Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

9

Vamos a aprender

es el proyecto en el que los estudiantes se convierten en protagonistas de su proceso de formación. Por medio de materiales que motivan a estudiar y a participar de forma activa, se consigue un aprendizaje eficaz y significativo.

Los contenidos se relacionan con el entorno más inmediato y trabajan competencias esenciales para poder desarrollar las habilidades que la vida exija el día de mañana.

El proyecto es una apuesta por el desarrollo integral de los estudiantes. Junto con una sólida formación académica, proporciona herramientas de reflexión y análisis de la sociedad en la que vivimos por medio de sus temas de Educación ambiental, Estilos de vida saludable y Educación para la sexualidad y la ciudadanía.

Aprendiendo a convivir de manera armónica, lograremos todos juntos que el colegio llegue a ser un espacio de crecimiento que nos haga mejores y en el que todos queramos estar.

Así que es hora de comenzar y aceptar el reto:

¡Vamos a aprender!

Libro de distribución gratuita

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Vamos a aprender

Matemáticas

Libro del estudiante

9

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Juan Manuel Santos Calderón

MINISTRA DE EDUCACIÓN NACIONAL
Yaneth Cristina Giha Tovar

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Víctor Javier Saavedra Mercado

DIRECTORA DE CALIDAD DE EDUCACIÓN PREESCOLAR, BÁSICA Y MEDIA
Paola Andrea Trujillo Pulido

SUBDIRECTOR DE FOMENTO DE COMPETENCIAS
Alfredo Olaya Toro (E)

SUBDIRECTORA DE REFERENTES Y EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
María Claudia Sarta Herrera

EQUIPO DE MATERIALES PEDAGÓGICOS
COORDINADORA: Angélica Ortega Santacruz
PROFESIONALES: Deyanira Alfonso Sanabria, Edna Maritza Corredor Suárez, Diana Patricia Tobón Maldonado, Andrés Alberto Andrade Ceballos

EQUIPO TÉCNICO DE MATEMÁTICAS
ASESORA: Yadira Sanabria Mejía
PROFESIONALES: Jenny Andrea Blanco Guerrero, Guillermo Andrés Salas Rodríguez, Jairo Aníbal Rey Monroy

EQUIPO TÉCNICO EVALUADOR DE MATERIALES MATEMÁTICAS
Ricardo Cañón Moreno, María Isabel Noreña, Diana Velásquez Rojas, Ana Celia Castiblanco Paiba, María Beatriz Rocha

EQUIPO PROGRAMAS TRANSVERSALES Y COMPETENCIAS CIUDADANAS
COORDINADORA: Olga Lucía Zárate Mantilla
PROFESIONALES: Francine Botero Garnica, Sandra Patricia Mora Varela, Juan Camilo Caro Daza

EQUIPO EDICIONES SM

EDITORES
Leidi Gil Fuentes, Deysi Roldán Hernández, Josué Malagón Montaña

COLABORADORES
Víctor Hernando Ardila Gutiérrez, Andrés Camilo Carrillo Acosta, Mario Alberto Cañón Gutiérrez, Miguel Ángel Alfonso Orozco, John Álvaro Munar Ladino.

COORDINADOR DE CORRECCIÓN
Rafael Humberto Castro Fernández

CORRECCIÓN DE ESTILO
Claudia Martínez, Catalina Rozo

GERENTE DE ARTE Y DISEÑO
Leonardo Rivas Agudelo

COORDINACIÓN DE DISEÑO
Elkin Vargas Bohórquez

DISEÑO DE LA SERIE
Elkin Vargas Bohórquez, Magaly Duque Santos, Liliana Bohórquez Algecira, Ana Lilly Pardo Beltrán

DISEÑO DE CUBIERTA
Juan Camilo López Rojas

DIAGRAMACIÓN
Alexandra León Ruíz, Rafael Niebles Montoya, Alejandro Bohórquez Rodríguez, Diego Camacho Arciniegas, Milena Buenaventura

FOTOGRAFÍA
Archivo SM / Ángel Camacho Linares / Rafael Niebles / Wikimedia Commons / Shutterstock.com / A.RICARDO / Andrey Khrolenok / Radu Razvan / Giuseppe Costantino /Kaliva /Teddy Leung / Zeynep Demir /Anthony Hall / rmnoa357 / Luckies /Chones /

RETOQUE DIGITAL
Ángel Camacho Linares, Mario Alarcón Orozco, Kenny Bacares Fonseca, Fernando Amézquita Quintana

Carrera 85 K N° 46 A - 66
Bogotá, D. C., Colombia
ISBN 978-958-780-188-0

IMPRESIÓN
Impreso en Colombia / *Printed in Colombia*
Impreso en Quad/Graphics

PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

MINEDUCACIÓN

sm

TODOS POR UN NUEVO PAÍS
PAZ EQUIDAD EDUCACIÓN

Presentación

Aceptar el reto de hacer de Colombia la nación más educada de América Latina en el 2025 es una decisión que genera una gran responsabilidad. La necesidad de no perder ni un segundo en el camino hacia la calidad es un llamado urgente a rectores, docentes y padres de familia que se levantan cada mañana comprometidos con el futuro de miles de estudiantes.

Lograr una educación de calidad es el objetivo que nos hemos trazado para construir un país con igualdad de oportunidades para todos y en paz. Una igualdad que no sólo contempla el derecho que cada uno de los colombianos tiene a la educación, sino que se refuerza en la idea de equilibrar la cancha de juego y hacer que todos nuestros niños, niñas y adolescentes tengan las mejores condiciones en los colegios, incluyendo materiales pedagógicos de alta calidad que contribuyan al fortalecimiento de su proceso de aprendizaje.

Como Ministerio sabemos que la excelencia educativa se gesta en el aula, y es allí donde se deben concentrar todos los esfuerzos de transformación. Por esto, dotar de herramientas pedagógicas suficientes e idóneas que acompañen y refuercen la práctica en el salón de clase, es la forma en la que se hará visible el esfuerzo de un equipo de rectores y docentes pioneros comprometidos con el mejoramiento de la calidad en la educación.

Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional presenta el siguiente material de apoyo para el proceso pedagógico de enseñanza de lenguaje y matemáticas, de alta calidad. Este material ha sido seleccionado de manera juiciosa por expertos, para que docentes y estudiantes lo incorporen a la práctica de aula, los trabajen, los disfruten con su familia, aprendan con ellos y descubran un mundo de narraciones mágicas y problemas matemáticos que les dará paso a un nuevo universo de posibilidades.

Estos libros, cuadernos de trabajo y guías llegarán a los colegios y cobrarán vida en el aula gracias al compromiso y dedicación de cada uno de ustedes. Por esto es importante explorarlos, conocerlos y apropiarlos; con seguridad este será un paso más hacia nuestra meta de hacer de Colombia la más educada con ustedes como los protagonistas en este nuevo capítulo de su historia.

