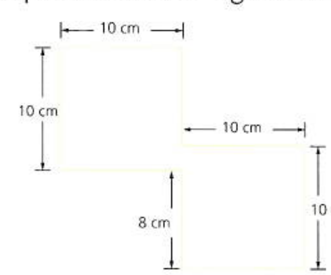


Figura 5.45

iii La plaza cuadrada que se representa en la Figura 5.46 tiene un perímetro de 24 cm. Si el triángulo tiene un perímetro de 15 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura azul?

Figura 5.46

4 Longitudes de figuras circulares

Saberes previos

Traza con un compás una circunferencia de un radio cualquiera. Luego, con ayuda de una cuerda mide la longitud de la línea y traslada esta medida a un metro. Mide, de la misma manera, el radio. Calcula la razón entre la longitud de la circunferencia y su radio. Repite este procedimiento con otras circunferencias y compara las razones obtenidas.

Analiza

Las ruedas de la bicicleta de Pedro tienen un diámetro de 65 cm. Pedro quiere saber cuántos metros avanza con su bicicleta por una vuelta de la rueda.

La proporción entre la medida de un arco (en grados) y la longitud de la circunferencia, se establece mediante la fórmula:

$$\frac{a^o}{360^o} = \frac{L_{arco}}{2\pi r}$$

Al despejar se obtiene la expresión para calcular la longitud de un arco de circunferencia.

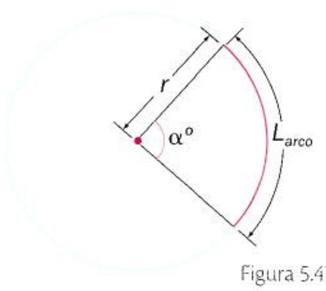


Figura 5.47

Conoce

Para responder su duda, Pedro rodea con una cuerda la rueda trasera y después mide la cuerda. Concluye que por cada vuelta de la rueda avanza algo más de 2 metros. Sin embargo, para dar una respuesta con exactitud es necesario calcular la longitud de la circunferencia.

4.1 Longitud de la circunferencia

La **longitud de la circunferencia** se obtiene multiplicando la longitud del diámetro d por el valor constante π (el valor de π es 3,1416, aproximadamente).

$$L = \pi \cdot d$$

Como la longitud del diámetro es el doble de la del radio r, otra fórmula, muy utilizada, para obtener el valor de la longitud de la circunferencia es:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Ejemplo 1

Para calcular cuántos metros por vuelta avanza Pedro con su bicicleta, se tiene en cuenta que el diámetro de la rueda es de 65 cm y se aplica la fórmula de cálculo de la longitud de la circunferencia.

$$L = \pi \cdot d \quad \Rightarrow \quad L = 3{,}1416 \cdot 65 \text{ cm} = 204{,}204 \text{ cm} = 2{,}042 \text{ m}$$

Luego, con cada vuelta de la rueda, avanza 2,042 metros.

4.2 Longitud de un arco de circunferencia

La **longitud de un arco de circunferencia**, cuyo ángulo central mide $\alpha°$, se calcula con la fórmula:

$$L_{\text{arco de } \alpha°} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha°}{360°}$$

Ejemplo 2

Observa cómo se calcula la longitud de un arco cuyo ángulo central mide 120°, en una circunferencia de 4 cm de radio.

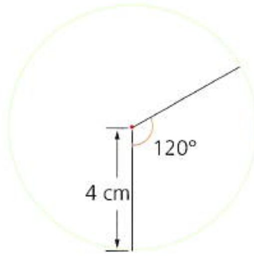


Figura 5.48

$$L_{arco} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 120°}{360°}$$

$$L_{arco} = 8{,}37 \text{ cm}$$

El arco mide 8,37 cm de longitud.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la longitud del elemento que se indica en cada uno de los siguientes casos.

a. La longitud de una circunferencia de 9 cm de radio.

b. El diámetro de una circunferencia de 50,24 cm de longitud.

c. El radio de una circunferencia que mide 43,9 cm de longitud.

d. El diámetro de una circunferencia, si se sabe que la longitud de un arco de 50° es de 5,23 cm.

2 Calcula la longitud de cada circunferencia.

a.

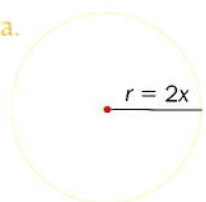


Figura 5.49

b.

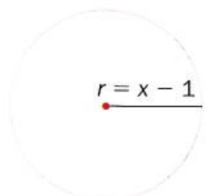


Figura 5.50

3 Encuentra el valor del radio, dada la longitud de cada circunferencia.

a.

Figura 5.51

$L = 25{,}12$ cm

b.

Figura 5.52

$L = 24{,}492$ cm

c.

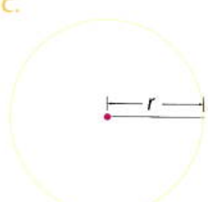


Figura 5.53

$L = 39{,}564$ cm

d.

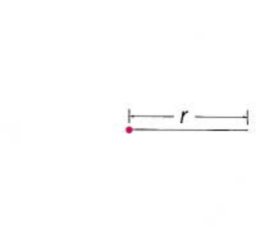


Figura 5.54

$L = 89{,}176$ cm

Comunicación

4 Piensa y escribe los pasos que seguirías para determinar la longitud de la circunferencia, si se sabe la longitud del lado del cuadrado inscrito en ella.

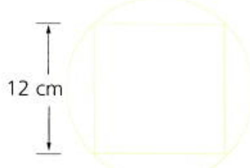


Figura 5.55

5 Colorea igual las casillas que corresponden a datos de la misma circunferencia.

$r = 13$	$L = 13\pi$	$L = 5\pi$	$r = 6{,}5$
$r = \sqrt{2}$	$r = \frac{5}{2}$	$L = 2\sqrt{2}\ \pi$	$L = 26\pi$

Resolución de problemas

6 Dos circunferencias *A* y *B* tienen longitudes de 37,7 cm y 150,8 cm, respectivamente. Estima cuántas veces mayor es el radio de *B* con respecto al de *A*.

7 El diámetro de una circunferencia mide 8 dm. ¿Cuál es la longitud del arco de 85°, expresada en decímetros? ¿Y expresada en metros?

8 Marisol necesita encargar la lente de una lupa cuyo perímetro sea 25,4 cm. ¿Cuál es el radio de la lente de la lupa que necesita?

Evaluación del aprendizaje

i Una torta de 18 cm de radio se dividió en cuatro partes iguales. ¿Cuál es la longitud del arco que le corresponde a cada porción de la torta?

ii Determina el perímetro de este diseño de piscina.

Figura 5.56

Educación ambiental

Los líquenes son organismos que pueden ayudarnos a determinar la calidad del aire. Visita un parque o un bosque y halla con una cuerda el perímetro de los líquenes que están cerca del camino y el de los que están más apartados de él.

- ¿Qué diferencias encuentras?

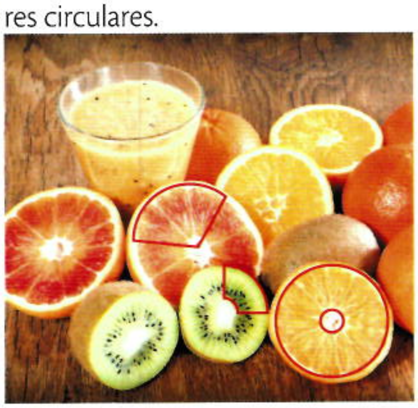
5 Área del círculo y áreas de regiones circulares

Saberes previos

Se desea poner baldosas decorativas cuadradas de 1 dm de lado en un piso cuadrangular. ¿Cuántas baldosas se necesitarán para colocar en el piso cuadrangular de 1 m de lado?

Analiza

Algunas frutas como el kiwi, la naranja, la piña y el limón, al ser cortadas transversalmente permiten ver algunas regiones de diferente color o textura que se asemejan a sectores circulares.



Conoce

Al evidenciar las formas que se obtienen en estos cortes, se puede considerar la posibilidad de medir y expresar el área tanto de la figura total como de los sectores que se identifican. A continuación se estudiarán las fórmulas que permiten calcular estas medidas y la manera en la que se aplican.

5.1 Área del círculo

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2$$

Esa fórmula se deduce cuando, al inscribir sucesivamente polígonos en una circunferencia e ir aumentando la cantidad de lados de cada uno, el perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia, y su apotema al radio.

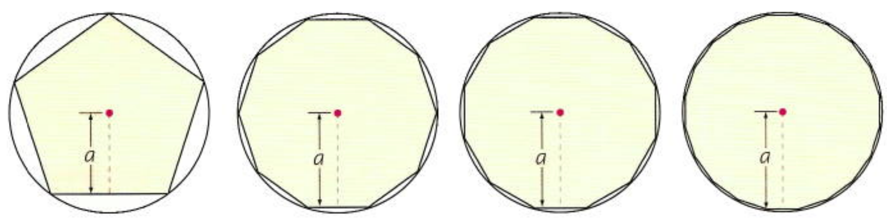


Figura 5.57

El área de un polígono regular se calcula mediante la expresión $A = \frac{p \cdot a}{2}$, luego. Luego si se considera la circunferencia como un polígono de infinitos lados, cuya apotema es el radio, se tiene que:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

Ejemplo 1

Los glóbulos rojos tienen forma aplanada. Son los que le dan a la sangre el color rojo que la caracteriza y cumplen otras funciones importantes en el cuerpo. Su diámetro varía entre 6 y 8 micrómetros (μm). Si el diámetro de un glóbulo rojo es 7 μm, su área es:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3{,}5)^2 = 12{,}25\pi \ \mu m^2$$

Por lo tanto, el área aproximada de un glóbulo rojo es de 38,46 micrómetros cuadrados.

5.2 Áreas de regiones circulares

Un **sector circular** es una porción de un círculo comprendida entre dos radios y el arco de circunferencia que lo limita.

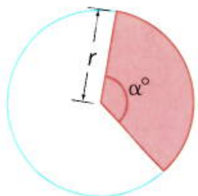


Figura 5.58

Para calcular el área de un sector circular se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{A_{sector}}{A_{círculo}} = \frac{a^{o}}{360^{o}}$$

Al despejar A_{sector} se obtiene la expresión para calcular el área requerida.

El **área de un sector circular** cuyo ángulo central mide $\alpha°$ se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha°}{360°}$$

Ejemplo 2

Una pizza de 35 cm de radio se divide en ocho porciones. Para determinar el área de cada una de esas porciones, primero hallamos el ángulo del sector circular de cada porción, así:

$$\frac{360°}{8} = 45°$$

Después, incluyendo el valor del ángulo en la fórmula del área del sector circular, se obtiene que:

$$A = \frac{\pi \cdot (35)^2 \cdot 45°}{360°} = 480{,}81 \text{ cm}^2$$

Entonces, el área de cada porción de pizza es de 480,81 cm^2.

Una **corona circular** es la región limitada por dos círculos concéntricos. En la Figura 5.59 se observa que $R > r$. El área de la corona circular se calcula así:

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

Al extraer factor común se obtiene que $A = \pi(R^2 - r^2)$.

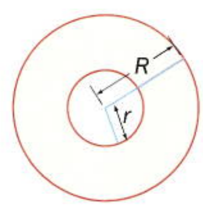


Figura 5.59

El **área de una corona circular** es igual a la diferencia de las áreas del círculo mayor y del círculo menor.

$$A = \pi\,(R^2 - r^2)$$

Ejemplo 3

Un disco compacto tiene un radio de 12 cm y en su centro tiene un agujero circular de 2 cm de radio. El área de la corona circular en la que está grabada la información del CD es:

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(12^2 - 2^2) = 140\pi \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la corona circular del disco compacto es de 439,6 cm^2.

5 Área del círculo y áreas de regiones circulares

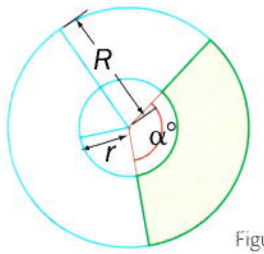


Figura 5.60

Para calcular el área de un trapecio circular se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{A_{\text{trapecio}}}{A_{\text{corona}}} = \frac{a^o}{360^o} \Rightarrow$$

$$\frac{A_{\text{trapecio}}}{\pi(R^2 - r^2)} = \frac{a^o}{360^o}$$

Al despejar A_{trapecio} se obtiene la expresión para calcular el área requerida.

Un **trapecio circular** es la porción de una corona circular limitada por dos radios.

El **área de un trapecio circular** se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ(R^2 - r^2)}{360°}$$

Ejemplo 4

En un jardín de forma circular de 70 m de radio hay una fuente situada en el centro, también de forma circular, de 30 m de radio. Se destina una parte del jardín, cuyo ángulo central mide 60°, para cultivar rosas.

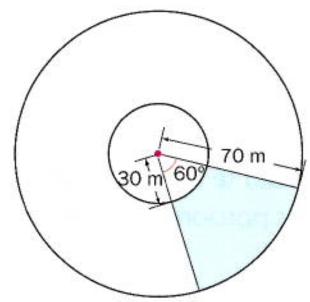


Figura 5.61

En la Figura 5.61, se observa que el área que se desea destinar para el cultivo de rosas es un trapecio circular. Se calcula su área así:

$$A = \frac{\pi \cdot \alpha^\circ(R^2 - r^2)}{360°} = \frac{\pi \cdot 60^\circ(70^2 - 30^2)}{360°} = 2\,093{,}3 \text{ m}^2$$

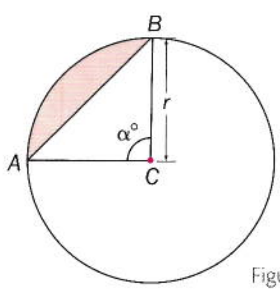


Figura 5.62

Un **segmento circular** corresponde a la región limitada por una cuerda y el arco de circunferencia que se determina. Su área se calcula restando el área del $\triangle ABC$ de la Figura 5.62 del área del sector circular comprendido entre los radios AC y BC. Esto es:

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360°} - A_{\triangle ABC}$$

Ejemplo 5

El área del segmento circular que se muestra en la Figura 5.63 es igual a la diferencia de las áreas del sector circular y del triángulo que se determina.

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha^\circ}{360°} - A_{\triangle ABC}$$

$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90^\circ}{360°} = 19{,}625 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{segmento circular}} = 19{,}625 - 12{,}5 = 7{,}125 \text{ cm}^2$$

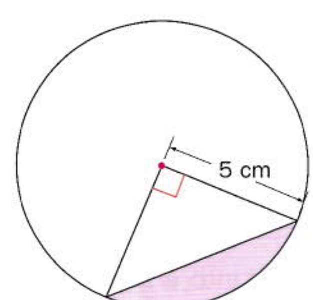


Figura 5.63

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Halla el área del círculo en cada caso, si se sabe que:

a. $d = D$

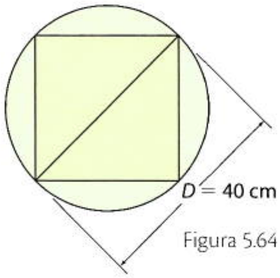


Figura 5.64

b. $l = r$

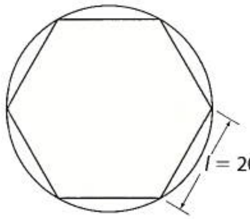


Figura 5.65

c. $h = \frac{3}{2}r$

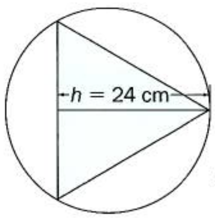


Figura 5.66

2 Calcula el área y el perímetro de cada círculo, si en cada uno se inscribe el cuadrado señalado.

a.

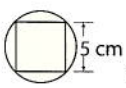


Figura 5.67

b.

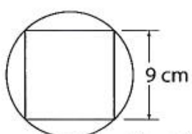


Figura 5.68

c.

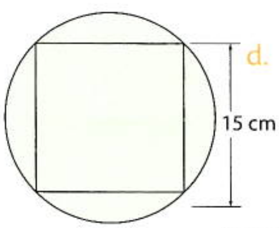


Figura 5.69

d.

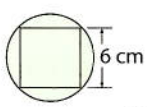


Figura 5.70

3 Calcula el área de cada una de las siguientes figuras.

a.

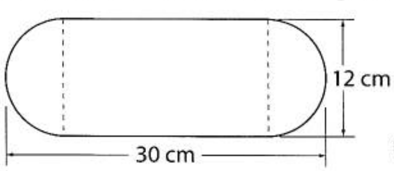


Figura 5.71

b.

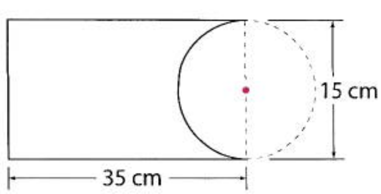


Figura 5.72

Ejercitación

4 Calcula el área de cada región circular.

a.

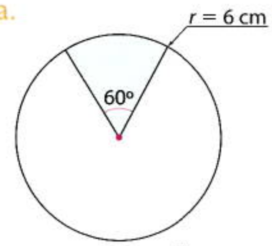


Figura 5.73

b.

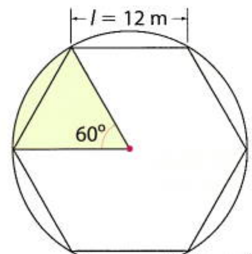


Figura 5.74

c.

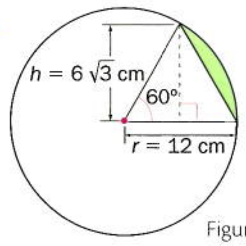


Figura 5.75

d.

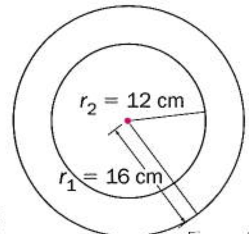


Figura 5.76

Resolución de problemas

5 La Figura 5.77, representa el plano de una fuente. ¿Qué superficie estará ocupada por agua?

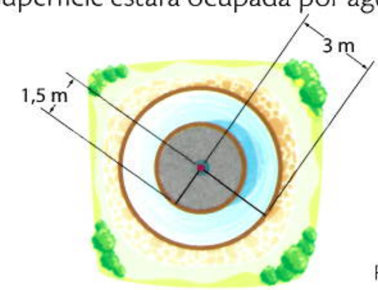


Figura 5.77

6 El juego de tiro al blanco de cierto parque, se diseñó con tres círculos concéntricos, de manera que el radio del más grande es ocho veces el del menor, y el del mediano, una tercera parte del mayor. Si el menor tiene un radio de 4 cm, ¿cuánto miden las tres coronas circulares?

Evaluación del aprendizaje

¿Cuál es el perímetro y el área de este abanico?

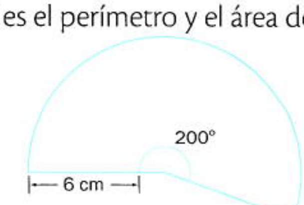


Figura 5.78

6 Áreas de cilindros y conos

Saberes previos

Julián quiere construir una caja de cartón cuyas dimensiones sean 12 cm de ancho, 20 cm de largo y 10 cm de alto. ¿Qué cantidad mínima de cartón necesitará?

Analiza

Una empresa fabrica envases metálicos como los de la Figura 5.79.

Figura 5.79

- Si la empresa desea hallar la cantidad de material que debe emplear en la elaboración de cada envase, ¿qué debe hacer?

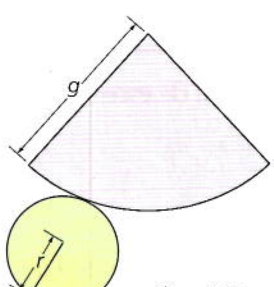


Figura 5.82

Conoce

6.1 Área del cilindro

Los envases que fabrica la empresa tienen forma cilíndrica. Así que, para resolver el problema se puede abrir la lata como se muestra en la Figura 5.80.

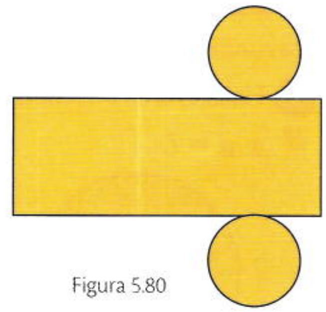


Figura 5.80

Por lo tanto, para hallar la cantidad de material que se requiere para fabricar un envase se debe calcular el área de los círculos y del rectángulo que forman el envase; es decir, su **área total**. Si la empresa solo quisiera poner una etiqueta alrededor de la lata debería calcular su **área lateral**; es decir, el área del rectángulo.

Para calcular el **área lateral de un cilindro** coincide con el área de un rectángulo. Su **área total** se obtiene al adicionar el área lateral con el área de las dos bases circulares.

Para calcular su área lateral se emplea la siguiente fórmula: $A_L = 2\pi rh$.

Si a la expresión anterior se le suman las áreas de las dos regiones circulares de las bases, se obtiene el área total del cilindro:

$$A_T = A_L + 2A_{base} \Rightarrow A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi (h + r)$$

Ejemplo 1

Las áreas lateral y total del cilindro de la Figura 5.81 se calculan aplicando las fórmulas anteriores.

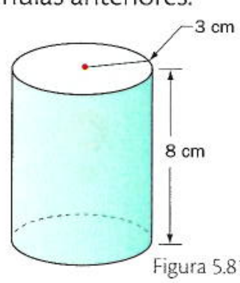


Figura 5.81

$$\begin{aligned} A_L &= 2\pi \cdot r \cdot h \\ &= 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi \text{ cm}^2 \\ A_T &= A_L + 2A_{base} \\ A_T &= 48\pi + 2\pi \cdot 3^2 = 48\pi + 2\pi \cdot 9 \\ A_T &= 48\pi + 18\pi = 66\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

6.2 Área del cono

Para calcular el **área lateral de un cono** se emplea la fórmula: $A_L = \pi rg$.

Si a la expresión anterior se le suma el área de la región circular de la base, se obtiene el **área total del cono**:

$$A_T = A_L + A_{base} \Rightarrow A_T = \pi rg + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

El valor de π se considerará en los ejemplos y las actividades propuestas como 3,14.

Ejemplo 1

Un cono circular mide 5 cm de altura y el radio de su base mide 3 cm. Para hallar el área lateral y el área total, se debe hallar primero el valor g de su generatriz, con el teorema de Pitágoras, así:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = (5\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$

$g^2 = 34\text{ cm}^2 \Rightarrow g = 5{,}83\text{ cm}$

Ahora:

$A_L = \pi rg = 3{,}14 \cdot 3\text{ cm} \cdot 5{,}83\text{ cm} = 54{,}9\text{ cm}^2.$

$A_T = \pi r(g + r) = 3{,}14 \cdot 3\text{ cm}\ (5{,}83\text{ cm} + 3\text{ cm}) = 83{,}18\text{ cm}^2.$

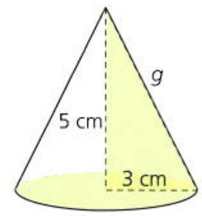


Figura 5.83

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Halla el área lateral y el área total de cada sólido. Las medidas están dadas en centímetros.

a.

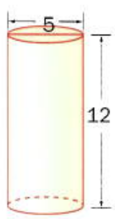


Figura 5.84

b.

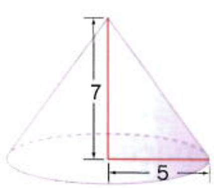


Figura 5.85

2. El radio de un cono mide 6,9 cm, y la generatriz, 12 cm. Calcula sus áreas lateral y total.

Resolución de problemas

3. Un envase de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 16 cm de altura requiere una etiqueta de papel que cubra toda su área. ¿Cuánto papel se necesita para forrar el envase?

4. El área total de un cono es 375 m². Si su generatriz mide cuatro veces su radio, ¿cuál es el diámetro del círculo de la base del cono?

5. María quiere envolver en papel regalo un perfume cuyo envase es cilíndrico. Si el envase mide 20 cm de altura y el diámetro de la base mide 10 cm, ¿cuánto papel regalo debe cortar para que el regalo quede completamente empacado sin que sobre ni falte papel?

6. Para un proyecto de reciclaje, los estudiantes de octavo están diseñando macetas de aluminio de forma cilíndrica sin la parte superior. Si cada maceta mide 18 pulgadas de altura y tienen un diámetro en la base de 36 cm, ¿cuánto aluminio se necesita para cada maceta?

7. Calcula las áreas lateral y total del sólido de la Figura 5.86.

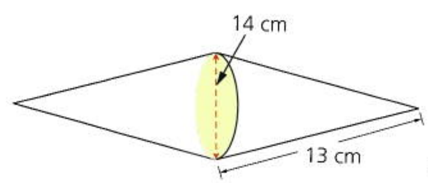


Figura 5.86

Evaluación del aprendizaje

✓ Una aplanadora tiene un rodillo de 1,20 m de diámetro y 2,30 m de largo.

¿Qué superficie de tierra aplana en cada vuelta del rodillo?

7 Volúmenes de cilindros y conos

Saberes previos

Una bodega mide 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto.

- ¿Cuántas cajas caben en la bodega si cada una mide 10 cm de largo, 6 cm de ancho y 4 cm de altura?
- ¿Qué volumen ocupan cada una de las cajas?

Analiza

Los cohetes propulsores de las naves espaciales están formados por un enorme cilindro cargado de combustible.

- Si la zona de almacenamiento del combustible de un cohete espacial con forma cilíndrica tiene 75 m de altura y un radio de 8 m, ¿cuánto combustible contiene cuando está completamente lleno?

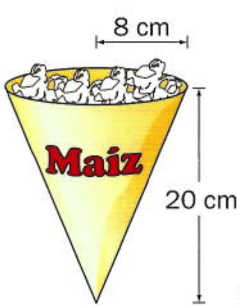


Figura 5.88

Conoce

Para responder la pregunta, se debe calcular la capacidad del cilindro (que está íntimamente relacionada con su volumen, como se verá enseguida).

7.1 Volumen de un cilindro

El **volumen *V* de un cilindro** es el producto del área de su base A_B por la altura h del cilindro. Si el radio del círculo de la base es r, entonces $A_B = \pi r^2$ y, por tanto, $V = \pi r^2 h$.

Ejemplo 1

El volumen del envase que se ilustra en la Figura 5.87 es:

$V = 3{,}14 \cdot (4 \text{ cm})^2 \cdot 12 \text{ cm} = 3{,}14 \cdot 16 \text{ cm}^2 \cdot 12 \text{ cm}$

$V = 602{,}88 \text{ cm}^3$

Figura 5.87

7.2 Volumen de un cono

El **volumen de un cono** es igual a la tercera parte del área de su base, y multiplicada por la altura del cono. Esto es: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Ejemplo 2

Se construyó con cartulina el empaque para palomitas que se muestra en la Figura 5.88. El volumen de este empaque es:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot (8 \text{ cm})^2 \cdot 20 \text{ cm}}{3}$$

Al efectuar las operaciones se obtiene que: $V = 1\,339{,}7 \text{ cm}^3$

7.3 Relación entre volumen y capacidad

La forma de algunos objetos les permite contener sustancias; esos objetos se llaman **recipientes** y de ellos se puede medir tanto su **capacidad** como su **volumen**. Por ejemplo, una taza vacía tiene un volumen, ocupa un lugar en el espacio y, como es un recipiente, también se puede medir su capacidad.

Por tanto, entre ambas magnitudes existe una equivalencia que se basa en la relación entre el litro (unidad de capacidad) y el decímetro cúbico (unidad de volumen): 1 dm³ = 1 litro.

Ejemplo 3

Para hallar la cantidad de combustible del cohete espacial del inicio, se halla primero el volumen del cilindro que lo contiene:

$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot (8 \text{ m})^2 \cdot 75 \text{ m} = 15\,072 \text{ m}^3$

$= 15\,072 \cdot 1\,000 \text{ dm}^3 = 15\,072\,000 \text{ dm}^3 = 15\,072\,000 \text{ L}$

Entonces, el tanque del cohete contiene 15 072 000 litros de combustible.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el volumen de los siguientes cuerpos. Las medidas están dadas en centímetros.

a.

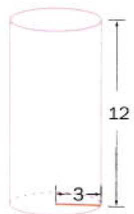


Figura 5.89

b.

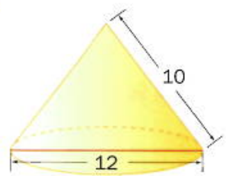


Figura 5.90

2 Calcula el volumen de un cilindro de 16 cm de diámetro, y altura, el triple del diámetro.

3 Calcula la altura de un cono de volumen 164 cm^3 y cuyo radio de la base mide 6 cm.

Resolución de problemas

4 Una empresa donó a una ONG 1 000 000 cm^3 de leche en polvo. Para envasarla, utilizaron unos empaques como el de la Figura 5.91. ¿Cuántos envases se necesitaron?

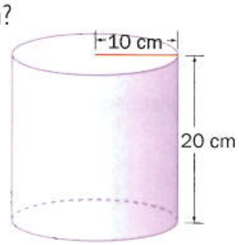


Figura 5.91

5 Cierta bodega tiene la forma indicada en la Figura 5.92. Determina su volumen total.

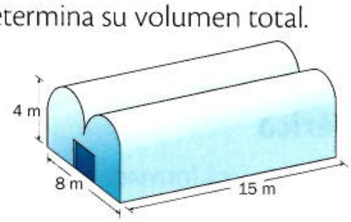


Figura 5.92

6 La Figura 5.93 muestra un cono inscrito en un cilindro donde la longitud de su altura es igual a la de su radio. La superficie lateral del cilindro se ha cubierto con un papel que tiene 16π cm de largo y 15 cm de ancho.

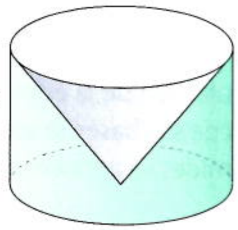


Figura 5.93

a. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

b. ¿Cuál es el volumen del cono?

7 El recipiente cónico de la Figura 5.94 que estaba completamente vacío, se llenó de agua a una velocidad constante. Después de 2 segundos ya contenía 70 cm^3.

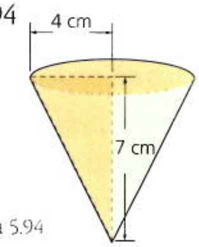


Figura 5.94

Calcula el porcentaje del recipiente que se llenó después de 3 segundos.

8 Calcula el volumen de papel higiénico que hay en el rollo de la Figura 5.95.

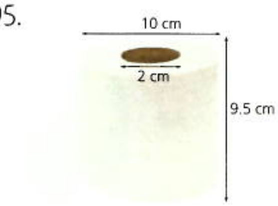


Figura 5.95

9 Gabriel tiene una cafetera de goteo. El agua caliente se filtra a través de un recipiente en forma cónica que contiene café molido. El cono tiene una altura de 8 cm y 30 cm de diámetro de la base. Suponiendo que el cono está lleno de agua y que esta gotea a una velocidad de 10 pulgadas cúbicas por minuto, ¿en cuánto tiempo pasará la totalidad del agua?

Evaluación del aprendizaje

i Una lata cilíndrica mide 16 cm de altura y el círculo de su base tiene 18 cm de diámetro. Otra lata de la misma forma tiene 30 cm de altura y el círculo de la base tiene un diámetro de 15 cm. ¿Cuál de las dos latas tiene mayor capacidad?

ii Se estima que el tambor de una lavadora es un cilindro cuyo diámetro es de 17 pulgadas y cuya altura es de 10 pulgadas. Calcula la longitud de una manguera de media pulgada de diámetro que pueda contener la suficiente cantidad de agua para llenar completamente el tambor de la lavadora.

8 Área y volumen de la esfera

Saberes previos

En su fiesta de cumpleaños, Juan recibió un balón de fútbol y uno de baloncesto que venían envueltos en papel de regalo.

- ¿En cuál de los dos regalos se utilizó mayor cantidad de papel para envolver los balones?

Analiza

Observa la Figura 5.96.

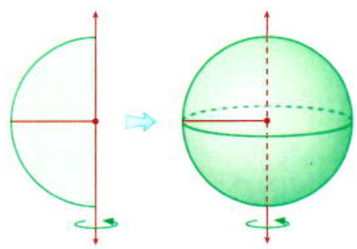


Figura 5.96

- ¿Qué cuerpo se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro?

Conoce

Al girar un semicírculo alrededor de su diámetro, se genera una **esfera**. Si se gira solo alrededor de su diámetro la semicircunferencia correspondiente a dicho semicírculo, se genera una superficie curva denominada **superficie esférica**.

La **superficie esférica** está formada por todos los puntos que se encuentran a igual distancia del centro de la esfera.

Al cortar con planos una esfera, se obtienen cuatro tipos de figuras geométricas:

Semiesfera

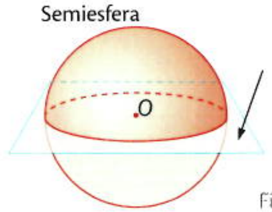


Figura 5.97

Un plano que pasa por el centro.

Casquete esférico

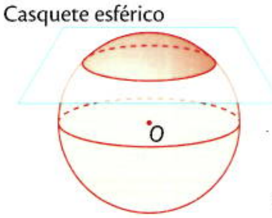


Figura 5.98

Un plano secante a la esfera.

Zona esférica

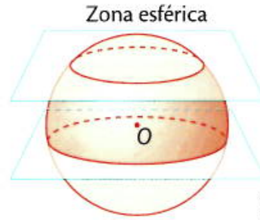


Figura 5.99

Dos planos paralelos secantes a la esfera.

Huso esférico

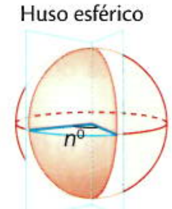


Figura 5.100

Dos planos que tienen un diámetro en común.

8.1 Volumen de la esfera

El volumen de una esfera se calcula empleando la siguiente fórmula:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

8.2 Área de la superficie esférica

La superficie del poliedro de la Figura 5.101, está formada por decenas de triángulos distintos, que dan la sensación de una esfera casi perfecta.

Si se une cada vértice de estos triángulos con el centro de la esfera, se forman pirámides triangulares cuyos volúmenes, aunque diferentes entre sí, suman aproximadamente el volumen de la esfera. Al aumentar el número de triángulos, la suma de las áreas de sus bases se aproxima al área de la superficie esférica S, y la altura de las pirámides se aproxima al radio r.

Así, el volumen de la esfera se podrá calcular como $\frac{S \cdot r}{3}$. Como el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, se tiene que $\frac{S \cdot r}{3} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$; de donde $S = 4\pi \cdot r^2$.

El área de la superficie esférica es $A = 4\pi r^2$.

Figura 5.101

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

El área de la superficie esférica de la esfera de la Figura 5.102 es:

$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot (3\text{ dm})^2 = 113{,}04\text{ dm}^2.$

El volumen de la misma esfera es:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\,(3\text{ dm})^3 = 113{,}04\text{ dm}^2.$

Por tanto, la capacidad de un recipiente esférico como el de la derecha es 113,04 litros.

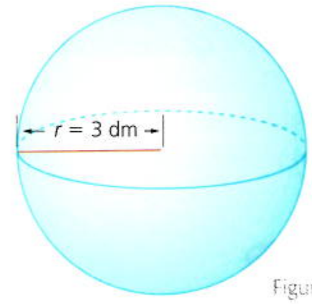


Figura 5.102

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Calcula el área de una superficie esférica si se sabe que el radio mide 7 cm.

2. Calcula el volumen de una esfera si se sabe que su diámetro mide 18 cm.

3. Halla el volumen y la capacidad de cada uno de los siguientes cuerpos.

a.

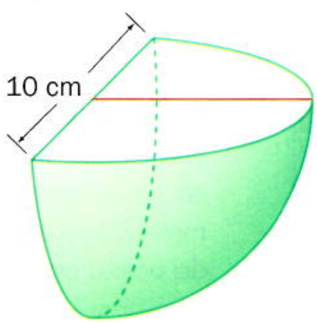


Figura 5.103

b.

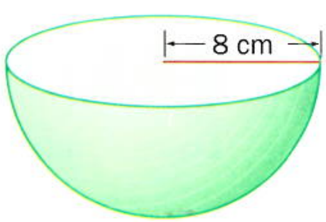


Figura 5.104

4. Calcula la medida del radio de una esfera cuyo volumen es de 124 m³.

5. Halla el volumen y la capacidad del recipiente semiesférico de la Figura 5.105.

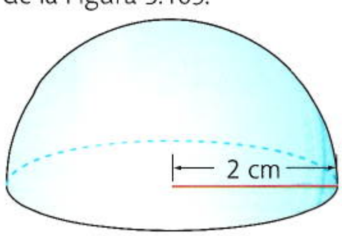
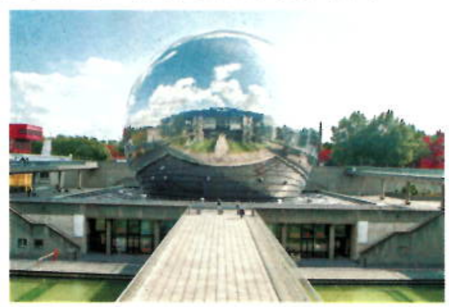


Figura 5.105

Resolución de problemas

6. La *Géode* es un gigantesco cine con forma de esfera que se encuentra en la ciudad de París (Francia). Calcula su área en dm y su capacidad en L sabiendo que su volumen es de 24 416 640 dm³.



Evaluación del aprendizaje

La Tierra no es una esfera perfecta ya que, debido sobre todo al movimiento de rotación alrededor de su eje, está algo achatada por los polos. Así, su radio polar (la distancia desde el centro a los polos norte y sur) es de unos 6 357 km, mientras que su radio ecuatorial (distancia desde el centro a cualquier punto del ecuador) es de unos 6 378 km. Tomando como valor medio del radio terrestre el de 6 371 km, calcula el área y el volumen aproximado de nuestro planeta.

9 Medidas y cálculos con escalas

Saberes previos

En un salón de clases hay 10 mujeres y 18 hombres. ¿Qué relación numérica existe entre el número de mujeres y el número de hombres?

Analiza

Como tarea para la próxima semana, Andrea debe realizar un plano de su casa.

- ¿Qué debe tener en cuenta Andrea para elaborar el plano?

Analiza y conoce

Para elaborar el plano de su casa, Andrea debe tener en cuenta cada lugar de esta, su forma y la relación de los tamaños. Es decir, si la sala es más pequeña que su cuarto, por ejemplo, en el dibujo debe mostrarse la misma relación. Ella puede usar papel cuadriculado para hacer una representación como la de la Figura 5.106.

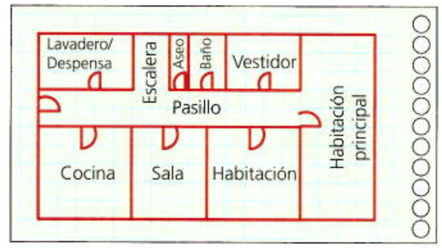


Figura 5.106

Los **mapas**, los **planos**, y las **maquetas** se elaboran de acuerdo con una relación matemática entre las dimensiones reales y las representadas. Tal relación recibe el nombre de **escala**.

9.1 Mapas, planos y maquetas

- Un **mapa** es la representación gráfica de la superficie terrestre o de parte de esta. En el mapa se conserva la forma, pero no el tamaño.

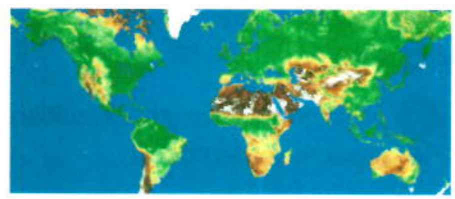


Figura 5.107

- Un **plano** es la representación de una ciudad, un piso de una casa, etc., mediante un dibujo. Sus dimensiones son proporcionales a las del objeto que se representa.