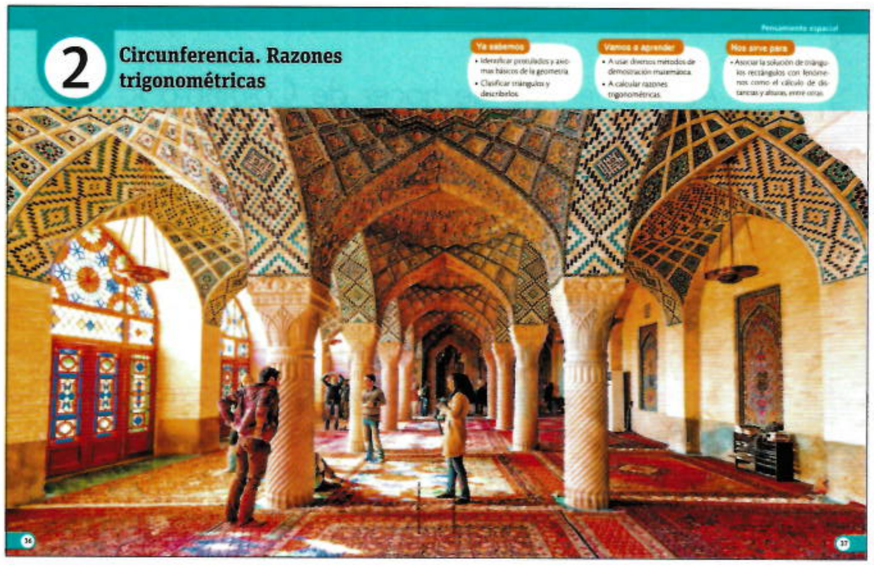
Sin lugar a duda, esta es una de las apuestas más importantes por el futuro del país.

Estructura de tu libro

Este libro está organizado en seis unidades o divisiones y, a su vez, cada unidad está dividida en temas o subdivisiones. Cada unidad está organizada de la siguiente manera:

Apertura de unidad

En esta doble página recordarás **aquello que ya sabes** y **conocerás lo que vas a aprender** y su aplicación en tu vida cotidiana.



Ruta didáctica

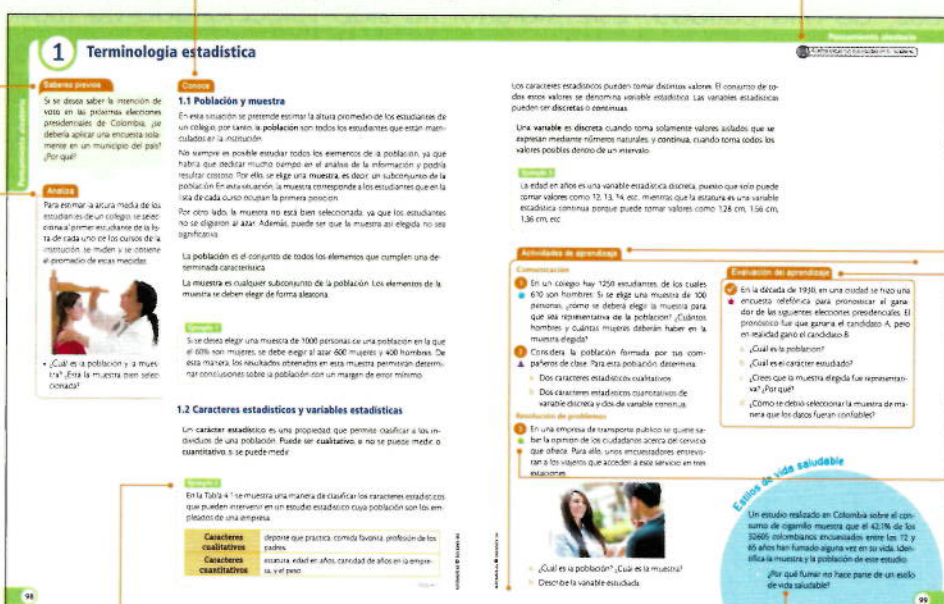
El desarrollo de todos los contenidos presenta la siguiente **ruta didáctica**.

Conoce
Desarrolla los contenidos del tema. Sintetiza los conceptos básicos que debes aprender.

Recuerda que estas actividades las debes realizar en tu cuaderno.

Saberes previos
Explora lo que ya sabes.

Analiza
Establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos, mediante una situación problema.



Actividades de aprendizaje
Aplica y refuerza lo que has aprendido.

Evaluación del aprendizaje
Evalúa tus conocimientos.

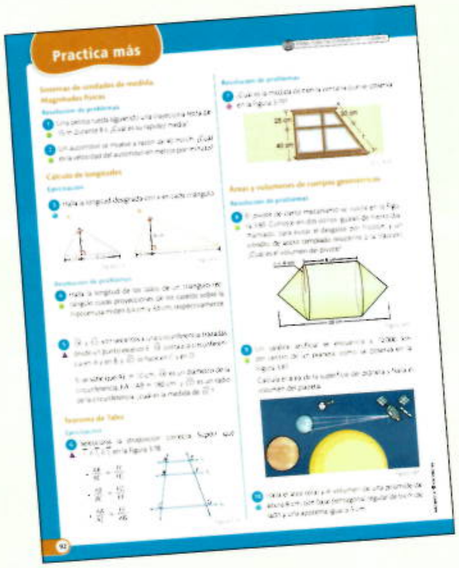
Procesos cognitivos
- Memoria
- Comprensión
- Análisis
- Aplicación
- Síntesis
- Evaluación

Ejemplos
Confirma la aplicación inmediata de los conceptos explicados.

Temas transversales

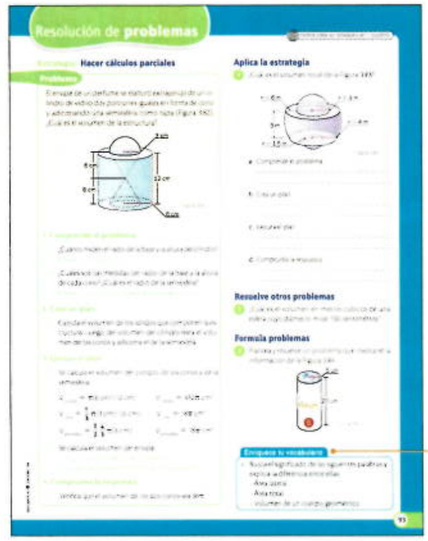
Practica más

Resuelve **más actividades** relacionadas con los temas de la unidad y **desarrolla las habilidades** propias de la actividad matemática.



Resolución de problemas

Resuelve problemas con el uso de diferentes estrategias. Sigue el **ejemplo resuelto** como guía y pon en práctica la estrategia estudiada.

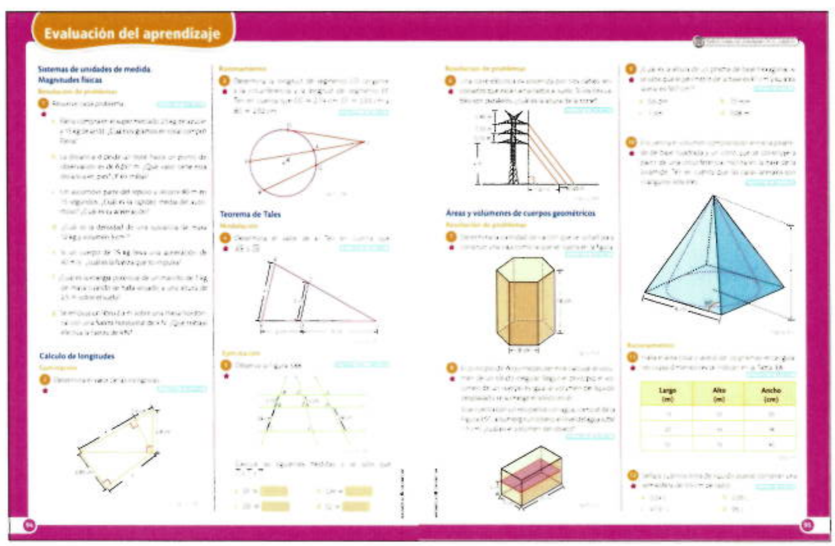


Enriquece tu vocabulario

Amplía tu vocabulario matemático.