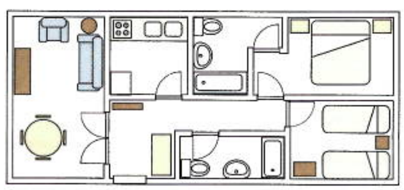


Figura 5.108

- Una **maqueta** es la reproducción a tamaño reducido de un objeto cualquiera: edificios, monumentos, muebles, trenes, etc., conservando las proporciones.

Figura 5.109

Ejemplo 1

En la Tabla 5.1 se observan algunas situaciones en las que son útiles los tres tipos de representación mencionados.

Mapa de Colombia	Plano de centro comercial	Maqueta de un estadio
		

Tabla 5.1

9.2 Escala numérica

La escala es una razón de semejanza, pero no se suele escribir en forma de fracción, sino como un cociente.

Figura 5.110

El mapa de la Figura 5.110 se ha dibujado a una escala de 1 : 5 000 000; es decir que cada centímetro en el mapa representa 50 km de la realidad.

Ejemplo 2

Al medir en el plano de la Figura 5.111 con la regla graduada, la distancia entre las dos ciudades marcadas se obtiene que es de 32 mm. La escala gráfica indica que 10 mm equivalen a 450 km en la realidad. Si x es la distancia entre Bogotá y Caracas, se tiene esta equivalencia:

$$\frac{10}{450} = \frac{32}{x} \Rightarrow x = \frac{450 \cdot 32}{10} = 1\,440$$

Por lo tanto, la distancia Bogotá-Caracas en línea recta es de aproximadamente 1 440 km.

Figura 5.111

9.3 Escala del área

En la Figura 5.112, si el primer cuadrado tiene como lado 1 cm, al pasarlo a una escala de longitud 1 : 2, es decir, al duplicar esa longitud, el área queda multiplicada por 4, y al usar una escala de longitud 1 : 3, el lado inicial se triplica y el área queda multiplicada por 9.

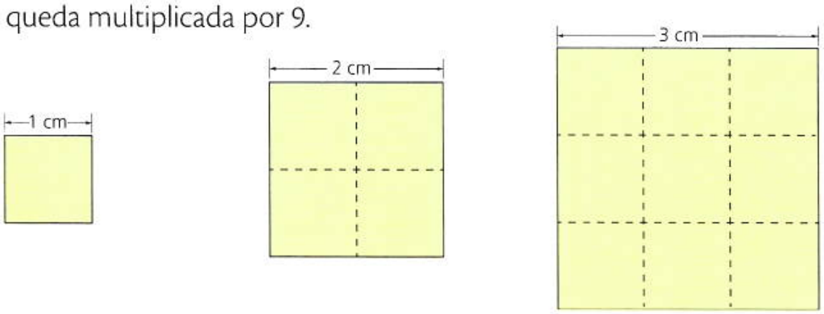


Figura 5.112

Ejemplo 3

En la Figura 5.113, el triángulo de la derecha tiene un área 16 veces mayor que el de la izquierda, por lo que la escala de longitud que se usó en su construcción es 1 : 4.

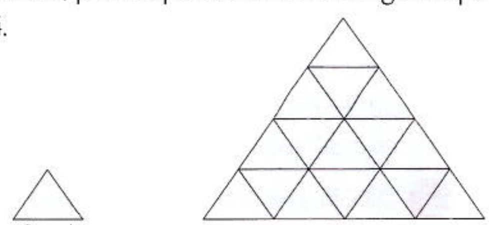


Figura 5.113

9.4 Escala del volumen

En la Figura 5.114, si el primer cubo tiene como arista 1 cm, al pasarlo a una escala de longitud 1 : 2, es decir, al duplicar esa medida, el volumen queda multiplicado por 8, y al usar una escala de longitud 1 : 3, la arista inicial se triplica y el volumen queda multiplicado por 27.

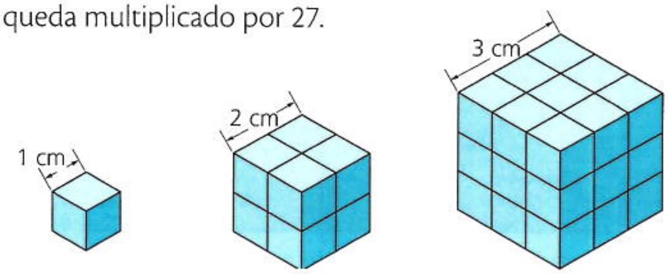


Figura 5.114

Ejemplo 4

Si la arista del primer cuadrado es 1 cm y se cuadruplica, el volumen del nuevo cubo es $4^3 = 64$, como se muestra en la Figura 5.115.

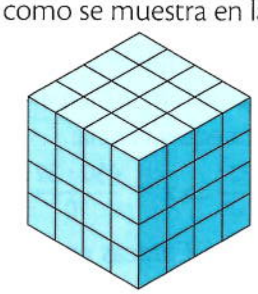


Figura 5.115

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Responde las preguntas.

a. ¿Qué tipo de representación es una miniatura?

b. Una escultura es una representación tridimensional. ¿En qué se diferencia de una maqueta?

c. ¿En qué situaciones consideras útil construir una maqueta?

d. Se tomó una fotocopia ampliada del plano de una ciudad para ver con mayor claridad las calles. ¿La fotocopia muestra otro plano?

2 Escribe las diferencias entre un mapa, un plano y una maqueta.

3 Explica si es correcto o no afirmar que la escala del plano de una casa es 150 : 1.

Ejercitación

4 Calcula las medidas reales de un edificio si su maqueta se construyó a escala 1 : 500 y tiene 13 cm de largo, 4 cm de ancho y 20 cm de alto.

5 Relaciona cada escala gráfica con su correspondiente escala numérica.

a. 0 — 10 m — 20 m ( ) 1 : 2 500

b. 0 — 35 km — 70 km ( ) 1 : 50 000

c. 0 — 25 m — 50 m ( ) 1 : 1 000

d. 0 — 0,5 km — 1 km ( ) 1 : 1 000 000

e. 0 — 10 km — 20 km ( ) 1 : 3 500 000

6 Halla las dimensiones de un salón de 4 m de largo y 5 m de ancho en un plano a las siguientes escalas.

a. 1 : 200 b. 1 : 400

7 Calcula la distancia a la que se encuentran dos ciudades en un mapa a escala 1 : 1 500 000, si la distancia real que las separa es de 756 km.

8 Dibuja a escala 1 : 8 000 un parque rectangular de 140 m de largo por 120 m de ancho.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Modelación

9 Observa el plano de una cocina realizado con la siguiente escala gráfica.

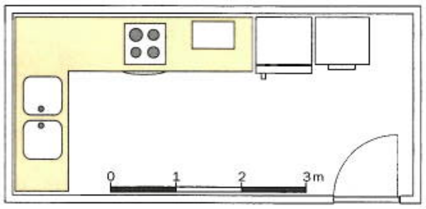


Figura 5.116

a. Calcula las dimensiones reales de la cocina.

b. Halla el área real de la cocina.

10 Observa las dos botellas.

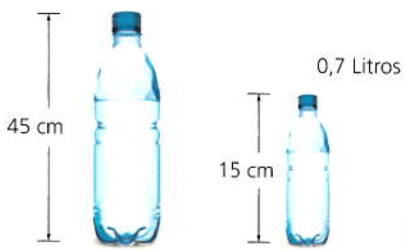


Figura 5.117

a. ¿Cuál es la escala de longitud?

b. ¿Cuál es la escala del volumen?

c. ¿Cuál es el volumen de la botella de la izquierda?

Modelación

11 El aviso de una panadería es una dona diseñada 25 veces más grande que una dona real cuyo diámetro es 10 cm.

Figura 5.118

a. ¿Cuál es el diámetro de la dona del aviso?

b. Si el volumen de la dona real es 13 cm^3, ¿cuál es el volumen de la dona del aviso?

12 Un cuadrado que tiene un área de 81 cm^2 es una copia duplicada de otro cuadrado. ¿Cuánto mide el lado y el área del cuadrado original?

13 Para construir el sólido de la derecha, cada una de las dimensiones del sólido de la izquierda se ha duplicado. ¿Cuáles son las dimensiones del sólido de la derecha?, ¿cuál es su volumen?

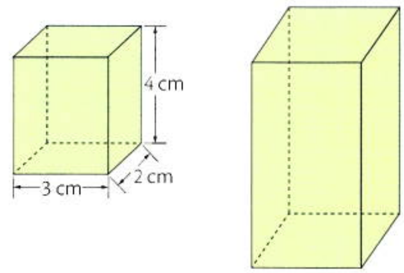


Figura 5.119

Resolución de problemas

14 Dos frascos de perfume tienen la misma forma.

El frasco pequeño tiene 6 cm de altura y contiene 30 mm de perfume.

Si el frasco grande tiene 9 cm de altura, ¿cuál es el volumen del perfume del frasco grande?

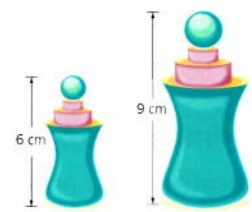


Figura 5.120

Evaluación del aprendizaje

Para envolver la caja grande de la Figura 5.121 se necesitan 3,27 m^2 de papel. Calcula la cantidad de papel necesario para envolver la caja pequeña.

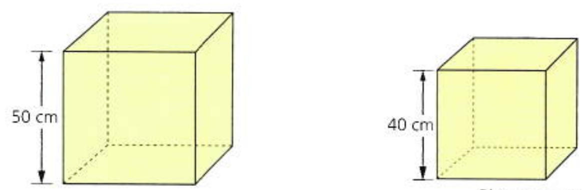


Figura 5.121

Estilos de vida saludable

Supón que se dibujó en el plano una rueda de Chicago a una escala 1 : 40. Si su altura en el plano es de 200 cm, ¿cuál es su altura real?

- ¿Crees que el vértigo que algunas personas sienten al subirse a la rueda de Chicago se relaciona con la altura de la atracción? ¿El vértigo es una sensación buena para la salud?

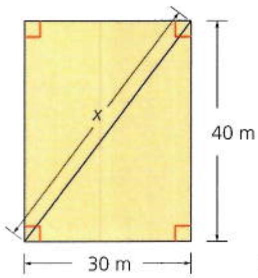
Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Teorema de Pitágoras

Resolución de problemas

1 Fernando corre alrededor de la ruta que se indica en la Figura 5.122.



a. Si Fernando da 15 vueltas diariamente alrededor de la ruta, ¿cuántos metros recorre?

b. ¿Corre Fernando más de un kilómetro diariamente?

Figura 5.122

Distancia entre dos puntos

Ejercitación

2 Halla la distancia entre cada par de puntos.

a. $A(1, 5)$ y $B(4, 9)$

b. $A(-1, 0)$ y $B(-3, -6)$

Perímetro de figuras planas

Resolución de problemas

3 Juanita está diseñando un tablero informativo en forma rectangular para que sus compañeros se enteren de las actividades culturales que programa el colegio. El tablero mide 3 m de largo por 2,7 m de ancho. Si la cinta que quiere usar Juanita para decorar el contorno del tablero cuesta $ 6 000 por metro, ¿cuánto debe pagar por la cinta que necesita para hacerlo?

Longitudes de figuras circulares

Razonamiento

4 Para el grado de los estudiantes de la promoción 2016 de un colegio se mandarán a diseñar botones.

La página web donde se consultó, indica que cada botón tiene un radio de 4 cm. ¿Cuál es la longitud de cada botón?

Modelación

5 La rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 27 pulgadas. ¿Cuánta distancia recorre la bicicleta luego de haber girado la rueda 20 veces?

Área del círculo y áreas de regiones circulares

Razonamiento

6 Con el contenido de una caja de harina se pueden preparar 8 tortillas de 25 cm de diámetro. La abuela de Camilo cree que tortillas de ese tamaño son demasiado grandes para sus nietos y por ello decide prepararlas con solo 5 cm de diámetro.

¿Cuántas tortillas de ese tamaño puede preparar con todo el contenido de la caja?

Área, volumen y capacidad de cilindros y conos

Modelación

7 Halla y compara el área lateral, el área total, el volumen y la capacidad de los cilindros de la Figura 5.123.

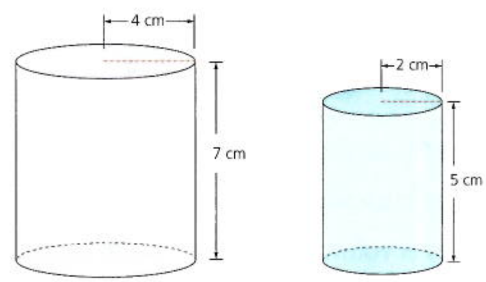


Figura 5.123

Área y volumen de la esfera

Resolución de problemas

8 Un pegante se prepara en un recipiente de forma semiesférica que tiene un radio de 180 cm. Ese pegante debe ser envasado en botellas cilíndricas de 1 cm de radio en su base y una altura de 4 cm. ¿Cuántas botellas de esas características son necesarias para envasar la totalidad del pegante? Toma $\pi = 3$.

Medidas y cálculos con escalas

Modelación

9 Los dos recipientes que se muestran en la Figura 5.124 son semejantes. La capacidad del primero es 1,2 litros. Halla la capacidad y el volumen del recipiente pequeño.

Figura 5.124

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: **Realizar un dibujo**

Problema

El diámetro de un disco compacto es 12 cm y el radio de la región no utilizable es 2 cm. ¿Cuál es la medida de la superficie utilizable del disco?

1. Comprende el problema

- ¿Cuál es el diámetro del disco compacto?
  R: 12 cm
- ¿Cuál es el radio de la región no utilizable?
  R: 2 cm
- ¿A qué región circular corresponde la superficie utilizable del disco?
  R: A una corona circular.

2. Crea un plan

- Realiza un dibujo que ilustre la situación.
- Elige las operaciones que permitan calcular el área de la superficie utilizable del disco.

3. Ejecuta el plan

- Se representa la información dada.

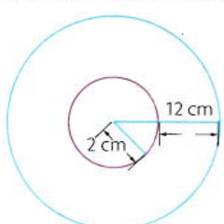


Figura 5.125

- Como la región utilizable del disco es una corona circular, se aplica la fórmula $A = \pi(r_1^2 - r_2^2)$, donde r_1 es el radio del disco y r_2 es el radio de la región no utilizable del disco. Así,

$A = \pi[(6\,\text{cm})^2 - (2\,\text{cm})^2]$

$A = 32\pi\text{cm}^2$

R: La superficie utilizable del disco compacto mide 32π cm².

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el área total del disco es la suma del área utilizable con aquella no utilizable.

Aplica la estrategia

1. En el centro de una fuente circular, de radio *m*, hay un surtidor de 50 cm de diámetro. Si los dos círculos son concéntricos, ¿cuál es el área ocupada por el agua?

Comprende el problema

....

Crea un plan

....

Ejecuta el plan

....

Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2. Observa y resuelve.

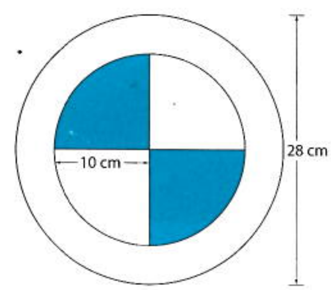


Figura 5.126

a. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

b. ¿Cuál es el área de la región no sombreada?

Formula problemas

3. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 5.127. Luego, resuélvelo.

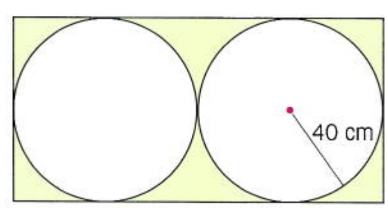


Figura 5.127

Enriquece tu vocabulario

- Escribe ejemplos de situaciones en las que uses la palabra *capacidad*.

Evaluación del aprendizaje

Teorema de Pitágoras

Modelación

1 Un árbol se sostiene con la ayuda de un cable anclado en el suelo a 3 m de su base. El cable es 30 cm más largo que la altura del árbol. Encuentra la longitud del alambre. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Resolución de problemas

2 El Museu Blau de Barcelona, España, es un museo de ciencias naturales construido en forma de prisma triangular. La base del edificio es un triángulo equilátero de 180 metros en cada lado. La altura del prisma mide 25 m.

Encuentra la altura h de la base triangular. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Distancia entre dos puntos

Modelación

3 Calcula el perímetro de los siguientes triángulos y clasifícalos según la longitud de sus lados. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $A(-2, 2)$, $B(1, 6)$, $C(6, -6)$

b. $A(-5, -2)$, $B(0, 6)$, $C(5, -2)$

Razonamiento

4 Resuelve cada uno de los siguientes problemas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Encuentra todos los puntos $P(x, 3)$ que distan 5 unidades del punto $(3, 4)$.

b. Determina todos los puntos cuya abscisa x es 4 y cuya distancia al punto $(4, -3)$ es de 2 unidades.

c. La ordenada de un punto en el segundo cuadrante es 4 y está a 3 unidades del punto $(2, 5)$. Determina la otra coordenada del punto.

d. ¿Cuáles son los puntos con coordenada x igual a 4 y que están a 4 unidades del punto $(2, 3)$?

e. Determina todos los puntos sobre el eje X cuya distancia al punto $(3, -2)$ sea 3 unidades.

Perímetro de figuras planas

Razonamiento

5 Calcula el perímetro de la Figura 5.128. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

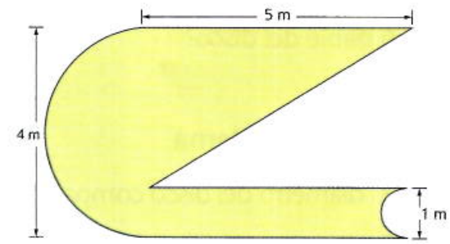


Figura 5.128

Ejercitación

6 Observa las figuras y plantea la expresión algebraica correspondiente a su perímetro. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

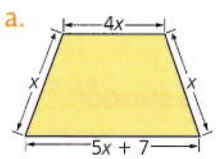


Figura 5.129

b.

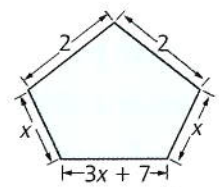


Figura 5.130

c.

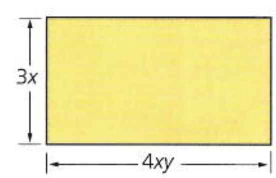


Figura 5.131

d.

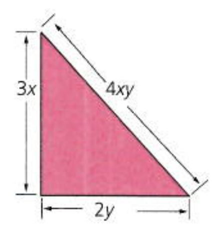


Figura 5.132

Longitudes de figuras circulares

Modelación

7 Determina la longitud del arco que traza la manecilla del horario en un reloj analógico al realizar un recorrido desde las 12:00 p. m. hasta las 7:00 p. m., si el radio es 1,2 cm. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Resolución de problemas

8 Los brazos de un columpio miden 2,2 m de largo y pueden describir como máximo un ángulo de 150°. Calcula el espacio recorrido por el asiento del columpio cuando el ángulo descrito en su balanceo es el máximo. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Área del círculo y áreas de regiones circulares

Razonamiento

9 Un agricultor cuenta con un terreno circular para sembrar algunas hortalizas. Determina la opción en la que utilizará mayor área, si el radio del terreno es igual a 4,5 m. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a.

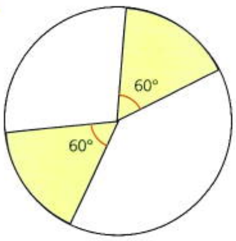


Figura 5.133

b.

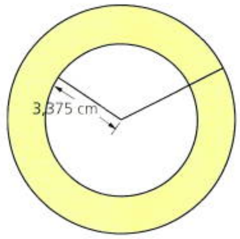


Figura 5.134

c.

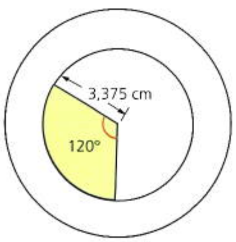


Figura 5.135

d.

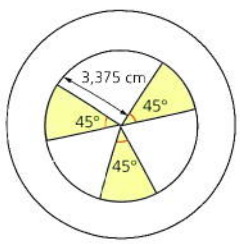


Figura 5.136

Modelación

10 Calcula el valor de z para que el área del anillo sea igual a π cm^2. ACTIVIDAD DE REFUERZO

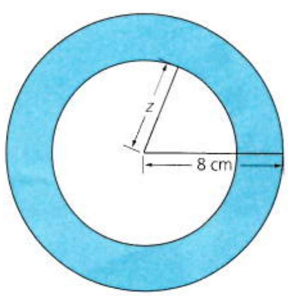


Figura 5.137

Área, volumen y capacidad de cilindros y conos

Razonamiento

11 Escribe verdadero o falso, según el caso. VERDADERO / FALSO

a. Un cono tiene base triangular.

b. Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

c. El volumen de un cono cuya altura es 4 cm y el radio de la base mide 3cm, es 12π cm^3.

d. El área de un cilindro de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura es 205π cm^2.

12 Un depósito de forma cilíndrica desea adaptarse de manera tal que mantenga su forma y se duplique su volumen, para lo cual duplican la altura y radio de su base. ¿Se duplicó el volumen? Explica tu respuesta. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Área y volumen de la esfera

Comunicación

13 Un contenedor semiesférico de 12 m de diámetro cuenta con una capa metálica protectora de 0,5 m de espesor. ¿Cuál es el volumen del contenedor? SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 452,38 m^3
b. 575,17 m^3
c. 1 150,34 m^3
d. 4 090,61 m^3

Resolución de problemas

14 En la caja de la Figura 5.138 se quieren guardar dos esferas macizas de 10 cm de radio. Calcula el volumen que ocupa el aire que queda en la caja. Escribe un paso a paso claro que le permita a otra persona encontrar el cálculo de este valor. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

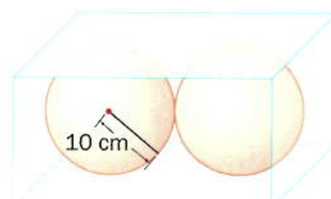


Figura 5.138

Medidas y cálculos con escalas

Modelación

15 Tres muñecas tradicionales rusas tienen áreas superficiales de 64 cm^2, 16 cm^2 y 4 cm^2. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. Dado que el volumen de la muñeca mediana es 320 cm^3, encuentra el volumen de las otras dos muñecas.

b. Dado que la altura de la muñeca más pequeña es 3 cm, encuentra la altura de las otras dos.


Figura 5.139

6 Estadística y probabilidad

Ya sabemos

- Agrupar datos en un estudio estadístico.
- Hallar la probabilidad de algunos eventos.

Vamos a aprender

- A determinar y analizar las medidas de tendencia central y de posición no central para un conjunto de datos.

Nos sirve para

- Usar en contextos reales el cálculo de medidas de tendencia central y de dispersión.

1 Distribución de frecuencias de datos agrupados

Saberes previos

Los siguientes datos corresponden al número de libros leídos por un grupo de 30 estudiantes, en un lapso de 2 años.

3	2	1	4	5	3
2	1	3	1	2	3
5	1	2	2	1	3
4	2	3	4	0	1
2	2	0	1	2	4

Elabora la tabla de distribución de frecuencias.

Analiza

En una biblioteca se van a reubicar los libros en cinco estantes, de manera que los más pesados se ubiquen en los estantes inferiores y los más livianos en la parte superior.

Carlos, el encargado, debe presentar un reporte que permita conocer la cantidad de libros que hay en la biblioteca de acuerdo con su peso.

- ¿Cómo puede presentar el reporte?

Tiempo (en minutos)	Marca de clase	Frecuencia absoluta
[0, 40)	20	6
[40, 80)	60	11
[80, 120)	100	7
[120, 160)	140	7
[160, 200)	180	7
[200, 240)	220	2

Tabla 6.2

Conoce

Para presentar el reporte, Carlos puede realizar una tabla como la 6.1 en la cual agrupe los libros de acuerdo con su peso en intervalos disjuntos de igual amplitud.

Peso de los libros (en gramos)	Número de libros
[100, 200)	40
[200, 300)	65
[300, 400)	45
[400, 500)	35
[500, 600)	35
[600, 700)	38

Tabla 6.1

De la tabla se puede inferir que hay 258 libros en la biblioteca, que los más livianos pesan entre 100 g y 200 g, y los más pesados entre 600 g y 700 g.

Si una variable estadística es cuantitativa continua o cuantitativa discreta con un número grande de datos, conviene agrupar dichos datos en intervalos o clases que tengan la misma **amplitud**.

En cada intervalo se toma un valor representativo llamado marca de clase, que corresponde al valor medio del intervalo. Para hallar la marca de clase, se suman los extremos del intervalo y se divide el resultado entre dos.

Ejemplo 1

A 40 estudiantes se les solicitó medir el tiempo (en minutos) que navegaron por internet durante un fin de semana. Los resultados obtenidos ordenados de forma ascendente son:

0	15	20	35	35	38	40	45
45	45	50	55	58	65	65	70
72	90	95	100	100	110	110	110
120	125	125	130	130	130	150	160
170	175	180	185	190	195	200	220

Para resumir la información y organizarla en una tabla de frecuencias, se pueden agrupar los datos en seis intervalos, cada uno de amplitud 40 min, y hallar su frecuencia.

Las marcas de clase corresponden a la semisuma de los valores extremos de cada intervalo. Es decir, $\frac{0+40}{2} = 20$; $\frac{40+80}{2} = 60$; etc.

A partir del conteo de los datos que pertenecen a cada intervalo, se obtiene la Tabla 6.2 de frecuencias absolutas.

Ejemplo 2

Las notas de 50 estudiantes de grado séptimo en una prueba de matemáticas se registran de la siguiente manera:

6,8	7,8	5,8	7,9	8,0	10,0	7,5	8,0	6,5	3,3
7,0	3,5	7,0	9,0	5,6	1,5	2,8	4,7	7,5	4,5
7,8	2,8	8,0	8,0	8,0	4,0	7,0	5,5	3,0	8,0
9,3	9,4	3,5	4,6	5,7	7,5	9,5	9,2	3,8	4,9
9,6	8,8	8,9	7,9	5,5	10,0	8,5	9,3	8,4	9,5

La Tabla 6.3 muestra las notas agrupadas en intervalos de amplitud 1,5, las frecuencias y las marcas de clase.

Nota	Marca de clase	f_i	h_i	$h_i(\%)$	F_i	H_i	$H_i(\%)$
[1,5; 3)	2,25	3	0,06	6	3	0,06	6
[3; 4,5)	3,75	6	0,12	12	9	0,18	18
[4,5; 6)	5,25	9	0,18	18	18	0,36	36
[6; 7,5)	6,75	5	0,1	10	23	0,46	46
[7,5; 9)	8,25	17	0,34	34	40	0,8	80
[9; 10,5)	9,75	10	0,2	20	50	1	100
		$N = 50$	1	100			

Tabla 6.3

Ejemplo 3

La Tabla 6.4 muestra una distribución de frecuencias de los salarios semanales (en pesos) de 63 empleados de una compañía.

La marca de clase del segundo intervalo es $\dfrac{70\,000 + 90\,000}{2} = 80\,000$.

La marca de clase del sexto intervalo es $\dfrac{150\,000 + 170\,000}{2} = 160\,000$.

Salario ($)	Número de empleados
[50 000, 70 000)	8
[70 000, 90 000)	10
[90 000, 110 000)	16
[110 000, 130 000)	14
[130 000, 150 000)	10
[150 000, 170 000)	5

Tabla 6.4

Ejemplo 4

Los datos correspondientes a los tiempos que tardan diez niños en lavarse los dientes, son:

1 min 30 s	2 min 45 s	3 min 30 s	1 min 20 s	1 min 30 s
0 min 45 s	3 min 00 s	3 min 15 s	1 min 45 s	2 min 35 s

La Tabla 6.5 muestra la distribución de frecuencias de estos datos agrupados en intervalos de amplitud de 1 min 38 s.

Tiempo	Marca de clase	f_i	h_i	$h_i(\%)$	F_i	H_i	$H_i(\%)$
[0:45; 1:43)	1:14	4	0,4	40	4	0,4	40
[1:43; 2:41)	2:12	2	0,2	20	6	0,6	60
[2:41; 3:39)	3:10	4	0,4	40	10	1	100

Tabla 6.5

1 Distribución de frecuencias de datos agrupados

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Haz una tabla estadística para el conjunto de datos. Usa intervalos de amplitud 2.

10	11	12,2	13,5	9,5	13,2
11,3	12,3	9	14,2	15	11,3
13,6	15,4	10,2	16,4	15,3	12,3

2 Halla la marca de clase de los intervalos de la Tabla 6.6 en los que se agruparon los datos recogidos sobre el ahorro de 100 familias a lo largo de un año.

Ahorro (en miles de pesos)	Número de familias
[0, 600)	39
[600, 1 200)	15
[1 200, 1 800)	25
[1 800, 2 400)	11
[2 400, 3 000)	10

Tabla 6.6

Comunicación

3 Completa la Tabla 6.7.

Intervalo de clase	x_i	f_i	h_i	F_i
[0, 10)		6		6
[10, 20)		4		
[20, 30)		7		17
[30, 40)		5		
[40, 50)		3		
[50, 60)		5		

Tabla 6.7

4 Explica por qué las tablas 6.8 y 6.9 no representan las frecuencias acumuladas de un conjunto de datos.

a.

Intervalo	f_i
[0, 5)	3
[5, 10)	4
[10, 14)	5
[14, 19)	6
[19, 24)	1

Tabla 6.8

b.

Intervalo *i*	f_i
[0, 5)	1
[5, 10)	2
[10, 15)	4
[15, 20)	2
[20, 25)	3

Tabla 6.9

5 Determina si a partir de la información de la Tabla 6.10 se pueden deducir las conclusiones que se muestran abajo.

Intervalo	Marca de clase	f_i
[100, 150)	125	2
[150, 200)	175	3
[200, 250)	225	4
[250, 300)	275	2
[300, 350)	325	4

Tabla 6.10

a. El número total de datos es 15.

b. El 350 no pertenece al conjunto de datos.

c. La frecuencia de 225 es 4.

d. 125, 175, 225, 275 y 325 son datos del conjunto.

e. Nueve datos son menores que 250.

Razonamiento

6 Observa la Tabla 6.11, que agrupa mediante intervalos los salarios de los veinte empleados de una microempresa. Complétala y, luego, contesta las preguntas.

Salario (en miles de pesos)	Marca de clase	Número de empleados
[700, 1 200)		9
[1 200, 1 700)		5
[1 700, 2 200)		2
[2 200, 2 700)		0
[2 700, 3 200)		2
[3 200, 3 700)		1
[3 700, 4 200)		1

Tabla 6.11

a. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?

b. ¿Cuántos empleados ganan $ 3 200 000 o más?

c. ¿Qué porcentaje de ellos gana menos de $ 2 500 000?

d. ¿Qué porcentaje de empleados gana más de $ 2 500 000?

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Resolución de problemas

7 En un parqueadero se registra el tiempo de permanencia (en minutos) de 60 autos, así:

15	450	18	20	25	27	30	32	320	34
36	36	40	135	40	45	142	55	58	60
65	68	136	71	72	73	73	148	75	80
81	82	85	96	98	105	110	112	120	126
127	130	69	140	40	145	50	74	148	220
250	34	330	350	360	370	420	425	430	18

a. Elabora una tabla estadística para estos datos agrupándolos en ocho intervalos.

b. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?

c. ¿Es posible determinar qué porcentaje de los autos permanecen menos de una, dos, tres o cuatro horas en el parqueadero?

8 En una vía en la que la máxima velocidad permitida es 80 km/h, se midió la rapidez de veinte autos que transitaron de 9:00 p.m. a 10:00 p.m. Los datos obtenidos se consignaron en la Tabla 6.12.

Velocidad (km/h)	Número de autos
[60, 70)	4
[70, 80)	14
[80, 90)	1
[90, 100)	1

Tabla 6.12

a. Halla la marca de clase para cada intervalo.

b. ¿Es posible determinar el número de autos que superaron el límite de velocidad permitido? En caso afirmativo, ¿cuál es el porcentaje correspondiente?

c. ¿Qué porcentaje de autos transitaba a una velocidad inferior a 70 km/h?

Evaluación del aprendizaje

i En la Tabla 6.13 se registra la edad de los pacientes que asisten a un consultorio médico a control de rutina en una semana.

Edad (en años)	Número de pacientes
[20, 30)	2
[30, 40)	4
[40, 50)	14
[50, 60)	17
[60, 70)	5
[70, 80)	6
[80, 90)	2

Tabla 6.13

a. Halla la marca de clase de cada intervalo.

b. ¿Cuántos pacientes asisten en una semana al consultorio médico?

c. ¿Qué porcentaje de pacientes son menores de 50 años?

ii Se realiza una encuesta a los alumnos de tres cursos de séptimo grado acerca del tiempo que tardan en tender la cama. Los resultados se registran en la Tabla 6.14.

Duración (minutos)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)
Número de alumnos	11	0	25	28	4

Tabla 6.14

a. ¿Hay algún estudiante que tarde seis minutos en tender la cama?, ¿y un minuto? Explica tus respuestas.

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes tarda al menos cuatro minutos en tender la cama?

c. ¿Qué porcentaje tarda mínimo dos minutos en tenderla?

d. ¿Es posible determinar el número de estudiantes que tardan, exactamente, dos minutos en tender la cama?

2 Diagramas de barras y diagramas circulares

Saberes previos

Al preguntar a 240 personas acerca de sus preferencias gastronómicas, respondieron así: 40 personas prefieren la comida mexicana; 20, las comidas rápidas; 60, la comida típica colombiana; 30, la comida vegetariana, y 50, la comida casera. ¿Qué porcentaje del total representan las personas de cada grupo?

Analiza

Los bosques tropicales son tesoros de fauna y flora.

En cierta región selvática, por ejemplo, viven 22 500 especies de plantas con flores, 11 250 especies de árboles, 1 875 de mamíferos, 6 000 de aves, 1 500 de reptiles, 900 de anfibios y 2 250 especies de mariposas.

- ¿Cómo se puede representar gráficamente la información dada?

Conoce

Para representar gráficamente la información, se elabora un diagrama de barras.

En un **diagrama de barras**, cada uno de los valores de la variable se representa en el eje horizontal de una gráfica cartesiana. Luego, se dibujan barras o rectángulos, cuya altura es proporcional a la frecuencia absoluta de cada valor.

En la Figura 6.1 se representan las especies de fauna y flora de dicha región selvática. La altura de cada rectángulo es el número de especies.

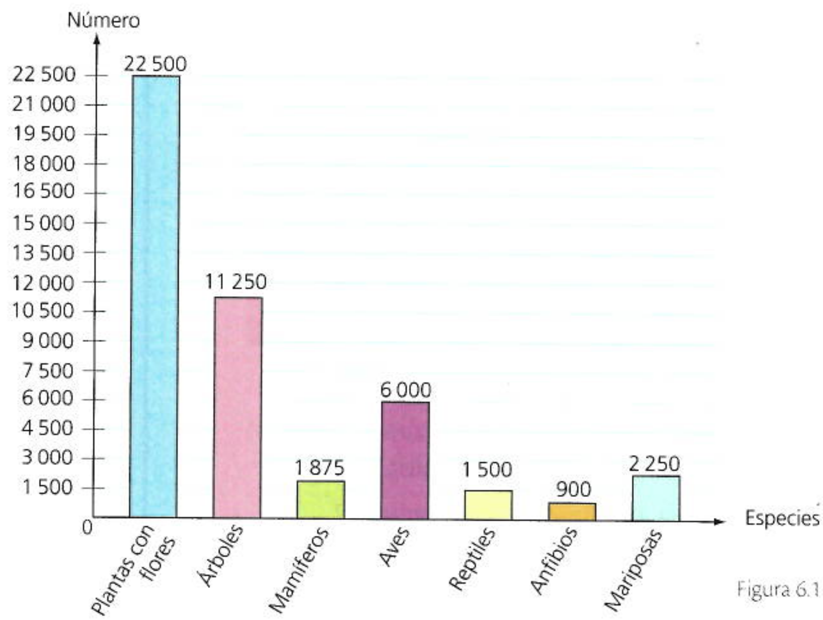


Figura 6.1

En un **diagrama circular** se representa una proporción o porcentaje de cada uno de los valores de la variable.

Ejemplo 1

De la producción total de energía en el mundo, $\frac{2}{15}$ partes son producidas por la madera, $\frac{4}{15}$ por el carbón, $\frac{1}{20}$ por los combustibles nucleares, $\frac{1}{20}$ por el agua, $\frac{1}{3}$ por el petróleo y $\frac{1}{6}$ por el gas.

Para representar gráficamente esta información en un diagrama circular, se calcula el sector circular que corresponde a cada dato. Esto es, multiplicar cada frecuencia relativa por 360° para encontrar el valor del ángulo respectivo. De esta forma, el ángulo correspondiente a la madera es $360° \cdot \frac{2}{15} = 48°$; al carbón es $360° \cdot \frac{4}{15} = 96°$; y así sucesivamente. Observa la figura 6.2.

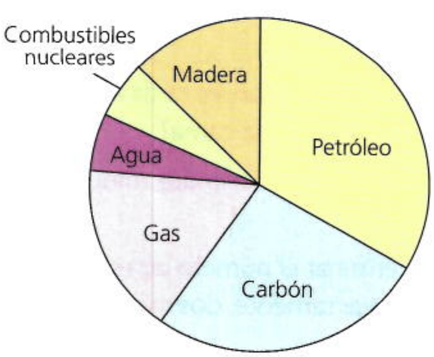


Figura 6.2

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Observa el diagrama de la Figura 6.3 y resuelve.

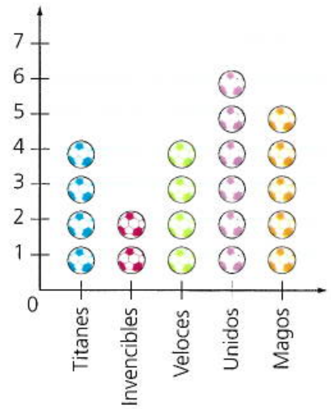


Figura 6.3

a. Completa los datos de la Tabla 6.15 a partir de la información del diagrama.

Valor	Frecuencia
Titanes	
Invencibles	2
Total de datos	

Tabla 6.15

b. Colócale un título al diagrama y redacta tres conclusiones sobre el estudio.

2 En la Tabla 6.16 se presentan las actividades preferidas por un grupo de hombres y mujeres cuando asisten a un centro vacacional.

Actividad	Hombres	Mujeres
Nadar	8	6
Tomar el sol	5	9
Caminar	7	8
Dormir	6	3
Practicar deportes	4	4
Total de datos	**30**	**30**

Tabla 6.16

¿Cómo podría representarse la información de la tabla en una sola gráfica cartesiana?

Comunicación

3 Analiza cada gráfica circular y, luego, escribe tres conclusiones acerca de la información obtenida en cada caso.

a.

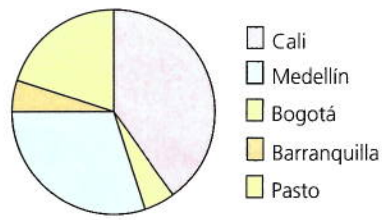


Figura 6.4

b.