Evaluación del aprendizaje

En esta sección tendrás la oportunidad de **aplicar los temas vistos** y **reforzar tus conocimientos**.



Temas transversales

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Con este tema desarrollarás competencias para **ejercer, respetar y promover los derechos humanos**, los cuales están presentes en tus relaciones cotidianas.

Educación ambiental

Plantea actividades, ejemplos y situaciones en las que podrás reflexionar sobre las **relaciones entre el individuo y su entorno natural**, como proceso interactivo, y **la protección y el cuidado** de los recursos naturales y los seres vivos.

Estilos de vida saludable

Presenta actividades, ejemplos y situaciones con las cuales aprenderás a **tomar decisiones sobre tu salud y tu bienestar** físico, emocional e intelectual, tanto individual como colectivo.

Contenido Matemáticas 9

1

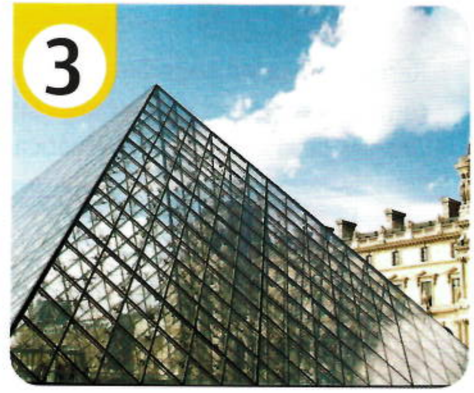
Pensamiento numérico

Números reales

2

Pensamiento espacial

Circunferencia. Razones trigonométricas



3

Pensamiento métrico

Longitudes, áreas y volúmenes

Pensamiento aleatorio

4 Estadística y probabilidad

Pensamiento variacional

5 Función lineal. Sistemas de ecuaciones

Pensamiento variacional

6 Funciones

1 Números reales

Ya sabemos

- Identificar, representar y ordenar números racionales e irracionales.

Vamos a aprender

- A caracterizar el conjunto de números reales y representarlos en la recta numérica.

Nos sirve para

- Interpretar datos numéricos del mundo real.
- Reconocer las diferentes formas de representar un número.

1 Números racionales y números irracionales

Saberes previos

Escribe ejemplos de situaciones cotidianas en los que utilices números naturales, números enteros y números decimales.

Analiza

Cada una de las seis caras del cubo de Rubik está compuesta por nueve cuadrados con los colores blanco, amarillo, rojo, azul, naranja y verde (Figura 1.1).

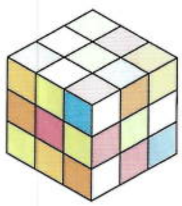


Figura 1.1

- La solución del rompecabezas consiste en que, al final, los cuadrados de cada cara sean del mismo color. ¿Qué parte del total representan los cuadrados que forman cada cara del cubo solucionado?

Conoce

1.1 El conjunto de los números racionales

Como el cubo consta de seis caras, y cada cara contiene nueve cuadrados, en total el cubo tiene $6 \cdot 9 = 54$ cuadrados.

De acuerdo con lo anterior, la parte del total de cuadrados que representan los que forman cada cara del cubo, es:

$\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$ $\frac{9}{54}$

El número $\frac{9}{54}$ es un **número racional**.

Un **número racional** se expresa de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y q es distinto de cero.

El conjunto de los **números racionales** $\mathbb{Q}$ se determina así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Ejemplo 1

El número -957 pertenece al conjunto de los números racionales porque puede escribirse de la forma $\frac{p}{q}$, donde el denominador de esta fracción es el número 1.

$$-957 = \frac{-957}{1}$$

1.2 El conjunto de los números irracionales

Todo **número irracional** tiene una expresión decimal infinita no periódica. El conjunto de los números irracionales se simboliza con $\mathbb{I}$.

En otras palabras, los números irracionales no se pueden escribir de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$.

Ejemplo 2

Los números $\sqrt[5]{4}$, π, e, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt{5}$, φ pertenecen al conjunto de los números irracionales, porque su expresión decimal es infinita no periódica:

$\sqrt[5]{4} = 1{,}31950791\ldots$ $\qquad \pi = 3{,}141592653\ldots$

$e = 2{,}7182818284\ldots$ $\qquad \sqrt[4]{2} = 1{,}189207115\ldots$

$\sqrt{5} = 2{,}2360679774\ldots$ $\qquad \varphi = 1{,}618033988749\ldots$

Ejemplo 3

Según su origen, los números irracionales se clasifican en algebraicos o trascendentes. Observa la Tabla 1.1.

Clase	Ejemplos	
Número irracional algebraico Es solución de alguna ecuación polinómica cuyos coeficientes son números racionales.	El número áureo, representado por la letra griega phi.	$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
	Las raíces no exactas.	$\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{21}$
Número irracional trascendente No es solución de ninguna ecuación polinómica de coeficientes racionales.	El número pi es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.	π
	La constante de Euler o constante de Napier.	e

Tabla 1.1

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Lee cada afirmación y escribe F, si la proposición es falsa o V, si es verdadera.

a. Todo número irracional puede escribirse de la forma $\dfrac{p}{q}$.

b. Los números irracionales trascendentes se ubican con exactitud en la recta numérica con aproximaciones decimales.

c. Todo número racional puede expresarse de forma decimal.

d. El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números naturales.

e. El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los números naturales.

Comunicación

2 Consulta cómo se clasifican las expresiones decimales de una fracción.

Escribe dos fracciones cuya expresión decimal corresponda a cada tipo de decimal.

Resolución de problemas

3 El largo y ancho de una piscina olímpica es 50 m y 25 m, respectivamente. Si un nadador quiere recorrerla en diagonal, ¿qué distancia recorre? ¿A qué conjunto numérico pertenece este valor?

Evaluación del aprendizaje

Marca con una X la casilla que corresponda, según los números sean racionales o irracionales.

	Es número racional	Es número irracional
$2\sqrt[3]{6}$		
$-\dfrac{4}{5}$		
$55,\widehat{03}$		
-103		
π		
4,678		
$-345,231409...$		

Tabla 1.2

2 Números reales

Saberes previos

Dados los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ determina la unión y la intersección, y escribe si se cumple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$.

Analiza

La unión de los conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ forma el conjunto de los números reales.

- Haz un diagrama detallado que resuma la relación que existe entre los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

Conoce

2.1 El conjunto de los números reales

El diagrama que representa la relación que existe entre los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ y la formación del conjunto de los números reales se presenta en la Figura 1.2.