Figura 6.5

Evaluación del aprendizaje

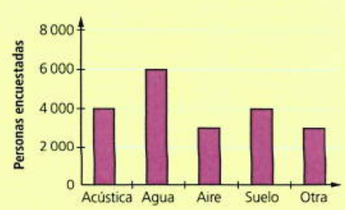
Sergio, Daniela, Lorena y Juan son candidatos para representar a su curso. Las votaciones de los estudiantes fueron las siguientes: por Sergio votaron cuatro personas; por Daniela, seis; por Lorena, once, y por Juan, nueve.

a. Elabora la tabla de frecuencias correspondiente al conjunto de datos.

b. Elabora la gráfica circular.

Educación ambiental

Observa la imagen y determina cuál es el tipo de contaminación más frecuente.



¿En tu colegio o en tu comunidad se observa contaminación de ese tipo? ¿Cómo se evidencia?

3 Diagramas de puntos y de líneas

Saberes previos

La información estadística se puede representar en gráficos de diferentes clases. ¿Has visto información representada en gráficos de líneas? ¿Qué características tienen?

Analiza

En la Figura 6.6 se muestra la cantidad de nacimientos de una ciudad durante un año.

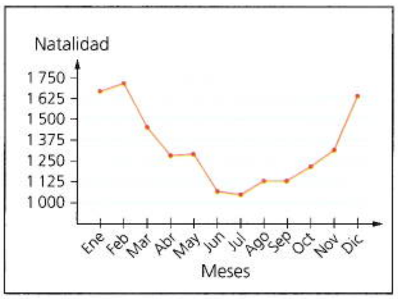


Figura 6.6

- ¿En qué meses se registraron la mayor y la menor cantidad de nacimientos en la ciudad?

Conoce

Los puntos sobre la Figura 6.6 indican la cantidad de nacimientos en cada uno de los meses del año. Así, la mayor cantidad de nacimientos se registró en el mes de febrero y la menor, en el mes de julio.

3.1 Diagramas de puntos

Los **diagramas de puntos** son útiles para localizar la frecuencia de los datos y determinar su variabilidad en el tiempo o su dispersión.

Ejemplo 1

La Tabla 6.17 presenta el número de visitantes que recibió un parque de atracciones en los cuatro domingos del mes de enero. A partir de ella se construye la Figura 6.7, que muestra gráficamente, que el día con mayor número de visitantes fue el 1° de enero y el domingo con menor número de visitas fue el 15 de enero.

Domingo	Visitantes
1º de enero	6 000
8 de enero	4 500
15 de enero	2 000
22 de enero	3 000

Tabla 6.17

Figura 6.7

3.2 Diagramas de líneas

Un **diagrama de líneas** es una serie de puntos de datos conectados por medio de segmentos de recta. Este tipo de gráfico es el más utilizado para visualizar el cambio de una variable en el tiempo.

Ejemplo 2

En la Figura 6.8 se muestra el comportamiento de la temperatura media mensual de varias ciudades del mundo durante un año.

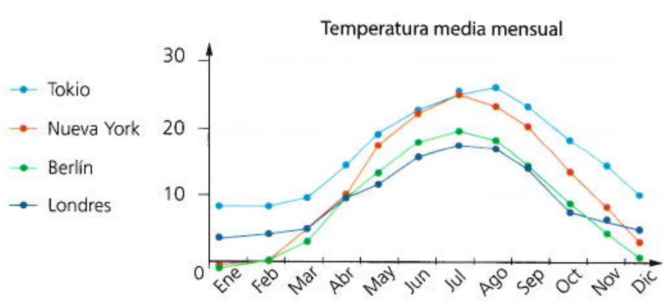


Figura 6.8

Es interesante observar que el diagrama de líneas que le corresponde a cada una de las ciudades tiene un comportamiento similar. En los primeros meses (enero a marzo) la temperatura es menor a 10 °C; en los meses de abril a julio aumenta y en los meses finales disminuye.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Jorge compró un carro en $ 24 000 000, cuyo valor se fue depreciando como indica la Tabla 6.18. Construye el diagrama de líneas que muestra cómo varió el valor del carro entre el 2001 y el 2007.

Año	Valor (en millones de pesos)
2001	24
2002	22,5
2003	19,7
2004	17,5
2005	14,5
2006	10,0
2007	5,8

Tabla 6.18

a. ¿Puede afirmarse que el precio del carro bajó en la misma proporción entre cada par de años consecutivos?

b. ¿Puede afirmarse que en el 2008 el carro se había depreciado completamente?

Resolución de problemas

2 La Figura 6.9 muestra la variación del peso de una persona en los primeros cinco meses de un año.

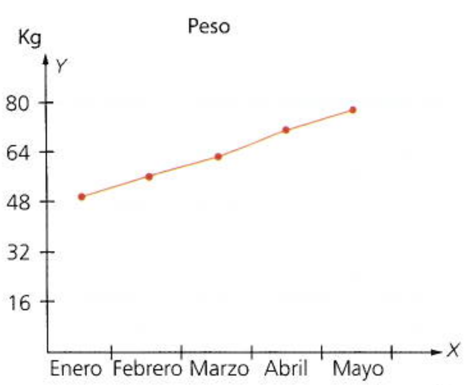


Figura 6.9

a. Construye una tabla de frecuencias a partir de la información de la gráfica de líneas.

b. ¿Entre cuáles pares de meses consecutivos la variación de peso fue mayor?

c. ¿Cuál puede ser el peso al final del mes de junio? Explica tu respuesta.

3 Lee las afirmaciones y responde si son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tus respuestas.

a. Los diagramas de líneas presentan la variación creciente de una variable a lo largo del tiempo. ( )

b. Los diagramas de líneas presentan la variación decreciente de una variable a lo largo del tiempo. ( )

c. Los diagramas de líneas presentan la variación tanto creciente como decreciente de una variable a lo largo del tiempo. ( )

d. Un diagrama de líneas no presenta ningún tipo de variación. ( )

Evaluación del aprendizaje

Un centro comercial registró el número de clientes que ingresaron durante un día de promociones desde las 10:00 a. m. hasta las 6:00 p. m.

Luego, representó gráficamente esta variación en la Figura 6.10.

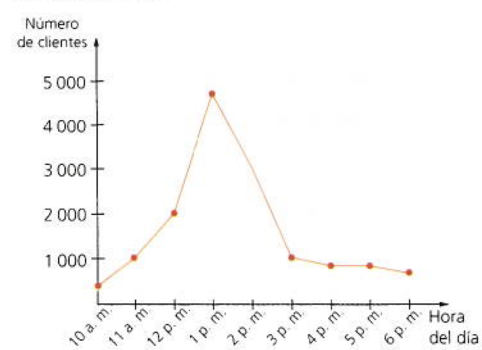


Figura 6.10

a. ¿Entre qué par de horas consecutivas hay mayor flujo de personas en el centro comercial?

b. ¿Cuántas personas entraron al centro comercial a la 1:00 p. m.?

c. ¿A qué hora entraron al centro comercial 3 000 personas?

d. Explica el comportamiento del flujo de personas antes y después de la 1:00 p. m. ¿Por qué crees que ocurre este cambio?

e. ¿Puede afirmarse que el centro comercial recibe más ingresos antes de la 1:00 p. m. que después de esa hora? Argumenta tu respuesta.

4 Pictogramas

Saberes previos

En los pictogramas se usan dibujos para representar los datos. Un dibujo puede ser equivalente a una unidad o a varias. Menciona qué imagen utilizarías para representar los datos en las siguientes situaciones.

- Cantidad diaria de automóviles lavados en un autolavado.
- Número de estudiantes que van al colegio en bicicleta cada semana
- Número de árboles sembrados durante los primeros meses del año.
- Número de mascotas que hay por familia en un conjunto residencial.

Analiza

La medallería obtenida en los Juegos Olímpicos de invierno del 2002 se organizó en la Tabla 6.19.

País	Número de medallas
Alemania	35
Estados Unidos	34
Noruega	24
Canadá	17
Austria	16
Rusia	16

Tabla 6.19

- ¿Cómo podría presentarse gráficamente esta información en una forma diferente a los diagramas de barras?

Conoce

La información se puede presentar por medio de un **pictograma**, en el que se utilizan símbolos para representar la medallería de cada país.

Observa las equivalencias de la Figura 6.11.

Figura 6.11

Al utilizar estos símbolos se puede construir el pictograma de la Figura 6.12.

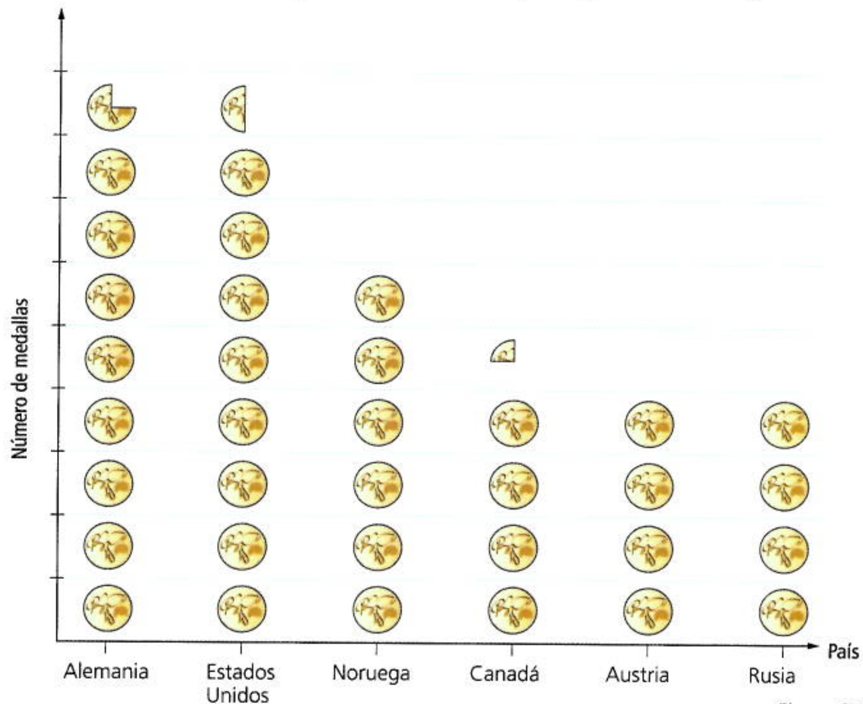


Figura 6.12

Un **pictograma** es una forma de representar información estadística, utilizando elementos gráficos que simbolicen las frecuencias de los datos.

Otro pictograma que representa la distribución de la medallería se muestra en la Figura 6.13.

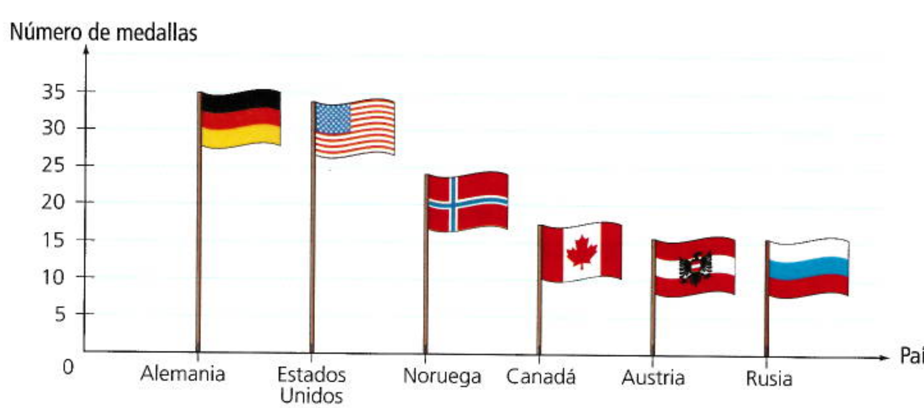


Figura 6.13

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Utilizando figuras de personas, propón un pictograma que represente la información de la Tabla 6.20. Esta muestra el sector al que pertenecen 100 jóvenes colombianos encuestados.

Sector productivo	Número de personas
Comercio	26
Agricultura	26
Servicios	19
Industria	14
Transporte	5
Construcción	4
Inmobiliarias	3
Otros sectores	3

Tabla 6.20

Comunicación

2 Utilizando elementos deportivos apropiados, propón un pictograma que represente la información dada en la Tabla 6.21 que muestra el número de partidos ganados por cinco estudiantes en un torneo de tenis escolar.

Deportista	Partidos ganados
Diana Martínez	7
Gloria González	3
Rocío Manrique	8
Esperanza Sastoque	5
Dora Carvajal	2

Tabla 6.21

3 Inventa un pictograma que represente la información presentada en el diagrama de barras.

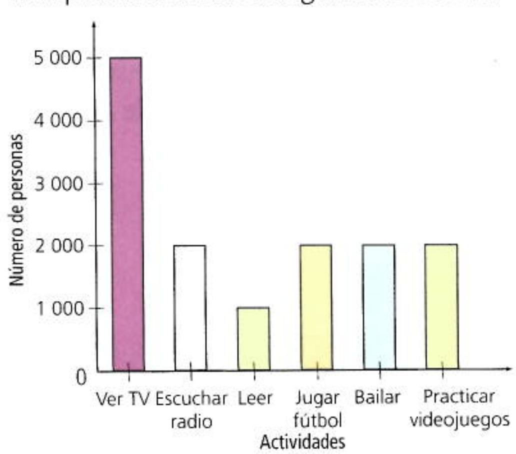


Figura 6.14

Resolución de problemas

4 Alejandro ha realizado una encuesta entre sus 20 compañeros de curso, sobre la mascota que tienen en casa. Estos fueron los resultados:

gato	perro	gato	hámster	gato
hámster	gato	perro	peces	gato
peces	hámster	perro	perro	peces
perro	perro	hámster	perro	perro

a. Elabora un pictograma que represente los resultados de la encuesta.

b. Presenta tres conclusiones que puedas extraer de este estudio.

Evaluación del aprendizaje

En el diagrama de barras de la Figura 6.15 se muestra la preferencia deportiva de los estudiantes de cierta ciudad.

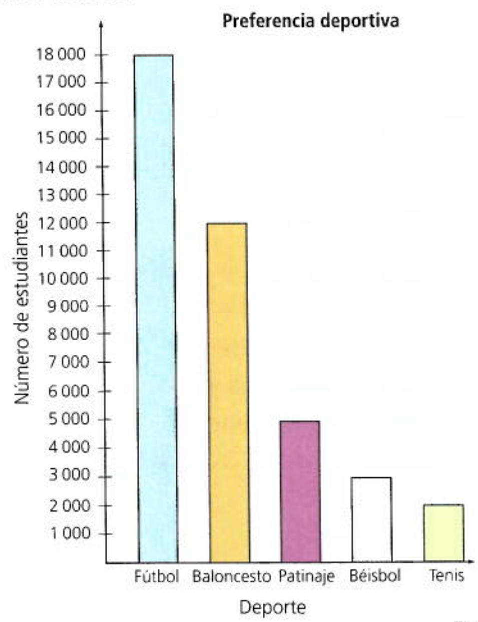


Figura 6.15

a. Construye un pictograma que represente la información y escribe las equivalencias que usas.

b. ¿Cuál es la diferencia entre el número de estudiantes que prefieren baloncesto y aquellos que les gusta el patinaje?

c. ¿Cuántos estudiantes conforman el grupo?

5 Histogramas y polígonos de frecuencia

Saberes previos

Traza el diagrama de líneas que representa la siguiente información:

Las ventas registradas en una librería a lo largo de un semestre fueron: en enero se vendieron 4 000 libros; en febrero, 3 000; en marzo, 1 500; en abril, 2 000; en mayo, 6 000, y en junio, 5 000. ¿Cuál fue la variación de las ventas durante ese semestre en la librería? Descríbela.

Analiza

La Tabla 6.22 refleja el tiempo, en minutos, que tardan unos estudiantes en llegar al colegio.

Tiempo (minutos)	Número de estudiantes
[5, 10)	5
[10, 15)	10
[15, 20)	50
[20, 25)	30
[25, 30)	15
[30, 35)	10

Tabla 6.22

- ¿Cómo se pueden representar los datos en un histograma y dibujar el polígono de frecuencias?

Conoce

Se dibujan en el eje de las abscisas, los extremos de las clases que tienen amplitud 5 y se trazan rectángulos cuya altura corresponde a las frecuencias (Figura 6.16). El polígono de frecuencias se traza uniendo los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo (Figura 6.17).

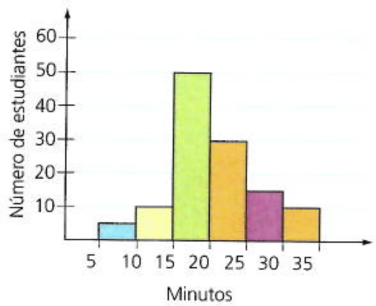


Figura 6.16

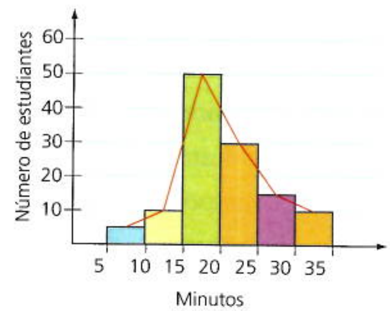


Figura 6.17

Para hacer la representación gráfica de datos agrupados en clases se utiliza el **histograma** y el **polígono de frecuencias**.

Para construir un histograma se siguen estos pasos:

- Se dibujan los extremos de las clases sobre el eje de las abscisas.
- Se construyen rectángulos cuyas bases son la amplitud del intervalo y cuyas alturas son proporcionales a las frecuencias absolutas.

Ejemplo 1

En la Tabla 6.23 se registró la estatura de 30 estudiantes de un curso de grado noveno.

Estatura (cm)	[149, 156)	[156, 163)	[163, 170)	[170, 177)
Número de estudiantes	7	10	8	5

Tabla 6.23

El histograma y el polígono de frecuencias correspondiente se muestra en la Figura 6.18. La amplitud de los intervalos es 7 y corresponde a la base de los rectángulos.

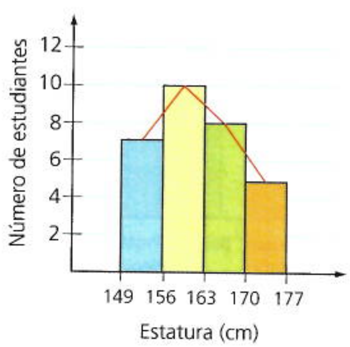


Figura 6.18

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Elabora en tu cuaderno el histograma y el polígono de frecuencias con los datos de la Tabla 6.24.

Intervalo	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
Frecuencias absolutas	7	20	15	8

Tabla 6.24

2 Construye en tu cuaderno el histograma y el polígono de frecuencias de los datos registrados en la Tabla 6.25.

Estatura (cm)	[145,150)	[150,155)	[155,160)	[160,165)
Número de personas	9	13	23	35

Tabla 6.25

Resolución de problemas

3 Las alturas, en centímetros, de veinte plantas de una determinada especie son:

6,1 5,3 6,1 5,6 4,8 4,9 5,2 5,6 6,1 5,2

5,9 5,8 5,7 5,1 4,9 5,2 5,3 6,1 5,9 5,8

a. Completa la Tabla 6.26 agrupando los datos en los siete intervalos que se proponen.

Datos	x_i	f_i	h_i	F_i
[4,8; 5)				
[5; 5,2)				
[5,2; 5,4)				
[5,4; 5,6)				
[5,6; 5,8)				
[5,8; 6)				
[6; 6,2)				

Tabla 6.26

b. Elabora el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente.

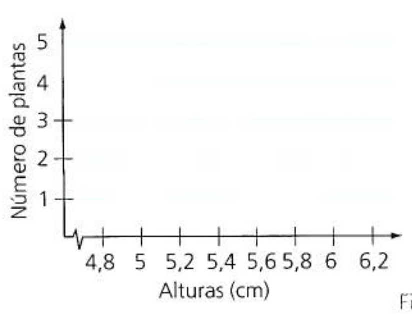


Figura 6.19

Evaluación del aprendizaje

El ahorro de 100 familias a lo largo de un año viene expresado en la Tabla 6.27.