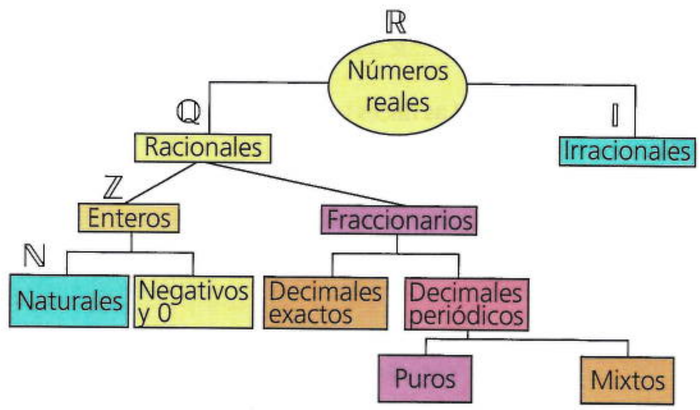


Figura 1.2

Los **números reales** son el resultado de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Se simboliza con $\mathbb{R}$.

2.2 Propiedades de las relaciones de orden

Para a, b y c números reales, se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad 1 (transitiva)	Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
Propiedad 2	Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Propiedad 3	Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
Propiedad 4	Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
Propiedad 5	Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
Propiedad 6	Si $a \cdot b < 0$, entonces: $a > 0$ y $b < 0$, o $a < 0$ y $b > 0$.
Propiedad 7	Si $a \cdot b > 0$, entonces: $a > 0$ y $b > 0$, o $a < 0$ y $b < 0$.
Propiedad 8	Si $a > b$, $a > 0$ y $b > 0$ entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Tabla 1.3

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

Observa la propiedad que se aplicó en cada caso.

- Si $-2 < 3$ y $3 < 5$, entonces $-2 < 5$. Esta corresponde a la propiedad transitiva de las relaciones de orden de los números reales (Propiedad 1).
- Si $e < \pi$, entonces $e + 3 < \pi + 3$. Al sumar un mismo número real en ambos miembros de la desigualdad, esta se mantiene (Propiedad 2).
- Si $-5 < 7$ y $9 > 0$, entonces se cumple que $(-5) \cdot 9 < 7 \cdot 9$, pues $-45 < 63$. La Propiedad 3 indica que al multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, la desigualdad se mantiene.
- Si $-5 < 7$ y $-9 < 0$, entonces $(-5) \cdot (-9) > 7 \cdot (-9)$, es decir $45 > -63$. Como se multiplicó por un número negativo, la desigualdad cambió de sentido (Propiedad 4).
- Si $8 < 11$ y $-5 < 3$, entonces $8 + (-5) < 11 + 3$, ya que $3 < 14$. Cuando se suman los términos respectivos de dos desigualdades, la desigualdad no cambia (Propiedad 5).
- Si $-21 < 0$, $(-7) \cdot 3 = -21$ o $7 \cdot (-3) = -21$. Por la Propiedad 6 se tiene que alguno de los factores de -21 es positivo y otro es negativo.
- Si $55 > 0$, $(-5) \cdot (-11) = 55$ o $5 \cdot 11 = 55$. Por la Propiedad 7 se tiene que los dos factores de 55 son ambos positivos o ambos negativos.
- Por la Propiedad 8, como $13 < 17$ y, además, $13 > 0$ y $17 > 0$, entonces $\frac{1}{13} > \frac{1}{17}$.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Escribe $\in$ o $\notin$ para establecer la relación de cada número con el conjunto numérico dado.

a. $\frac{4}{7}$ ☐ $\mathbb{I}$

b. 78,2333... ☐ $\mathbb{Z}$

c. 0,4352... ☐ $\mathbb{I}$

d. 6π ☐ $\mathbb{Z}$

e. 46,89 ☐ $\mathbb{R}$

f. $\frac{87}{5}$ ☐ $\mathbb{R}$

Resolución de problemas

2. Manuela necesita distribuir 27 libros entre cuatro personas de manera equitativa. ¿Cuál sería la mejor manera de repartirlos y por qué?

Evaluación del aprendizaje

Completa las expresiones con los signos $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

a. Si $\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} + 5$ ☐ $2 + 5$.

b. Si $2 > \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$ ☐ 2.

Estilos de vida saludable

En promedio, la densidad de la sangre de una persona sana es de 1,05588 g/mL y la de una persona alcohólica de 1,06133 g/mL. Compara estos valores y da una conclusión al respecto.

- ¿Qué consecuencias trae el alcohol a nuestro cuerpo?

3 La recta real

Saberes previos

Construye una recta numérica en tu cuaderno y representa en ella los números -2; $-0{,}5$; 0, y 4. Describe el procedimiento.

Analiza

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta numérica.

- ¿Qué relación hay entre los números reales y los puntos de la recta real?

Conoce

Para construir la recta real (Figura 1.3) se traza una recta y se siguen estos pasos:

- Se ubica un punto de referencia arbitrario llamado **origen,** al cual le corresponde el número real **0**. A partir de este, se definen dos sentidos opuestos, uno positivo y otro negativo.
- Se elige una unidad de longitud para medir distancias en ambos sentidos de la recta. Cada número positivo m se representa por un punto en la recta a una distancia de m unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ se representa mediante un punto a una distancia de x unidades a la izquierda del origen.
- Las flechas a izquierda y derecha de la recta significan que el conjunto de los números reales es infinito.

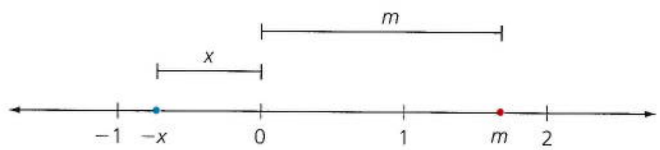


Figura 1.3

A cada número real le corresponde un **único punto** sobre la recta y a cada punto en la recta real se le asocia un **único número real**. Entre dos números reales hay infinitos números reales.

Ejemplo 1

Los números reales $-\sqrt[5]{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{5}, \frac{e}{2}, \sqrt{2}$, ubicados en la recta real (Figura 1.4) están ordenados así:

- El número $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$, lo cual indica que $-\frac{4}{5}$ está ubicado sobre la recta real a la izquierda de $-\frac{1}{2}$.
- El número $\sqrt{2} > \frac{e}{2}$, entonces $\sqrt{2}$ está ubicado a la derecha de $\frac{e}{2}$.
- El número $-\sqrt[5]{3} \leq -\sqrt[5]{3}$, esto significa que $-\sqrt[5]{3}$ cumple alguna de las siguientes posibilidades $-\sqrt[5]{3} < -\sqrt[5]{3}$, o $-\sqrt[5]{3} = -\sqrt[5]{3}$. En este caso se cumple la relación de igualdad ($=$).

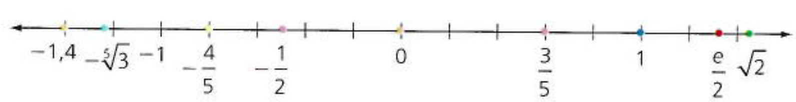


Figura 1.4

3.1 Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a se simboliza con $|a|$ y es la distancia que hay desde a hasta 0 sobre la recta real.

Ejemplo 2

En la Figura 1.5 se representa en la recta real el significado del valor absoluto de los números -3 y 5.