Ahorro (en miles de pesos)	**Número de familias**
[0, 600)	39
[600, 1 200)	15
[1 200, 1 800)	25
[1 800, 2 400)	11
[2 400, 3 000)	10
	100

Tabla 6.27

a. Halla la marca de cada clase y completa la tabla de frecuencias.

Ahorro (en miles de pesos)	x_i	f_i	h_i	F_i
[0, 600)				
[600, 1 200)				
[1 200, 1 800)				
[2 800, 2 400)				
[2 400, 3 000)				

Tabla 6.28

b. Representa el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente.

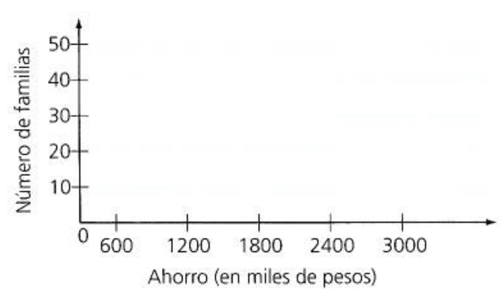


Figura 6.20

c. ¿Qué porcentaje de familias ahorra entre $ 2 400 000 y $ 3 000 000?

6 Medidas de tendencia central

Saberes previos

Las edades de 16 personas que han acudido al médico un determinado día son:

15	17	13	15
17	18	19	10
24	21	22	14
17	32	15	18

Calcula la media aritmética, la mediana y la moda de los datos.

Analiza

Tabla 6.29

La Tabla 6.29 muestra los resultados obtenidos al preguntarle a 60 estudiantes, cuántas horas al día navegan en internet.

Tiempo en horas	Cantidad de estudiantes
[0, 1)	5
[1, 2)	11
[2, 3)	24
[3, 4)	12
[4, 5)	8

- ¿Cómo se puede describir la tendencia de estos datos?

Conoce

Para facilitar el manejo de los datos, es conveniente representarlos en intervalos de tiempo y tomar un valor representativo.

Tiempo dedicado por 60 estudiantes para navegar en Internet			
Tiempo en horas	Marcas de clase (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia acumulada (F_i)
[0, 1)	0,5	5	5
[1, 2)	1,5	11	16
[2, 3)	2,5	24	40
[3, 4)	3,5	12	52
[4, 5)	4,5	8	60

Tabla 6.30

Si se desea describir la tendencia de estos datos, se utilizan las llamadas *"medidas estadísticas"*, tales como las medidas de posición central: la media aritmética, la mediana y la moda.

6.1 La media aritmética

La media aritmética corresponde al promedio de todos los valores de la muestra.

La **media aritmética** $\bar{x}$ se obtiene adicionando todos los valores ($x_i \cdot f_i$) y dividiendo el resultado por el número total de datos N.

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n}{N}$$

Ejemplo 1

En la Tabla 6.31, se muestran los valores correspondientes a la marca de clase y la frecuencia absoluta de las respuestas de 60 estudiantes al tiempo que dedican al día a navegar en internet.

Tiempo en horas	Marcas de clase (x_i)	Número de estudiantes (f_i)
[0, 1)	0,5	5
[1, 2)	1,5	11
[2, 3)	2,5	24
[3, 4)	3,5	12
[4, 5)	4,5	8

Tabla 6.31

Para hallar la media aritmética se procede a adicionar los productos de las marcas de clase por la frecuencia absoluta correspondiente. Luego, se divide esta suma entre el número total de datos, que es 60.

$$\bar{x} = \frac{0{,}5 \cdot 5 + 1{,}5 \cdot 11 + 2{,}5 \cdot 24 + 3{,}5 \cdot 12 + 4{,}5 \cdot 8}{60} = 2{,}61$$

Este resultado indica que, en promedio, los estudiantes encuestados emplean entre dos y tres horas diarias para navegar en internet.

6.2 La mediana

La mediana es el valor que ocupa el lugar central, cuando se han ordenado los datos, de menor a mayor. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos valores centrales, siempre que este valor sea aceptable.

La **mediana** M_e de un conjunto de datos es el valor de la variable que ocupa la posición central. Cuando los datos están agrupados, la **clase mediana** es aquella cuya frecuencia absoluta acumulada supera, por primera vez, la mitad de los datos.

Ejemplo 2

El valor que representa la mitad de los datos de la situación inicial es $60 \div 2 = 30$.

Intervalos *i* (Número de horas)	Marcas de clase (x_i)	Frecuencia acumulada (F_i)
[0, 1)	0,5	5
[1, 2)	1,5	16
[2, 3)	**2,5**	**40**
[3, 4)	3,5	52
[4, 5)	4,5	60

Tabla 6.32

En la Tabla 6.32 se observa que el intervalo cuya frecuencia acumulada supera, por primera vez, a 30 es [2, 3).

Por lo tanto, la clase mediana es [2, 3) y la mediana es 2,5 horas, aproximadamente. Este resultado indica que la mitad de las personas encuestadas emplea hasta 2,5 horas diarias para navegar en internet y la otra mitad emplea más de 2,5 horas.

6.3 La moda

La moda de una distribución es el valor que más se repite. Cuando los datos están agrupados en clases, se halla la clase modal.

La **moda** M_0 de un conjunto de datos es el valor que se presenta con mayor frecuencia. Es decir, es el que tiene mayor frecuencia absoluta.

La **clase modal** corresponde a la clase con la mayor frecuencia y representa el valor de la moda cuando los datos están agrupados.

Ejemplo 3

La clase modal de la situación planteada en el Ejemplo 1 es [2, 3), pues es el intervalo con mayor frecuencia (24).

La marca de clase de esta clase modal es 2,5.

Luego, la moda para ese conjunto de datos es 2,5.

Este resultado indica que lo más común es que un estudiante, de los 60 encuestados, emplee entre dos y tres horas para navegar en internet.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la media, la clase mediana y la clase modal de los datos registrados en cada situación.

a. El número de trabajadores de un polígono industrial se registra en la Tabla 6.33.

Número de trabajadores	Número de empresas (f_i)
[10, 30)	8
[30, 50)	12
[50, 70)	9
[70, 90)	2
[90, 110)	4

Tabla 6.33

b. En la Tabla 6.34 se muestra la puntuación obtenida por 35 estudiantes en una prueba de matemáticas.

Puntaje obtenido	Cantidad de estudiantes (f_i)
[0, 1)	8
[1, 2)	12
[2, 3)	9
[3, 4)	2
[4, 5)	4

Tabla 6.34

c. En la Tabla 6.35 se presenta la estatura en centímetros de 75 jugadores de un campeonato de baloncesto.

Estatura en cm	Número de jugadores (f_i)
[168, 172)	5
[172, 176)	11
[176, 180)	24
[180, 184)	21
[184, 188)	14

Tabla 6.35

2 Las edades de los socios de un club deportivo se muestran en la Tabla 6.36.

Edad (años)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
No. de socios	68	80	52	34

Tabla 6.36

a. Elabora la tabla de frecuencias absolutas.

b. Calcula la media, la mediana y la moda.

3 La Tabla 6.37 muestra las notas obtenidas por dos grupos de estudiantes en el primer examen de matemáticas del año escolar.

Nota	Número de estudiantes Grupo *A*	Número de estudiantes Grupo *B*
[2,0; 2,5)	4	0
[2,5; 3,0)	15	16
[3,0; 3,5)	21	10
[3,5; 4,0)	5	22
[4,0; 4,5)	3	1
[4,5; 5,0)	2	1

Tabla 6.37

a. ¿Cuántos estudiantes tiene cada grupo?

b. Encuentra la media, la clase mediana y la clase modal de cada grupo.

4 Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de cada grupo de datos.

a. −3, 0, 2, 2, 6

b. 5, 7, 9, 9, 7, 2

c. 10, 15, 10, 15, 12, 13

d. 2, −2,5, −5, 1,5

5 Se le preguntó a un grupo de 20 jóvenes el número de horas que dedican semanalmente al estudio y se obtuvieron los siguientes resultados.

8	10	4	0	12	20	16	8	12	14
3	6	8	3	10	15	8	2	10	17

a. Haz el conteo y construye la tabla de frecuencias absolutas de los datos.

b. Calcula la media de la distribución.

c. Determina la mediana y la moda.

6 En un estacionamiento hay siete autos blancos, cinco rojos, tres grises y ocho negros.

a. ¿Cuál es la moda de los colores de los autos?

b. ¿Se puede calcular la media aritmética?

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Comunicación

7 Indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. La moda de un estudio estadístico siempre pertenece al conjunto de datos. ( )

b. En ningún caso, la media pertenece al conjunto de datos estadísticos. ( )

c. En algunos casos, la mediana puede tener valor igual a la media y a la moda. ( )

d. En una tabla de datos agrupados, el último dato de la frecuencia absoluta equivale al valor total de los datos. ( )

Razonamiento

8 Las notas de un examen de inglés de un grupo de 24 estudiantes fueron las siguientes.

7	6	4	5	3	9	0	3
8	8	5	9	0	6	10	6
5	7	6	3	5	7	2	4

a. Calcula la nota media del grupo.

b. Determina la nota media del grupo sin contar a los dos alumnos que han sacado cero.

c. Calcula la nota media de los estudiantes que aprobaron el examen.

9 La media aritmética de cuatro números es 5. Si se agrega un nuevo número, el 8.

a. ¿Cuál es la media aritmética de los cinco datos?

b. ¿Se puede calcular la moda y la mediana del conjunto de datos?, ¿por qué?

10 Observa la Figura 6.21.

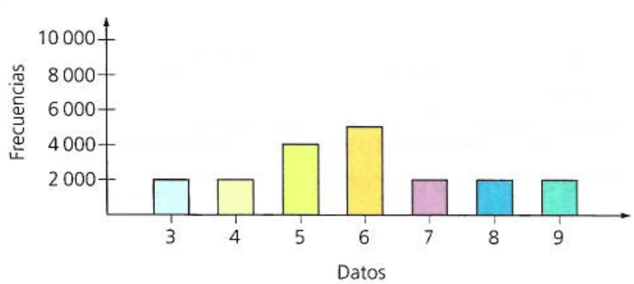


Figura 6.21

Halla la media, la mediana y la moda de la distribución.

11 Observa la Figura 6.22.

a. ¿Cuál es la frecuencia relativa del dato *B*?

b. ¿Cuál es la moda de la distribución?

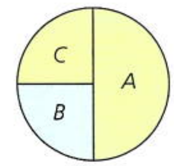


Figura 6.22

12 Determina la media, la mediana y la moda de la distribución representada en la Figura 6.23.

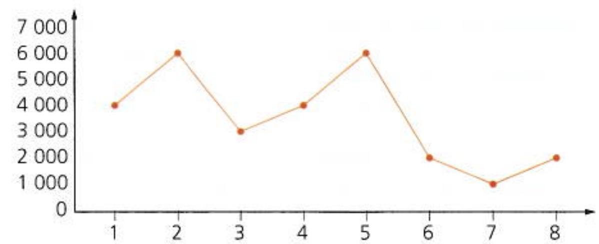


Figura 6.23

Resolución de problemas

13 Los salarios mensuales de los cuatro empleados de una pequeña empresa son $700 000, $800 000, $900 000 y $1 100 000, respectivamente. Por su parte, el dueño de la empresa gana mensualmente $3 500 000.

¿Qué medida crees que representa mejor los valores centrales de la distribución, la media o la mediana? Justifica tu respuesta.

Evaluación del aprendizaje

i Las notas que Julia obtuvo en las evaluaciones de matemáticas en el último periodo son 2, 4, 5, 6 y 6, pero todavía tiene que presentar el último examen.

¿Qué nota debe sacar para que la media sea 5?

ii Arturo se ha medido diez veces su frecuencia cardiaca, en latidos por minuto, y los resultados que obtuvo fueron:

70	82	77	74	80	81	72	79	82	73

Según un estudio, el promedio de la frecuencia cardiaca de una persona sana es de 83,5. ¿Qué opinas de la media de la frecuencia cardiaca de Arturo? Explica.

7 Medidas de dispersión

Pensamiento aleatorio

Saberes previos

Las estaturas, en centímetros, de los jugadores de dos equipos de baloncesto son:

Equipo A: 190, 192, 195, 198, 200

Equipo B: 170, 175, 195, 215, 220

- Calcula la media aritmética de las estaturas de cada equipo.
- ¿Se puede concluir que las estaturas de los dos equipos son similares? ¿Por qué?

Analiza

En la Tabla 6.38 se registran las edades de 50 empleados, agrupadas en intervalos de amplitud 6.

Edad en años	f_i
[18, 24)	5
[24, 30)	4
[30, 36)	11
[36, 42)	12
[42, 48)	10
[48, 54)	8

Tabla 6.38

- ¿Se podría afirmar que la media es un dato representativo del grupo?

Conoce

Para identificar si la media es un dato representativo del grupo, es necesario calcular las medidas básicas, tal como se muestra en la Tabla 6.39.

Edad en años (x)	Marcas de clase (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia acumulada (F_i)
[18, 24)	21	5	5
[24, 30)	27	4	9
[30, 36)	33	11	20
[36, 42)	39	12	32
[42, 48)	45	10	42
[48, 54)	51	8	50

Tabla 6.39

Luego, se calcula la media del grupo de datos, a:

$$\overline{x} = \frac{21 \cdot 5 + 27 \cdot 4 + 33 \cdot 11 + 39 \cdot 12 + 45 \cdot 10 + 51 \cdot 8}{50} = 38{,}04$$

Después de conocer el valor de la media del conjunto, se debe analizar si el dato es representativo con respecto a la información. Para esto, se pueden utilizar medidas como el rango, la desviación típica y la varianza.

7.1 Rango

En un conjunto de datos, el menor valor es el mínimo y el mayor es el máximo.

El **rango** es la diferencia entre el mayor y el menor valor de los datos.

7.2 Desviación respecto a la media

La **desviación respecto a la media d_i** de un valor x_i es la diferencia entre ese valor y la media $\overline{x}$ de los datos.

$$d_i = x_i - \overline{x}$$

A partir de la noción de desviación respecto a la media, se definen las siguientes medidas de dispersión: desviación media, varianza y desviación típica.

7.3 Desviación media

La **desviación media** $D_{\overline{x}}$ es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones respecto a la media del conjunto de datos. Es decir:

$$D_{\overline{x}} = \frac{f_1\,|x_1 - \overline{x}| + f_2\,|x_2 - \overline{x}| + f_3\,|x_3 - \overline{x}| + \ldots + f_n\,|x_n - \overline{x}|}{N}$$

Ejemplo 1

La Tabla 6.40 es útil para hallar la desviación media de los datos presentados en la Tabla 6.39.

Edad en años	f_i	x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
[18, 24)	5	21	17,04	85,2
[24, 30)	4	27	11,04	44,16
[30, 36)	11	33	5,04	55,44
[36, 42)	12	39	0,96	11,52
[42, 48)	10	45	6,96	69,6
[48, 54)	8	51	12,96	103,68

Tabla 6.40

Con base en estos resultados, se calcula la desviación media:

$$D_{\bar{x}} = \frac{85{,}2 + 44{,}16 + 55{,}44 + 11{,}52 + 69{,}6 + 103{,}68}{50} = 7{,}392$$

Por lo tanto, $D_{\bar{x}} = 7{,}392$, y esto quiere decir que los datos están lejanos del valor central o media.

7.4 Varianza

La **varianza** s^2 es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media de cada dato.

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + f_3(x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + f_n(x_n - \bar{x})^2}{N}$$

Ejemplo 2

Para calcular la varianza de los datos del Ejemplo 1, se calculan los cuadrados de las desviaciones respecto a la media de cada dato, esto es: $(x_i - \bar{x})^2$. Luego, se determina el producto de estos valores con su frecuencia absoluta, es decir, $f_i(x_i - \bar{x})^2$. Observa la Tabla 6.41.

Edad en años	f_i	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
[18, 24)	5	21	290,3616	1451,808
[24, 30)	4	27	121,8816	487,5264
[30, 36)	11	33	25,4016	279,4176
[36, 42)	12	39	0,9216	11,0592
[42, 48)	10	45	48,4416	484,416
[48, 54)	8	51	167,9616	1343,6928

Tabla 6.41

Después, se calcula la varianza así:

$$s^2 = \frac{1451{,}808 + 487{,}5264 + 279{,}4176 + 11{,}0592 + 484{,}416 + 1343{,}6928}{50} = 81{,}16$$

Como $s^2 = 81{,}16$, entonces, los datos están dispersos con respecto a la media.

7.5 Desviación típica

La **desviación típica s** es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo 3

La desviación típica para la distribución del ejemplo de las edades de los empleados, cuyos datos se registraron en la Tabla 6.41, corresponde a la raíz cuadrada de 81,16. Esto es:

$$s = \sqrt{81{,}16} = 9{,}008$$

7.6 Coeficiente de variación

Cuando se tienen dos distribuciones con medias diferentes, las desviaciones típicas no permiten comparar el grado de dispersión de los datos. Para hacerlo, se utiliza el coeficiente de variación.

El **coeficiente de variación *CV*** es la razón entre la desviación típica de una distribución y su media aritmética.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Ejemplo 4

El coeficiente de variación de la distribución de edades de los empleados, cuya información aparece en la Tabla 6.39, es $CV = \dfrac{9{,}008}{38{,}04} = 0{,}237$.

Si en otra empresa, la desviación típica de la distribución de edades de los empleados es 7,86 y la media es 45, entonces, el coeficiente de variación en este caso, corresponde a $CV = \dfrac{7{,}89}{45} = 0{,}17$.

Al comparar los resultados de las dos empresas se tiene que $0{,}17 < 0{,}237$; por lo tanto, en la primera empresa los datos están más dispersos con respecto a la media. Por el contrario, en la segunda las edades de los empleados están en torno a la media.

Ejemplo 5

Los promedios de sombreros vendidos al mes en dos fábricas de artesanías *A* y *B* son 4 400 y 4 280, respectivamente.

Si la desviación típica tanto de *A* como de *B* es 620, entonces, la fábrica que presentó mayor variabilidad en sus ventas fue *B*, pues al calcular los coeficientes de variación respectivos se tiene:

Fábrica *A* — Fábrica *B*

$$CV = \frac{620}{4\,400} = 0{,}1409 < CV = \frac{620}{4\,280} = 0{,}1449$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 En la Tabla 6.42 se muestran las notas de Luisa y Pedro, en cinco exámenes.

Luisa	3	5	8	4	7
Pedro	7	2	9	4	5

Tabla 6.42

Halla la nota media, el rango y la desviación típica de ambos estudiantes.

2 Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de la distribución de la Tabla 6.43.

x_i	5	6	7	8	9
f_i	8	9	5	2	1

Tabla 6.43

3 Haz los ejercicios con base en la distribución que se muestra en la Tabla 6.44.

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	1	10	14	5	2	1

Tabla 6.44

a. Elabora la tabla de frecuencias absolutas y el diagrama de barras correspondiente.

b. Calcula la media y la desviación típica.

c. Halla el coeficiente de variación.

d. ¿Consideras que la desviación típica es grande o pequeña respecto a la media?

4 La Tabla 6.45 muestra las notas obtenidas por un grupo de estudiantes en dos exámenes de matemáticas.

Nota	Primer examen	Segundo examen
[20, 25)	4	7
[25, 30)	15	13
[30, 35)	21	25
[35, 40)	5	3
[40, 45)	3	2
[45, 50)	2	0

Tabla 6.45

a. Halla el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica para los resultados de cada examen.

b. Halla el coeficiente de variación para cada examen.

c. ¿En cuál examen se presenta mayor dispersión? Justifica tu respuesta.

5 Si la desviación típica en una distribución es 2,4, ¿cuál es la varianza?

Comunicación

6 Observa las distribuciones de la Figura 6.24.

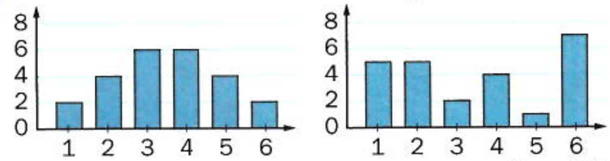


Figura 6.24

a. Ambas tienen la misma media. ¿Cuál es su valor?

b. Las desviaciones típicas son: $s = 1{,}38$ y $s = 1{,}94$. Asocia estos valores con cada distribución.

Resolución de problemas

7 La distribución de los sueldos de los 60 empleados de una empresa se refleja en la Tabla 6.46.

Sueldo (miles de pesos)	Número de empleados
[600, 900)	8
[900, 1 200)	12
[1 200, 1 500)	20
[1 500, 1 800)	14
[1 800, 2 100)	6

Tabla 6.46

a. Halla el sueldo medio de los empleados de la empresa. También, la mediana y la moda.

b. Calcula el rango y la desviación típica.

Evaluación del aprendizaje

Se ha medido el tiempo de espera, en minutos, en una parada de bus, durante una semana a la misma hora del día. En la Tabla 6.47 se muestran los resultados.

Día	L	M	Mc	J	V	S	D
Tiempo	5	5	4	27	4	5	6

Tabla 6.47

a. Calcula la media y la mediana de los datos.

b. ¿Cuál de las dos medidas te parece más representativa, teniendo en cuenta el valor atípico del jueves?

8 Diagrama de árbol. Principio de multiplicación

Saberes previos

Para ir al baile de graduación, Diana puede usar uno cualquiera de sus cuatro vestidos, uno cualquiera de sus tres pares de zapatos y uno de sus dos bolsos. ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse para asistir al baile? ¿Cuáles son?

Analiza

Dos estudiantes diseñan camisetas para un evento. En su diseño tienen en cuenta los tres criterios que se muestran en la Tabla 6.48.

Talla		Motivos	Colores
S	M	Serio	Rojo
L	XL	Divertido	Verde

Tabla 6.48

- ¿Cuántos modelos diferentes crean los estudiantes?

Conoce

Para responder, es necesario efectuar el conteo de las posibles combinaciones de los tres criterios que se tienen en cuenta al elaborar cada camiseta. Para ello, se construye un diagrama de árbol.

El **diagrama de árbol** es una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento que consta de dos o más pasos.

El diagrama de árbol correspondiente a los diseños de las camisetas se muestra en la Figura 6.25.

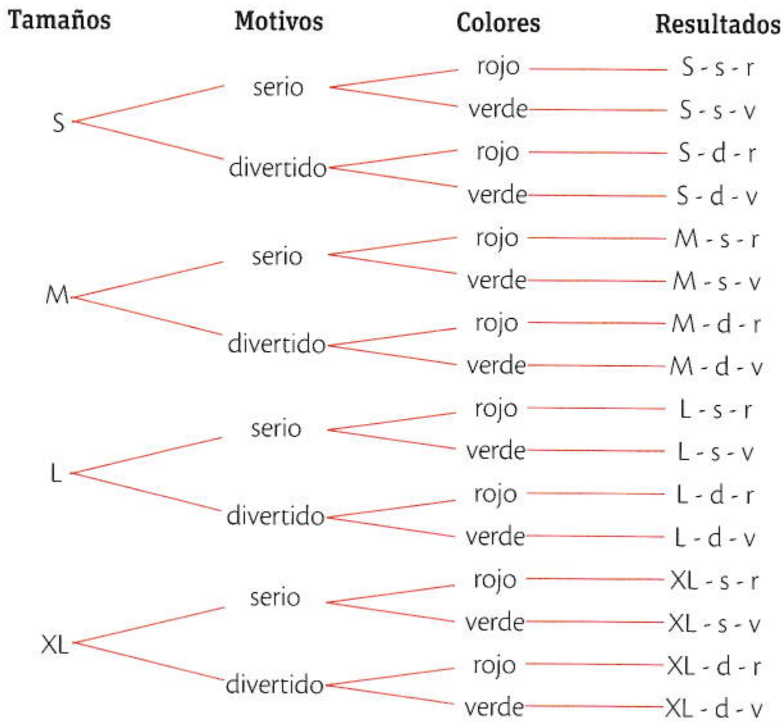


Figura 6.25

Por lo tanto, los estudiantes deben diseñar 16 modelos diferentes de camisetas.

El **principio de multiplicación** se aplica para determinar el número de variaciones que pueden darse al realizar combinaciones entre diferentes objetos.

Si hay n_1 opciones para elegir un objeto, n_2 opciones para elegir un segundo objeto, n_3 para elegir un tercero, etc., y para elegir un enésimo objeto hay n_n opciones, el número total de maneras de elegir los distintos objetos es el producto: $n_1 \cdot n_1 \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_n$.

Ejemplo 1

Al lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 hay seis resultados posibles. Cuando se lanzan tres dados cúbicos con las mismas características se obtendrán:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216 \text{ resultados posibles.}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Para cada experimento halla el espacio muestral, construyendo previamente el diagrama de árbol. Especifica el número de resultados posibles.

a. Se lanzan tres monedas.

b. Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas así:

- Primer dado: 1, 1, 1, 2, 3, 4.
- Segundo dado: 2, 3, 4, 4, 5, 6.

c. Se lanzan una moneda y un dado cúbico.

d. Se extrae una carta de una baraja española y se lanzan un dado tetraédrico y una moneda.

e. Se sacan dos bolas de dos urnas diferentes. En la primera urna hay tres bolas marcadas con las letras A, N y P y en la segunda hay dos bolas marcadas con los números 1 y 3.

f. Se lanzan sucesivamente una moneda y un dado octaédrico regular.

Razonamiento

2 Sonia tiene dos pantalones deportivos, cuatro camisetas y tres pares de zapatillas.

a. Representa las distintas opciones de vestir que tiene Sonia para vestirse al hacer ejercicio.

b. Compara tu respuesta con las de dos de tus compañeros y escriban una conclusión.

3 Con las letras de la palabra *amor* forma todas las combinaciones posibles de cuatro letras, tengan o no sentido, sin repetir ninguna.

a. ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener?

b. Si se tienen en cuenta solamente las palabras que tienen sentido, ¿cuántos resultados hay?

Modelación

4 Formula una situación que se pueda representar a partir de la Figura 6.26.

Figura 6.26

Resolución de problemas

5 El equipo de baloncesto de grado octavo desea elaborar una bandera con dos franjas horizontales de diferente color. Los colores que han preseleccionado son azul, amarillo, blanco y verde. ¿Cuántas opciones de color tienen para diseñar la bandera?

Evaluación del aprendizaje

✓ Utiliza el diagrama de árbol de la Figura 6.27 para plantear y resolver un problema.

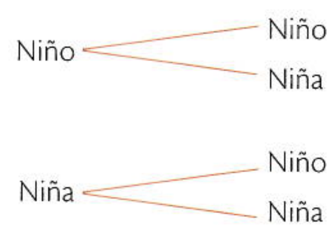


Figura 6.27

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

El cumplimiento de los planes de vida de los seres humanos depende de las decisiones y acciones que cada quien tome.

- Haz una lista de tus proyectos personales. Luego, escribe tres maneras diferentes en las que puedes llevar a cabo estos proyectos en orden cronológico.

9 Variaciones

Saberes previos

Se lanzan dos dados y se anota la suma de los puntos obtenidos. Calcula:

- ¿De cuántas maneras se puede obtener 7 como resultado?
- ¿De cuántas maneras se puede obtener un número par?

Analiza

En un curso de octavo grado, se postulan Andrés, Milena, Johan y Luisa para los cargos de representante y coordinador de convivencia durante el año escolar.

- ¿Cuáles son las posibles maneras de elegir entre ellos un representante y un coordinador de convivencia para el grupo?

Conoce

Para el cargo de representante hay cuatro candidatos posibles. Sin importar quién sea elegido como representante del curso, para ocupar el puesto de coordinador de convivencia quedan ahora tres postulantes. Por lo tanto, hay $4 \cdot 3 = 12$ formas diferentes de elegir representante y coordinador de convivencia.

A las distintas ordenaciones se les llama **variaciones** de cuatro elementos (porque hay cuatro candidatos) tomados de dos en dos (porque hay dos cargos a ocupar).

El listado de las doce variaciones para elegir representante (R) y coordinador de convivencia (CC) son:

R	CC	R	CC	R	CC	R	CC
Andrés	Milena	Milena	Andrés	Johan	Andrés	Luisa	Andrés
Andrés	Johan	Milena	Johan	Johan	Milena	Luisa	Milena
Andrés	Luisa	Milena	Luisa	Johan	Luisa	Luisa	Johan

Tabla 6.49

9.1 Variaciones sin repetición

Se llaman **variaciones ordinarias** o **variaciones sin repetición** de m elementos tomados de n en n ($n \leqslant m$), a los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos distintos.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de todas las variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n se denota por $V_{m,n}$ o V_m^n.

$$V_{m,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}_{n \text{ factores decrecientes consecutivos}} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Ejemplo 1

En un curso de 20 estudiantes se realiza un sorteo para otorgar dos premios al azar. Para saber de cuántas formas diferentes se pueden repartir los premios, se representa cada uno de los estudiantes con $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$. Por lo tanto, hay 20 formas de asignar el primer premio y 19 de asignar el segundo (una vez asignado el primero). Aplicando el principio de multiplicación se obtiene $20 \cdot 19 = 380$ maneras diferentes de asignarlos (Figura 6.28).

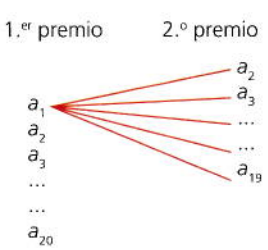


Figura 6.28

9.2 Variaciones con repetición

Se llaman **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n, a los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, tal que:

- En cada grupo haya n elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

El número de todas las variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $VR_{m,n}$ o VR_m^n.

$$VR_{m,n} = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ factores}} = m^n$$

Ejemplo 2

Si en la situación del Ejemplo 1, se indica que los premios pueden ser ganados por el mismo estudiante, se tendrían 20 formas de asignar cada uno de los premios, así que, aplicando de nuevo el principio de multiplicación se obtienen $20 \cdot 20 = 400$ maneras diferentes de asignarlos (Figura 6.29).

Estos distintos grupos ordenados de dos estudiantes (repetidos o no), elegidos de entre los 20 que participan, se llaman variaciones de 20 elementos tomados de dos en dos.

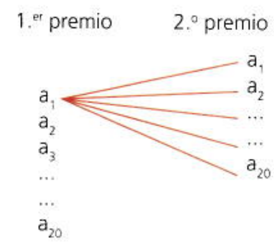


Figura 6.29

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1 Un conductor de autobús tiene que hacer la ruta de A a B efectuando una parada en C. Para ir de A a C tiene tres rutas posibles, y para ir de C a B, cinco. ¿Cuántas rutas diferentes puede hacer el conductor?

2 Los premios Óscar los otorga anualmente la Academia de las Artes y las Ciencias Cinematográficas en Los Ángeles (California). En la ceremonia se entregan 24 premios en distintas categorías (mejor película, mejor actriz, mejor fotografía, etc.). Para cada premio hay cinco posibles candidatos. ¿De cuántas formas distintas se pueden conceder estos premios?

3 En una clase de 22 estudiantes, todos quieren sentarse en los cinco asientos de la primera fila. ¿De cuántas formas puede asignar el profesor esos asientos?

Evaluación del aprendizaje

i A una cumbre europea acudieron doce presidentes de gobierno.

a. A la hora de tomarse la foto conmemorativa se ubicaron en fila. ¿De cuántas formas distintas se pudieron ubicar?

b. A la hora de comer se sentaron en una mesa circular. ¿De cuántas formas distintas pudieron ubicarse?

ii Con las letras de la palabra *amigo*, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer?

¿Cuántas empiezan por *A*?

¿Cuántas empiezan por *AMI*?

10 Probabilidad de sucesos

Saberes previos

Un recipiente contiene 4 canicas azules, 5 canicas rojas, y 11 canicas blancas. Si se saca una canica del recipiente al azar, ¿qué es más probable, sacar una canica azul, una roja o una blanca?

Analiza

Se lanza diez veces un dado cúbico y se obtienen los siguientes resultados.

2	3	4	5	6
1	1	3	3	6

- ¿Cuántos de los lanzamientos llevaron a obtener un número impar?
- ¿Si se hacen veinte lanzamientos, la cantidad de números impares se aproximará a la que se obtuvo en los primeros diez lanzamientos?

Analiza y conoce

En diez lanzamientos, la frecuencia para cada resultado fue:

Número obtenido	1	3	5	2	4	6
Frecuencia	2	3	1	1	1	2

Tabla 6.50

Se obtuvieron seis de diez resultados para la opción *sacar número impar* y cuatro de diez para la opción *sacar número par*.

Luego, la probabilidad de sacar un tipo de número u otro es aproximadamente igual debido a que se trata de eventos equiprobables. Esta característica puede seguir comprobándose a medida que aumenta el número de lanzamientos.

En un experimento, la **frecuencia relativa** de un suceso y su probabilidad tienden a aproximarse a medida que crece el número de pruebas realizadas.

Ejemplo 1

Se lanza una moneda 200 veces y se anotan las frecuencias absolutas y relativas del suceso: *salir cara*. La Tabla 6.51 y la Figura 6.30, muestran los resultados obtenidos.

Número de tiros	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
20	11	0,550
40	18	0,450
60	31	0,517
80	42	0,525
100	48	0,480
120	59	0,492
140	72	0,514
160	83	0,519
180	92	0,511
200	101	0,505

Tabla 6.51

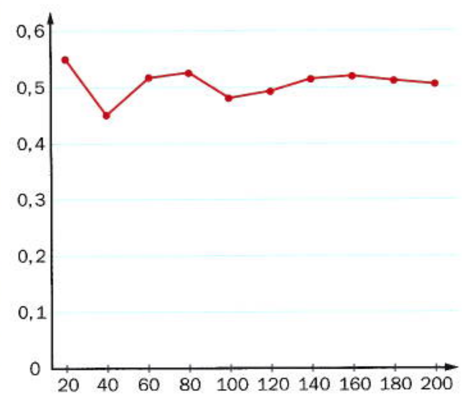


Figura 6.30

Se puede observar que la frecuencia relativa del suceso *A* tiende a estabilizarse en torno al número 0,5; este valor corresponde a la probabilidad del suceso *A*.

10.1 Regla de Laplace

La **regla de Laplace** se aplica solo en aquellos experimentos en los que todos los resultados son igualmente probables y permite hallar la probabilidad de un suceso mediante la fórmula:

$$\text{Probabilidad de un suceso} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso}}{\text{número de casos posibles}}$$

Los **casos favorables** son las posibilidades de obtener un resultado específico y los **casos posibles** son todos los resultados del espacio muestral del experimento.

10.2 Propiedades de la probabilidad

A partir de la aplicación de la regla de Laplace, se pueden identificar diferentes propiedades de la probabilidad de un suceso.

La **probabilidad de un suceso** es un número comprendido entre 0 y 1. Algunos axiomas relacionados son:

- La probabilidad del **suceso seguro** es 1.
- La probabilidad del **suceso imposible** es 0.
- La probabilidad del **suceso contrario** de A es: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Ejemplo 2

Si se compran cinco de los 100 boletos vendidos en una rifa, la probabilidad de ganar el premio será:

$$\frac{5}{100} = 0{,}05$$

Las demás probabilidades serían:

$$\frac{0}{600} = 0; \ \frac{1}{100} = 0{,}01; \ \frac{2}{100} = 0{,}02; \ ...; \ \frac{100}{100} = 1$$

Por lo tanto, el menor valor posible de la probabilidad será 0 y el mayor 1.

Ejemplo 3

Se extrae una balota de la urna de la Figura 6.30.

- La probabilidad de sacar una balota roja es $P(R) = \frac{5}{5} = 1$.
- La probabilidad de sacar una balota verde es $P(V) = \frac{0}{5} = 0$.

Es seguro sacar una balota roja y es imposible sacar una verde.

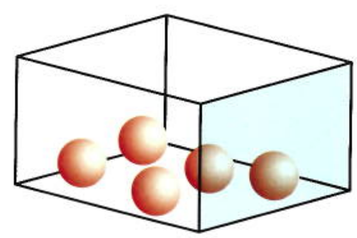


Figura 6.31

Ejemplo 4

En una caja hay 24 semillas, de las cuales diez son almendras y, el resto, avellanas. Si se escoge una semilla al azar y se quiere saber cuál es la probabilidad de que sea una almendra y cuál es la probabilidad de que sea una avellana, se calcula: $P(A)$ y $P(\overline{A})$.

A: *Sacar una semilla de almendra.* Por lo tanto, $P(A) = \frac{10}{24}$.

$\overline{A}$: *Sacar una semilla de avellana.* Por lo que, $P(\overline{A}) = \frac{14}{24}$.

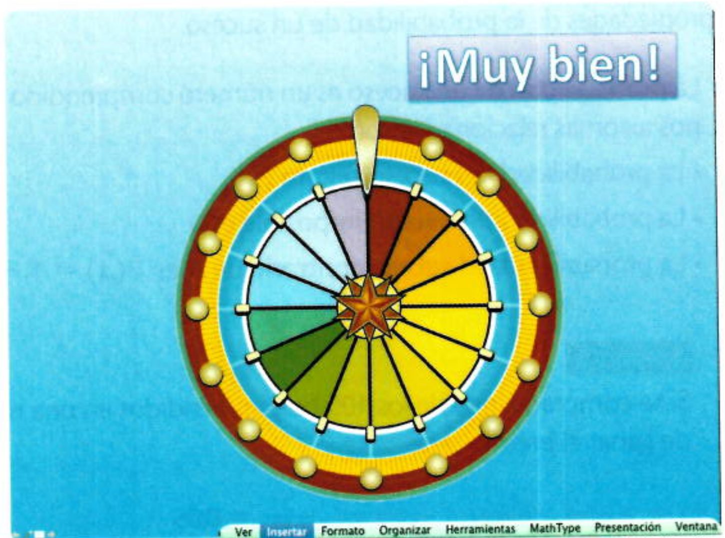
Observa que $P(A) + P(\overline{A}) = \frac{10}{24} + \frac{14}{24} = 1$.

10 Probabilidad de sucesos

MatemaTICS

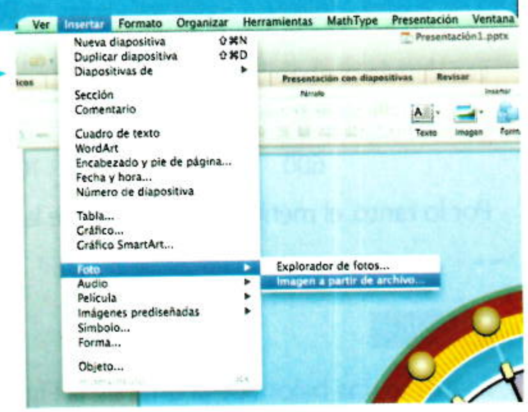
Crea tu propia ruleta con PowerPoint

PowerPoint es un programa que permite la creación de diapositivas en las que se pueden incorporar textos, fotos, ilustraciones, dibujos, tablas, etc., así como, crear animaciones sencillas como la que se muestra a continuación.



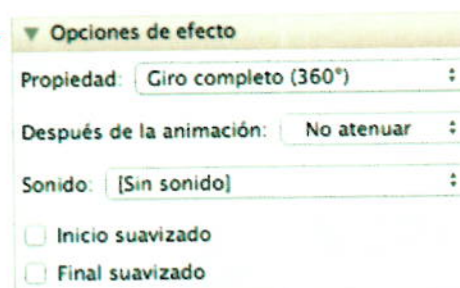
- Busca la imagen de una ruleta llamativa y con varias divisiones de colores.