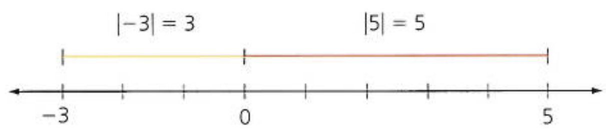


Figura 1.5

Para simplificar expresiones con valor absoluto es necesario utilizar las propiedades que se definen en la Tabla 1.4. Allí, los valores de a y b son reales.

Propiedad		Ejemplos
1. El valor absoluto de un número nunca es negativo.	$\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -8 \rvert = 8 \geq 0$
2. Un número y su inverso aditivo tienen siempre el mismo valor absoluto.	$\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 35{,}6 \rvert = \lvert -35{,}6 \rvert$
3. El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.	$\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -4 \cdot 9 \rvert = \lvert -4 \rvert \lvert 9 \rvert$
4. El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \frac{-12}{7} \right\rvert = \frac{\lvert -12 \rvert}{\lvert 7 \rvert}$

Tabla 1.4

Si a y b son números reales y $a < b$, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta real es $|b - a|$.

Ejemplo 3

Para hallar la distancia entre los números -2 y 11, se calcula el valor absoluto de la resta del número mayor con el número menor, así:

$$|11 - (-2)| = |13| = 13$$

La distancia entre los números -2 y 11 es 13.

3.2 Intervalos, semirrectas y entornos

Un **intervalo** es un subconjunto de números reales que se corresponden con los puntos de un segmento o una **semirrecta** en la recta real.

La clasificación de los intervalos se presenta en la Tabla 1.5, donde los valores de a y b son reales.

Nombre	Notación	Conjunto	Gráfica
Intervalo abierto	(a, b)	$\{x/a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	$[a, b]$	$\{x/a \leq x \leq b\}$	
Intervalo semiabierto	$[a, b)$	$\{x/a \leq x < b\}$	
	$(a, b]$	$\{x/a < x \leq b\}$	
Intervalo infinito	(a, ∞)	$\{x/x > a\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x/x \geq a\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x/x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x/x \leq b\}$	
	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Tabla 1.5

Se llama **entorno** de centro a y radio r, y se simboliza $E_r(a)$ o $E(a, r)$ al intervalo abierto $(a - r, a + r)$.

Ejemplo 4

El entorno $E_3(1)$ de centro 1 y radio 3 se representa por el intervalo abierto: $(1 - 3, 1 + 3) = (-2, 4)$. Observa la Figura 1.6.

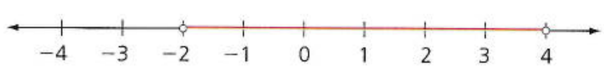


Figura 1.6

Ejemplo 5

Un sismo se considera fuerte, según la escala de Richter, si tiene una magnitud mayor o igual a 6 y menor que 6,9. Esto se representa con un intervalo semiabierto, cuya notación es $[6; 6{,}9)$. El conjunto correspondiente es $\{x/6 \leq x < 6{,}9\}$ y su representación gráfica corresponde a la Figura 1.7.

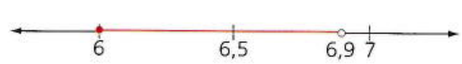


Figura 1.7

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el valor de las expresiones con valor absoluto.

a. $|5-\pi|$ b. $||-10|-|-4||$

c. $|\sqrt{5}-5|$ d. $|-4|$

e. $\dfrac{|-1|}{-1}$ f. $\left|\dfrac{8-13}{15-7}\right|$

g. $|-15\cdot 8|$ h. $|35\cdot 2\cdot -9|$

2 Determina la distancia entre cada par de números.

a. -5 y 17 b. $-3{,}8$ y $2{,}4$

c. $\dfrac{3}{5}$ y $-\dfrac{1}{2}$ d. $-345{,}67$ y $2\,986{,}21$

e. $-\dfrac{56}{9}$ y $-\dfrac{5}{6}$ f. $8\,546$ y $-1\,234$

g. -23 y 14 h. $3{,}45$ y $1{,}45$

3 Expresa en forma de intervalo los entornos.

a. $E_4(-2)$ b. $E_2(5)$

c. $E_3(10)$ d. $E_5(-3)$

e. $E_1(-7)$ f. $E_6(1)$

4 Representa en la recta real el siguiente conjunto de números reales.

$$\left\{\sqrt[3]{-8}, -\frac{5}{8}, \frac{28}{99}, \sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, -\frac{e}{2}, -1\right\}$$

5 Realiza la gráfica de los siguientes intervalos.

a. $\{x/x \geq -4\}$ b. $\left(-\sqrt{2}, \dfrac{3}{4}\right]$

c. $\left[-\sqrt[5]{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ d. $\{x/1{,}5 \leq x \leq 3{,}56\}$

e. $\{x/x < -6{,}7\}$ f. $\left(\dfrac{13}{4}, \infty\right)$

6 Representa en la recta real cada pareja de números y escribe $>$, $<$ o $=$, según corresponda.

a. $-5{,}4$ ☐ $-3{,}8$ b. $-1{,}2$ ☐ $2{,}3$

c. $-\dfrac{5}{6}$ ☐ $-\dfrac{10}{12}$ d. $\dfrac{3}{5}$ ☐ $1{,}6$

e. $-0{,}91$ ☐ $-\dfrac{7}{3}$ f. $-\dfrac{1}{4}$ ☐ $2{,}3$

Resolución de problemas

7 Un nutricionista hace un plan de alimentación para que un paciente mantenga su peso normal entre 56,6 kg y 61,5 kg máximo.

a. Haz una gráfica del intervalo del peso normal.

b. Expresa la proposición mediante la notación de intervalo y de conjunto.

c. Si el paciente actualmente pesa 75,4 kg, ¿cuántos kilogramos debe perder el paciente para alcanzar el promedio del peso normal?

Evaluación del aprendizaje

i En la notación de conjunto para un intervalo, la expresión $a < x \leq b$ se llama *desigualdad*. ¿Cuál es la desigualdad que representa al intervalo $(-23, 56]$? Explica tu respuesta.

ii Expresa cada proposición mediante la notación de intervalo y de conjunto.

a. Los niveles normales de glucosa en ayunas en un ser humano deben ser mayores o iguales que 70 mg/dL y menores que 100 mg/dL.

b. El tiempo que tarda una persona en llegar a su trabajo es mayor que $\dfrac{5}{6}$ h y menor o igual que $\dfrac{3}{2}$ h.

c. La estatura de los jugadores de un equipo de baloncesto es menor que 1,98 m y mayor o igual que 1,82 m.

Educación ambiental

El pH del agua es un indicador de su acidez. El agua pura tiene un pH de 7 y el agua potable puede tener valores de 6,5 a 9. Expresa la proposición mediante la notación de intervalo y conjunto, y haz una gráfica del intervalo de pH.

- ¿Crees que la contaminación del agua puede incidir en su pH? Justifica.

4 Operaciones con números reales

Saberes previos

Siempre que restas dos números naturales, ¿obtienes un número natural?

Analiza

El cráter producido por un meteorito en la superficie de cierto planeta deja una cresta de $9\sqrt{3}$ m de altura y presenta una profundidad máxima de $20\sqrt{3}$ m, como se muestra en la Figura 1.8.

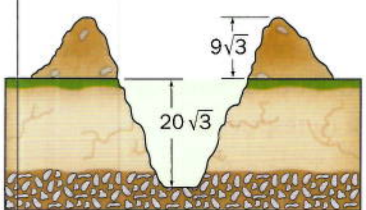


Figura 1.8

- ¿Cuánto debe medir el largo de una broca para abrir un hueco desde la cresta hasta el punto más profundo del cráter?

Conoce

Para calcular la longitud de la broca, es necesario calcular la suma entre las longitudes dadas. Esto es:

$$9\sqrt{3} + 20\sqrt{3} = 29\sqrt{3}$$

Entonces, el largo de la broca debe medir $29\sqrt{3}$ m.

En el anterior problema se observa que tanto los datos como la respuesta pertenecen a los números reales; es decir, que las operaciones de tipo aditivo entre reales cumplen con la propiedad clausurativa. A continuación se estudian otras propiedades de las operaciones con números reales.

4.1 Adición y sustracción de números reales

En la expresión $a + b = c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$, a y b son los **sumandos** y c es la **suma**.

En la expresión $a - b = d$, con a, b y $d \in \mathbb{R}$, a es el **minuendo**, b es el **sustraendo** y c es la **diferencia**. Esta operación es equivalente a la adición $a + (-b)$.

De forma general, para a, b y $c \in \mathbb{R}$ se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización
Clausurativa	$(a + b) \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$a + b = b + a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Modulativa	Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$
Invertiva	Para todo número real a existe $-a$, tal que $a + (-a) = 0$

Tabla 1.6

Ejemplo 1

Un turista se encuentra en el punto A y se dirige hasta el punto B. Para ello, tiene que desplazarse por diferentes trayectos cuyas distancias son: $40\sqrt{5}$ m, 20 m, $5\sqrt{5}$ m, $60\sqrt{3}$ m, 12 m y $12\sqrt{3}$ m, respectivamente.

La distancia total que recorre el turista está dada por la adición. Observa:

$$40\sqrt{5} + 20 + 5\sqrt{5} + 60\sqrt{3} + 12 + 12\sqrt{3} =$$

$$\left(40\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right) + (20 + 12) + \left(60\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) =$$

$$45\sqrt{5} + 32 + 72\sqrt{3} \approx 257{,}33072$$

Aproximando por truncamiento a la décima, se obtiene: 257,3.

Entonces, el turista debe recorrer aproximadamente 257,3 m en total.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

4.2 Multiplicación y división de números reales

En la expresión $a \cdot b = p$, con a, b y $p \in \mathbb{R}$, a y b son los **factores** y p es el **producto**. Se utilizan expresiones alternas para indicar el producto; estas son:

$$a \cdot b = a \times b = (a)(b) = ab$$

En la expresión $a \div b = c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$, a es el **dividendo**, b es el **divisor** y c es el **cociente**.

De forma general, para a, b y $c \in \mathbb{R}$ se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización
Clausurativa	$(a \cdot b) \in \mathbb{R}$
Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Modulativa	Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
Invertiva	Para todo real a existe a^{-1}, tal que $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Tabla 1.7

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1. Encuentra una expresión numérica para el área de cada figura.

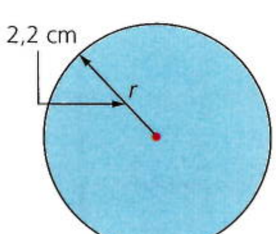


Figura 1.9

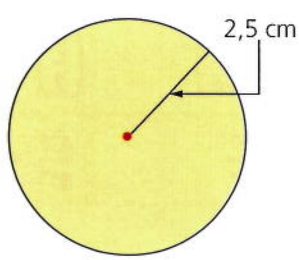


Figura 1.10

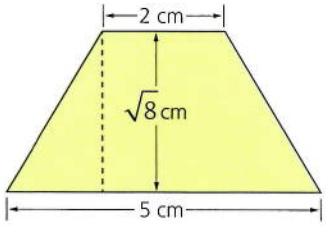


Figura 1.11

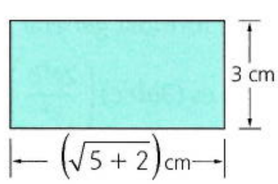


Figura 1.12

a. ¿Cuál es la figura con mayor área?

b. ¿Cuál es la figura con menor área?

2. La longitud de una circunferencia se expresa con un número irracional. Indica el valor que debe tener el radio de una circunfrencia para que la longitud sea un número racional. Justifica tu respuesta.

Evaluación del aprendizaje

i. Halla la arista de un cubo si se sabe que tiene una capacidad de 2 000 L.

ii. Indica la propiedad que se debe usar en cada caso.

Ejercicio	Propiedad
$\dfrac{3}{5\pi} - \dfrac{3}{5\pi} = 0$	
$\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \left(\sqrt{35}\right) \cdot \sqrt{6} = \sqrt{210}$	
$\dfrac{7}{3} + 0 = \dfrac{7}{3}$	

Tabla 1.8

5 Potencias con exponente entero

Saberes previos

Dobla una hoja de papel por la mitad y cuenta las partes iguales que obtienes. Dóblala de nuevo por la mitad y cuenta las partes. Continúa el proceso y determina cuántas veces puedes doblar una hoja de papel por la mitad cada vez.

Analiza

Fernando y Luisa participan en un concurso de Matemáticas. En una de las pruebas deben justificar si la expresión $-5^2 = 25$ es verdadera. Fernando dice que la igualdad es correcta, mientras que Luisa dice que es falsa.

- ¿Quién tiene la razón y cuál es la justificación a esta respuesta?

Conoce

La igualdad $-5^2 = 25$ es falsa porque:

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

Lo anterior indica que el exponente 2 afecta solo al número 5 y que el signo $-$ se ubica luego de hallar la potencia. Por lo tanto, Luisa tiene la razón.

5.1 Propiedades de las potencias con exponente entero

Todo número real a elevado a un **exponente entero** negativo n, cumple que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Para simplificar expresiones donde estén presentes potencias con exponentes enteros, se utilizan las propiedades definidas en la Tabla 1.9. Las bases a y b son números reales y los exponentes m y n son números enteros.

	Propiedad	Ejemplo
1	$a^m a^n = a^{m+n}$	$(-3)^2(-3)^5 = (-3)^7$
2	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^{-5}}{2^4} = 2^{-5-4} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9}$
3	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(4^5)^7 = 4^{5 \cdot 7} = 4^{35}$
4	$(ab)^n = a^n b^n$	$(-6 \cdot 8)^2 = (-6)^2 \cdot 8^2$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{7}\right)^6 = \frac{3^6}{7^6}$
6	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
7	$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{4^{-2}}{3^{-9}} = \frac{3^9}{4^2}$

Tabla 1.9

Ejemplo 1

Un científico creó una fórmula general para modelar una situación real. La expresión que escribió es $(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$.