- Inserta la imagen en el programa PowerPoint. Da clic en la pestaña *Insertar*, luego en *Foto* y finalmente en la opción *Imagen desde archivo*. Entonces, selecciona la imagen que preparaste anteriormente.

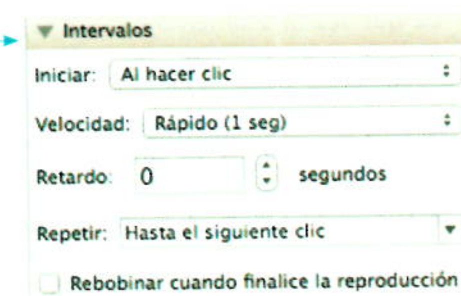


- Ve a la pestaña de *Animaciones* y busca la animación *Girar*.

- En la pestaña de *Animaciones* busca *Panel de animación* y allí, *Opciones de efectos*.



- En la pestaña de *Animaciones* busca el *Panel de animación* y allí, *Intervalos*.



- Crea un texto en WordArt y anímalo con la acción *Aparecer*. Luego, ubica una flecha fija y el texto en la diapositiva. Este aparecerá cuando detengas la ruleta en medio de la presentación, al hacer clic.

¡Aprovecha tu ruleta para repasar los temas de probabilidad que has estudiado!

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 En cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, señala si los sucesos elementales que forman el espacio muestral son o no equiprobables.

a. Al lanzar un dado, que salga un número par o impar.

b. Obtener una nota de 0 a 10 en un examen que se respondió al azar.

c. Las posibles sumas de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

2 Completa la Tabla 6.52. Considera que el experimento consiste en sacar una balota de la urna de la Figura 6.32.

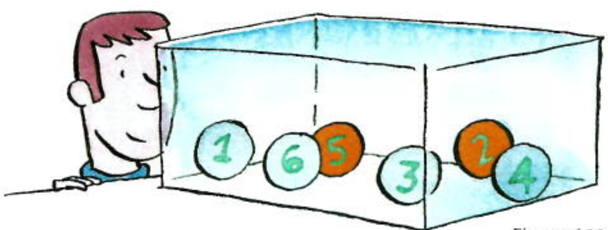


Figura 6.32

Suceso	Resultados favorables	Probabilidad
Sacar azul		
Sacar par		
Sacar anaranjada o impar		
Sacar anaranjada		

Tabla 6.52

3 En una urna hay 30 balotas numeradas del 1 al 30. Se extrae una balota al azar. Calcula las probabilidades que se indican.

a. Sacar un número par.

b. Sacar un número que termina en 0.

c. Sacar un múltiplo de 5.

d. Sacar un número que no sea un múltiplo de 3.

4 Calcula las probabilidades que se indican al girar la ruleta de la Figura 6.33.

a. Rojo

b. Amarillo

c. Azul o rojo

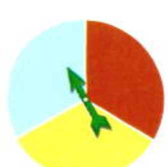


Figura 6.33

5 Calcula la probabilidad de que la última cifra de un número de teléfono sea alguna de las siguientes opciones.

a. El número 7.

b. Un múltiplo de 3.

c. Igual al último número de tu teléfono fijo.

Modelación

6 Propón un ejemplo de un experimento y un suceso cuya probabilidad sea alguna de estas opciones.

a. Imposible b. Posible c. Segura

Resolución de problemas

7 En una clase hay 16 niñas y 14 niños. Se escribe el nombre de cada uno de ellos en una tarjeta. Luego, se introducen las tarjetas en una caja. Contesta las preguntas, considerando que se extrae una de las 30 tarjetas al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de un niño?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de una niña?

Evaluación del aprendizaje

Para diseñar una camiseta corporativa de la empresa de Luis con dos franjas horizontales de diferente color se debe elegir entre los colores rojo, negro, gris y morado.

a. ¿Cuál es la probabilidad de elegir color morado?

b. Escribe un evento imposible para este experimento.

Estilos de vida saludable

En Colombia, cuatro de cada diez personas sufren de algún trastorno mental como depresión, ansiedad o abuso de sustancias psicoactivas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 300 personas alguien sufra de algún tipo de estos transtornos?

Practica más

Medidas de posición central

Ejercitación

1 El reporte muestra la cantidad de unidades diarias de celulares que se vendieron durante un mes en un almacén. A partir de la información, calcula el promedio, la moda y la mediana de las ventas.

5	7	5	4	7	9
4	3	1	5	7	5
3	2	1	4	7	8
7	6	5	5	4	2
5	3	6	8	9	1

Medidas de posición no central

Resolución de problemas

2 Un centro de diagnóstico automotor registró la cantidad de kilómetros recorridos por los autos que repararon en un mes. Calcula la media, la mediana y la moda de los datos y halla los cuartiles.

Kilómetros recorridos	Frecuencia
[0 , 5 000)	75
[5 000, 10 000)	44
[10 000, 15 000)	86
[150 00, 20 000)	52
[20 000, 25 000)	91
[25 000, 30 000)	64
[30 000, 35 000)	52
[35 000, 40 000)	31

Tabla 6.53

Medidas de posición central

Razonamiento

3 Calcula el rango, la desviación media, la variación y la desviación típica del siguiente conjunto de datos.

Ventas de carros en un concesionario	
Número de productos	**Frecuencia**
[0 , 16)	7
[16, 32)	15
[32, 48)	12
[48, 64)	17
[64, 80)	19
[80, 96)	24

Tabla 6.54

Experimentos y sucesos aleatorios

Comunicación

4 Determina el espacio muestral de cada experimento.

a. Se lanza un dado octaédrico regular con caras numeradas del 1 al 8.

b. Se lanzan dos dados tetraédricos numerados del 1 al 4 y se anota la suma de los números obtenidos.

c. Se escogen tres cartas de tres colores distintos de cuatro posibles.

Resolución de problemas

5 Un experimento consiste en introducir seis balotas rojas numeradas del 1 al 6 y seis balotas azules numeradas del 7 al 12. Al sacar las balotas, se consideran los sucesos:

A: Extraer una balota azul.

B: Extraer una balota roja.

C: Extraer una balota con número par.

D: Extraer una balota con número impar.

a. Describe $A \cup B$, $A \cap B$; $B \cup C$ y $A \cap C$.

b. ¿Existen sucesos incompatibles? Explica.

Diagrama de árbol

Comunicación

6 Determina el espacio muestral de cada suceso.

a. Se lanza un dado octaédrico numerado del 1 al 8 y uno tetraédrico numerado del 1 al 4, y se anota la suma de los números obtenidos.

b. Se tienen cinco tarjetas marcadas con las letras A, B, C y los números 1 y 2, respectivamente. Se sacan al azar dos tarjetas con letra y una con número.

Probabilidad de sucesos

Modelación

7 Propón un experimento que cumpla cada condición.

a. De probabilidad 1.

b. De probabilidad 0.

c. De probabilidad $\frac{1}{2}$.

d. De probabilidad $\frac{7}{8}$.

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Dividir el problema en partes

Problema

Se lanzan dos dados simultáneamente.

¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números que muestren los dados en sus caras superiores sea múltiplo de 3?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información proporciona el enunciado?

  R: Dos dados son lanzados al mismo tiempo.

- ¿Qué debes calcular?

  R: La probabilidad de que la suma de los números que muestren los dados, sea un múltiplo de 3.

2. Crea un plan

- Encuentra el espacio muestral del experimento y busca las parejas de números que cumplen la condición establecida. Después, calcula la probabilidad de este evento.

3. Ejecuta el plan

- Si se tiene en cuenta que en el experimento se lanzan dos dados simultáneamente, el espacio muestral corresponderá a las parejas ordenadas:

  $E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (,3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

- Luego, se seleccionan las parejas ordenadas cuya suma es un múltiplo de 3. Estas son:

  $M = \{(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)\}$.

R: La probabilidad es $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la probabilidad de obtener un múltiplo de cinco es $\frac{7}{36}$.

Aplica la estrategia

1 Dos estudiantes participan en un experimento aleatorio en el que lanzan, simultáneamente, un dado y una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan (6, s)?

a. Comprende el problema

....

b. Crea un plan

....

c. Ejecuta el plan

....

d. Comprueba la respuesta

....

Resuelve otros problemas

2 Un estudiante está preocupado porque obtuvo como calificaciones en matemáticas las notas: 65, 75, 60 y 90. ¿Cuál debe ser la quinta nota para que alcance un promedio de 75?

3 En un experimento, se lanza un dado hexaédrico y, consecutivamente, se lanza otro. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer dado y en el segundo salga, simultáneamente, el número 6?

Formula problemas

4 Inventa una situación problema que involucre la siguiente información y resuélvela.

"En un curso de 36 estudiantes el número de mujeres es el doble que el número de hombres"

Enriquece tu vocabulario

- Busca en el diccionario las palabras *tetraédrico* y *hexaédrico*. Después, determina el espacio muestral de lanzar un dado con estas formas si sus caras se enumeran desde el 1 de manera ascendente.

Evaluación del aprendizaje

Distribución de frecuencias de datos agrupados

Razonamiento

1 Completa la Tabla 6.55. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Intervalo	Marca de clase	f_i	F_i
[2, 7)			4
[7, 12)		3	
[12, 17)		2	
[17, 22)			10

Tabla 6.55

Ejercitación

2 Las alturas, en centímetros, de veinte plantas de una determinada especie son: ACTIVIDAD DE REFUERZO

6,1 5,3 6,2 5,6 4,8 4,9 5,2 5,6 6,1 6,2

5,9 5,8 5,7 5,1 4,9 5,2 5,3 6,1 5,9 5,8

Elabora una tabla estadística para estos datos, agrupándolos en siete intervalos, y halla la marca de clase de cada uno.

Comunicación

3 Los pesos de 60 personas dados en kilogramos son: ACTIVIDAD DE REFUERZO

66 65 59 82 64 55 76 64 67 71 48 52

65 69 80 58 65 70 67 73 71 60 72 79

68 71 82 55 63 70 65 52 64 61 68 62

65 72 56 61 72 66 62 64 69 65 74 60

62 62 74 60 69 65 63 71 62 72 78 51

Elabora una tabla estadística para estos datos, agrupándolos en clases de amplitud 5 y halla la marca de clase de cada uno.

Representación de información estadística

Modelación

4 Representa la información de la Tabla 6.56 mediante diagrama de barras. Propón un título para el estudio que se pudo realizar. PREGUNTA ABIERTA

Valor	Frecuencia
$ 3 000	6
$ 4 500	8
$ 5 000	4
$ 7 500	2

Tabla 6.56

Razonamiento

5 A partir de la información de las tablas 6.57 y 6.58, construye un pictograma y un diagrama de puntos respectivamente para representar los datos. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. Estudio sobre las actividades de jornada adicional que prefieren los estudiantes de un colegio.

Actividad	Frecuencia
Informática	30
Deportes	42
Música	25
Artes manuales	35
Danza	28

Tabla 6.57

b. Conteo del número de libros de cada materia, que hay en la biblioteca de un colegio.

Materia	Frecuencia
Español	50
Matemáticas	65
Ciencias	38
Sociales	25
Inglés	12
Física	10

Tabla 6.58

6 Elabora el diagrama circular correspondiente a la tabla de frecuencias de la Tabla 6.59, que resume las ventas semanales de un almacén de electrodomésticos. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Día	Cantidad de artículos	Frecuencia relativa
Lunes	50	$\frac{1}{3}$
Martes	65	$\frac{1}{3}$
Miércoles	38	$\frac{1}{3}$
Jueves	25	$\frac{1}{3}$
Viernes	12	$\frac{1}{3}$

Tabla 6.59

Comunicación

7 Los datos de la Tabla 6.60 corresponden a las ventas, en millones, de algunas empresas de cierto sector del comercio. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ventas (millones de pesos)	x_i	f_i	h_i	F_i
[0, 10)		1		
[10, 20)		3		
[20, 30)		5		
[30, 40)		10		
[40, 50)		1		

Tabla 6.60

a. Completa la tabla de frecuencias.

b. Elabora el histograma y el polígono de frecuencias de los datos.

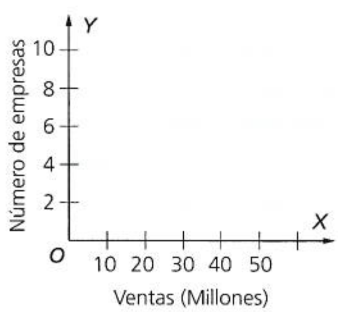


Figura 6.34

Medidas de tendencia central

Razonamiento

8 Si la media de cinco datos es 7 y cuatro de ellos son 5, 6, 9 y 12, ¿cuál es el quinto dato? ACTIVIDAD DE REFUERZO

Ejercitación

9 Las edades de las personas que van en un autobus, en un momento determinado, son: ACTIVIDAD DE REFUERZO

52	71	17	40	62	19	67	27	5	48
8	32	51	75	9	24	40	35	56	45

a. Agrupa los datos en intervalos de amplitud 13.

b. Halla la media, la mediana y la moda de los datos.

Medidas de dispersión

Resolución de problemas

10 En una serie de datos, se sabe que $\overline{x} = 23{,}4$ y $s = 6{,}2$. Calcula el coeficiente de variación y exprésalo como porcentaje. ACTIVIDAD DE REFUERZO

11 ¿La desviación típica de una distribución estadística puede ser cero? Indica cómo serían los datos de la distribución en ese caso. PREGUNTA ABIERTA

Técnicas de conteo

Ejercitación

12 Escribe todos los números de dos cifras que se pueden formar utilizando los dígitos de cada conjunto. Explica la estrategia de conteo que utilices. PREGUNTA ABIERTA

a. $A = \{2, 4, 6, 8\}$

b. $B = \{1, 4, 3, 2, 9, 5\}$

Modelación

13 Propón un ejemplo de un experimento aleatorio que tenga 36 resultados diferentes. PREGUNTA ABIERTA

Resolución de problemas

14 Al girar una ruleta puede salir como resultado cualquier número natural comprendido entre el 0 y el 36 (ambos inclusive). Si se gira la ruleta tres veces, ¿cuántos resultados pueden obtenerse? ACTIVIDAD DE REFUERZO

Probabilidad de sucesos

Comunicación

15 Se escriben todas las letras de la palabra *murciélago* en tarjetas y se introducen en una urna. Determina si las afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V). VERDADERO/FALSO

a. La cantidad de eventos favorables para el evento *vocal a* es 1. ( )

b. La probabilidad de sacar una vocal es igual a la de sacar una consonante. ( )

c. La probabilidad de sacar una vocal es 0,1. ( )

d. Es imposible obtener una letra b. ( )

e. Es seguro obtener una consonante. ( )

Glosario

A

Aleatorio. Experimento que puede dar lugar a varios resultados que no pueden predecirse con anticipación.

Altura de una pirámide. Segmento que va desde el vértice hasta el plano de la base y es perpendicular a este.

Ángulos alternos externos. Ángulos que se forman en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos alternos internos. Ángulos que se forman internamente, en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos opuestos por el vértice. Ángulos que tienen un vértice común, y los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

B

Baricentro. Punto en que concurren las medianas de un triángulo.

Binomio. Expresión algebraica que tiene dos términos.

Bisectriz. Recta que pasa por el eje de simetría de un ángulo.

C

Circuncentro. Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Coeficiente. Constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cuadrado perfecto. Número que se obtiene al elevar otro número al cuadrado o a la dos.

D

Decimal periódico. Número cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

Desigualdad. Relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es el mayor o el menor.

Dominio. Conjunto compuesto por los primeros componentes de los pares ordenados de una función.

E

Ecuación lineal. Ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales, x representa la incógnita y $a \neq 0$.

Esfera. Es un sólido tal que todos los puntos de su superficie están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Espacio muestral. Conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento. Cualquier subconjunto de un espacio muestral.

Eventos dependientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, su probabilidad.

Eventos independientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, no afecta su probabilidad.

Expresión algebraica irracional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

Expresión algebraica racional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

F

Fracción algebraica. Es el cociente entre dos polinomios.

Fracción compleja. Es aquella fracción cuyo denominador o numerador, o ambos, presentan una fracción.

Frecuencia relativa. Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de veces que se realiza el experimento estadístico.

Función. Regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B.

Función afín. Función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes.

Frecuencia cuadrática. Ecuación polinómica de segundo grado, del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes a, b y c son números reales. La representación de la función equivale a una parábola.

Función lineal. Función de la forma $y = mx$, donde m es una constante.

I

Incentro. Punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Inecuación. Relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

L

Logaritmo. Se define como logaritmo en base a de un número b, a otro número c tal que a elevado al exponente c da como resultado el número a: $\text{Log}_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

M

Media aritmética. Promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Mediana (estadística). Valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

Medidas de tendencia central. Valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Moda. Valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

N

Notación científica. Forma de escribir un número como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Número irracional. Número que no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros.

Número racional. Número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros siempre y cuando el divisor sea diferente de 0.

Números reales. Unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales.

O

Ortoedro. Es el paralelepípedo recto de base rectangular.

Paralelepípedo. Prisma de seis caras con forma de paralelogramos. Cuando todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo es recto.

Pendiente. En la recta dada por la ecuación $y = mx + b$, el valor m corresponde a una constante diferente de cero, denominada pendiente.

Polígono cóncavo. Es aquel en el que la recta que pasa por uno o más lados corta a otro lado del polígono.

Polígono convexo. Es aquel cuyos lados interiores son menores que 180º. Además, la recta que pasa por cualquiera de los lados no corta a ningún otro lado del polígono.

S

Sistemas de ecuaciones lineales. Conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas. El conjunto de parejas ordenadas que satisfacen ambas ecuaciones se denomina conjunto solución del sistema.

T

Teorema. Proposición que afirma una verdad demostrable.

Teorema de Pitágoras. Teorema que establece que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Término. Cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Triángulo acutángulo. Triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

Triángulo equiángulo. Triángulo cuyos ángulos interiores tienen igual medida.

Triángulo equilátero. Triángulo que tiene todos los lados iguales.

Triángulo escaleno. Triángulo que tiene todos los lados diferentes.

Triángulo isósceles. Triángulo que tiene dos lados iguales.

Triángulo obtusángulo. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo rectángulo. Triángulo que tiene un ángulo recto.

Triángulos congruentes. Triángulos en los que hay una correspondencia entre sus vértices, de modo que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

V

Valor absoluto. El valor absoluto de un número real c se simboliza $|c|$ y se define como:

Valor numérico de un monomio. Número que se obtiene al sustituir las letras por números.

Variable algebraica. Cada una de las letras distintas que aparecen en una expresión.

Variable dependiente. Variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable independiente.

Variable independiente. Variable a la cual se asignan valores arbitrarios en una función.

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático.* Barcelona: Gedisa, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A. Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis, 1995.
- Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones.* Madrid: Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. Madrid: Síntesis, 1997.
- Clemens *et al. Geometría* Serie Awli. México: Pearson, 1998.
- De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad.* Málaga: Ágora, 1990.
- Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Labor, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid: Pearson-Addison Wesley V. A. M, 1994.
- Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente.* Barcelona: Gedisa, 1995.
- Jouette, André. *El secreto de los números.* Bogotá: Intermedio, 2002.
- Küchemann, D. "The meaning children give to the letters in generalised arithmetic." En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds (2002): 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica.* México: Harla, S. A. de C.V., 1972.
- Mason, J.; Burton, L., y Stacey, K. *Pensar matemáticamente.* Barcelona/Madrid: Labor/MEC, 1992.
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá, 1998.
- Moise, Edwin, y Downs, Floyd. *Geometría moderna.* Addison Wesley, 1966.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa.* Moscú: Mir, 1986.
- Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II.* México: Compañía Editorial Continental S. A., 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría.* México: McGraw-Hill, 1991.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes, y Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra.* México: Síntesis, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística.* México: McGraw-Hill, 1975.
- Suppes, Patrick, y Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática.* Bogotá: Reverté, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* México: Thomson Editores, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba.* México: Limusa, 1988.
- Zill, Dennis, y Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría.* México: McGraw-Hill, 2000.