Para simplificar la expresión se utilizan las propiedades definidas en la Tabla 1.7.

$$(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2} = (3ab^2c)\left(\frac{c^3}{2a^2b}\right)^2 = (3ab^2c)\frac{(c^3)^2}{(2a^2b)^2} = \frac{3ab^2cc^6}{4a^4b^2} = \frac{3c^7}{4a^3}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula las siguientes potencias.

a. $(-3{,}5)^3$

b. $8^0 \cdot -\left(\frac{4}{3}\right)^2$

c. $-4^4 \cdot -2^5$

d. $(99^0 - 23{,}4)^2$

e. $\frac{3^{-2}}{9}$

f. 0^0

g. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

h. $10^2 \cdot 10^3$

i. $((-4)^2)^{-3}$

j. $\frac{-3^0}{(-3)^2}$

2 Simplifica cada una de las siguientes expresiones y elimina los exponentes negativos.

a. a^8a^{-4}

b. $(16x^2y^4)\left(\frac{1}{4}x^5y\right)$

c. $b^4\left(\frac{1}{3}b^2\right)(12b^{-8})$

d. $\frac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y}$

e. $\frac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$

f. $\left(\frac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\frac{d^2}{c^3}\right)^3$

3 Escribe los siguientes números como potencias cuyas bases sean números primos.

a. 8, 125, 243, 1 024, 2 401

b. $\frac{1}{625}, \frac{1}{343}, \frac{1}{256}, \frac{1}{81}, \frac{1}{32}$

Comunicación

4 Escribe la propiedad o definición que se utiliza en cada paso para simplificar la expresión $\left(\frac{36a^{-2}b^{-4}}{9a^{-2}b^{-3}}\right)^{-2}$.

$= (4a^{-2-(-2)}b^{-4-(-3)})^{-2}$

$= (4a^0b^{-1})^{-2}$

$= \left(4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b}\right)^{-2}$

$= \left(\frac{4}{b}\right)^{-2}$

$= \left(\frac{b}{4}\right)^2$

$= \frac{b^2}{4^2}$

$= \frac{b^2}{16}$

Razonamiento

5 Completa la Tabla 1.10.

Base	Exponente	Potencia
$-\frac{5}{3}$	3	$-\frac{125}{27}$
	-2	$\frac{1}{25}$
-101	0	

Tabla 1.10

Resolución de problemas

6 La edad de una micro bacteria J es de $\frac{1}{3^{-3}}$ días.

a. ¿Cuál es la edad total de tres micro bacterias?

b. Una micro bacteria M vive la tercera parte de la vida de la micro bacteria J. ¿Cuántos días vive la micro bacteria M?

7 En tecnología informática, un *kilobyte* tiene el tamaño de 2^{10} *bytes*. Un *gigabyte* es 2^{30} *bytes* en tamaño. El tamaño de un *terabyte* es el producto del tamaño de un *kilobyte* por un *gigabyte*. ¿Cuál es el tamaño de un *terabyte*?

Evaluación del aprendizaje

i Determina el signo de cada expresión, si *a*, *b* y *c* son números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$.

a. b^5

b. $(b - a)^4$

c. $\frac{a^5c^5}{b^6}$

d. $(b - a)^3$

ii Relaciona las expresiones equivalentes.

a. $\frac{3^{-1}}{5^{-1}}$ — ☐ 64

b. π^{-2} — ☐ $\frac{5}{3}$

c. $\frac{1}{8^{-2}}$ — ☐ $\frac{1}{\pi^2}$

iii Utiliza las propiedades de la potenciación para simplificar cada expresión.

a. $\left(\frac{8mn^2}{m^{-3}n}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{n^5z}{4m}\right)$

b. $\frac{(x^3y^4z^2)^{-2} \cdot (x^2z^5)^{-3}}{(x^2y^3)^{10}}$

6 Notación científica

Saberes previos

Calcula los resultados de 10^x para $\{x \in \mathbb{Z} / -5 \leq x \leq 5\}$.

Analiza

La distancia entre el Sol y la Tierra es de aproximadamente 149 600 000 km.

- Escribe esta distancia en notación científica.

Conoce

Para escribir la distancia 149 600 000 km usando notación científica, se deben seguir estos pasos:

- Se desplaza la coma decimal en 149 600 000 hacia la izquierda hasta obtener un número mayor o igual a 1 y menor que 10. Se quitan los ceros y se obtiene 1,496.
- Se escribe el producto entre 1,496 y 10^8. El exponente 8 indica las cifras decimales que se desplazó la coma decimal en el paso anterior.

Por lo tanto, $1{,}496 \cdot 10^8$ es la distancia del Sol a la Tierra en notación científica.

Un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como:

$$x = a \cdot 10^n, \qquad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1

Para escribir el número $3{,}13 \cdot 10^{-6}$ en notación decimal se desplazan seis cifras decimales hacia la izquierda como lo indica el exponente de 10.

$3{,}13 \cdot 10^{-6}$ en notación decimal es 0,00000313.

6.1 Notación científica y operaciones

Para **sumar** y **restar** números escritos en notación científica es necesario que los números tengan la misma potencia de 10.

Para **multiplicar** y **dividir** números escritos en notación científica se utilizan las propiedades de las potencias.

Ejemplo 2

Un automóvil se desplaza a 90 km/h por una autopista que conecta dos ciudades. Para transformar esta medida a m/s se utilizan las propiedades de la potenciación y equivalencias entre las unidades de medida. Esto es:

$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m} = 1 \cdot 10^3 \text{ m}$

$1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^3 \text{ s}$

Luego, se transforman 90 km/h a m/s, así:

$90 \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = \dfrac{90 \cdot 1 \cdot 10^3 \text{ m}}{3{,}6 \cdot 10^3 \text{ s}}$ ← Se utilizan las equivalencias anteriores.

$= \dfrac{90 \text{ m}}{3{,}6 \text{ s}}$ ← Se simplifican las expresiones utilizando las propiedades de la potenciación.

$= 25 \text{ m/s}$ ← Se realiza la división correspondiente.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Escribe cada número en notación científica.

a. 58 934 000 000 b. 0,00026

c. 97 000 000 000 d. 396 000 000 000

e. 0,0419 f. 215 000

g. 0,000000000325 h. 921 560 000 000

i. 0,0000000659 j. 634 000 000

2 Escribe cada número en notación decimal.

a. $6{,}278 \cdot 10^{-10}$ b. $6 \cdot 10^{12}$

c. $9{,}999 \cdot 10^{-9}$ d. $2{,}721 \cdot 10^{8}$

e. $7{,}1 \cdot 10^{14}$ f. $8{,}55 \cdot 10^{-3}$

g. $45{,}678 \cdot 10^{-5}$ h. $3{,}19 \cdot 10^{4}$

3 Utiliza la notación científica, las propiedades de las potencias y la calculadora para obtener el resultado de las siguientes operaciones.

a. $(7{,}2 \cdot 10^{-9})(1{,}806 \cdot 10^{-12})$

b. $\dfrac{(3{,}542 \cdot 10^{-6})^{9}}{(5{,}05 \cdot 10^{4})^{12}}$

c. $\dfrac{(0{,}0000162)(0{,}01582)}{(594\,621\,000)(0{,}0058)}$

d. $\dfrac{(73{,}1)(1{,}6341 \cdot 10^{28})}{(0{,}0000000019)}$

e. $(7{,}2 \cdot 10^{24})(8{,}61 \cdot 10^{19})$

Comunicación

4 Completa la Tabla 1.11.

Objeto	Radio en metros	
	Decimal	N. científica
La Luna	1 740 000	
Átomo de plata		$1{,}25 \cdot 10^{-10}$
Huevo de pez globo	0,0028	
Júpiter		$7{,}149 \cdot 10^{7}$
Átomo de aluminio	0,000000000182	
Marte		$3{,}397 \cdot 10^{6}$

Tabla 1.11

Resolución de problemas

5 Si la velocidad de la luz es $3 \cdot 10^{8}$ m/seg, ¿cuánto tarda en recorrer 15 km?

6 Un bebé recién nacido tiene cerca de 26 000 000 000 células. Un adulto tiene cerca de $4{,}94 \cdot 10^{13}$ células. ¿Cuántas células más tiene un adulto que un recién nacido? Escribe la respuesta en notación científica.

7 El área total de terreno en la Tierra es aproximadamente $6 \cdot 10^{7}$ millas cuadradas. El área total de terreno de Australia es cerca de $3 \cdot 10^{6}$ millas cuadradas. Aproximadamente, ¿cuántas veces es mayor el área total del terreno en la Tierra que en Australia?

Evaluación del aprendizaje

Analiza y responde.

a. ¿Cuál de las siguientes medidas no se debería escribir en notación científica: número de estrellas en una galaxia, número de granos de arena en una playa, velocidad de un carro, o población de un país?

b. ¿El número $0{,}9 \cdot 10^{-5}$ está escrito correctamente en notación científica? ¿Por qué?

c. ¿Qué diferencia hay en el exponente de la potencia de 10 cuando escribes un número entre 0 y 1 en notación científica y cuando escribes un número mayor que 1 en notación científica?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

La población mundial actual es de aproximadamente 7 300 000 000 y se estima que en el 2030 será de 8 500 000 000. Escribe estos valores en notación científica.

- Menciona los tipos de relaciones que permiten que la población mundial crezca cada año.

7 Radicales

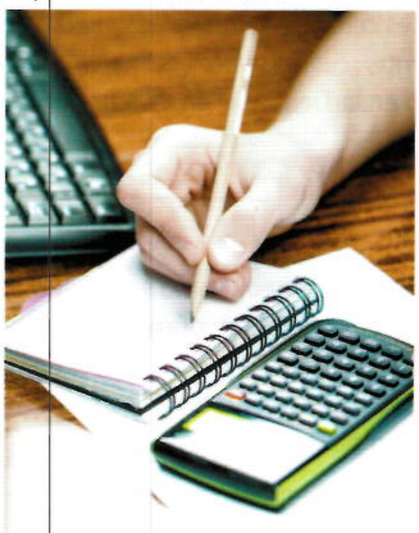
Pensamiento numérico

Saberes previos

Describe cómo a partir del área de un cuadrado puedes determinar la longitud de su lado.

Analiza

Andrés está hallando los valores de algunas raíces en la calculadora. Cuando digita $\sqrt[4]{-8}$, le aparece en la pantalla "*Math Error*".



- ¿Cuál es el significado de "*Math Error*" para esta raíz?

Conoce

7.1 Raíz n-ésima de un número real

Cuando Andrés digita $\sqrt[4]{-8}$ en la calculadora, el aviso "*Math Error*" que aparece en la pantalla, significa que hay un error matemático o que el resultado no está definido en los números reales.

En este caso, se deduce que la raíz cuarta de -8 no existe porque no hay un número real que multiplicado cuatro veces por sí mismo dé como resultado -8. Por lo tanto, $\sqrt[4]{-8}$ no está definida en los números reales.

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces la **raíz n-ésima** de un número real a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ significa que } \quad b^n = a.$$

Si n es par, se debe tener que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Ejemplo 1

El número de raíces reales que tiene un número real depende del signo del radicando y de si el índice es par o impar. Ten en cuenta la información de la Tabla 1.12.

Índice	Radicando	Número de raíces reales	Ejemplos
Impar	Cualquier número real	Una de igual signo que el radicando	$\sqrt[7]{128} = 2$, porque $2^7 = 128$ $\sqrt[5]{-3125} = -5$, porque $(-5)^5 = -3\,125$ $\sqrt[3]{0} = 0$, porque $0^3 = 0$
Par	Positivo	Dos raíces	$\sqrt[4]{2041} = \pm 7$, porque $7^4 = 2\,041$ o $(-7)^4 = 2\,041$
	Nulo	Una raíz nula	$\sqrt[8]{0} = 0$, porque $0^8 = 0$
	Negativo	No existen raíces reales	$\sqrt[4]{-8} \notin \mathbb{R}$, porque no existe un número real que elevado a la 4 dé -8.

Tabla 1.12

Ejemplo 2

Para resolver la expresión $\dfrac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt[100]{1}}{\sqrt[8]{256}}$ se calculan las raíces y luego se realizan las operaciones indicadas, así: $\dfrac{\sqrt[3]{-27} + \sqrt[100]{1}}{\sqrt[8]{256}} = \dfrac{-3+1}{\pm 2}$.

Como en el denominador hay dos resultados posibles, entonces la expresión tiene dos soluciones: $\dfrac{-3+1}{2} = -1$ y $\dfrac{-3+1}{-2} = 1$.

7.2 Potencias con exponente fraccionario

Toda **potencia con exponente fraccionario** puede escribirse como un radical. Si $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$(a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 3

Identifica los valores de las incógnitas x, w y k, en las siguientes expresiones:

$81^{\frac{1}{4}} = x$, $(-343)^{\frac{1}{w}} = -7$ y $k^{\frac{1}{5}} = -5$.

Se representan estas potencias como expresiones radicales, así:

$81^{\frac{1}{4}} = x \Rightarrow \sqrt[4]{81} = x$

$(-343)^{\frac{1}{w}} = -7 \Rightarrow \sqrt[w]{-343} = -7$

$k^{\frac{1}{5}} = -5 \Rightarrow \sqrt[5]{k} = -5$

De esta manera, se identifica el valor de las incógnitas. Luego:

$\sqrt[4]{81} = x \Rightarrow x = 3$

$\sqrt[w]{-343} = -7 \Rightarrow w = 3$

$\sqrt[5]{k} = -5 \Rightarrow k = -3\,125$

7.3 Radicales equivalentes

Dos o más **radicales** son **equivalentes** si sus potencias correspondientes tienen la misma base y el mismo exponente.

Ejemplo 4

Los radicales $\sqrt[3]{35^4}$ y $\sqrt[12]{35^{16}}$ son equivalentes porque al escribirlos en forma de potencia sus bases y exponentes son iguales. Observa:

$\sqrt[3]{35^4} = 35^{\frac{4}{3}}$ $\qquad$ $\sqrt[12]{35^{16}} = 35^{\frac{16}{12}} = 35^{\frac{4}{3}}$

Ejemplo 5

Para encontrar radicales equivalentes a $\sqrt[4]{5}$ se amplifican o simplifican el índice y el exponente del radicando por un mismo número mayor que 1, así:

- Si se amplifica por 6, se obtiene el radical equivalente $\sqrt[24]{5^6}$.
- Si se simplifica por 2, se obtiene el radical equivalente $\sqrt{5^{\frac{1}{2}}}$.

7.4 Reducción de radicales a índice común

Reducir a **índice común** dos o más radicales es encontrar radicales equivalentes a los dados que tengan el mismo índice.

Ejemplo 6

Para reducir a índice común los radicales $\sqrt{2m}$, $\sqrt[3]{2^2 \cdot (3t)^2}$, $\sqrt[4]{2 \cdot f^2 \cdot 3^3}$ se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Se halla el mínimo común múltiplo entre los índices: m. c. m. $(2, 3, 4) = 12$
  Este será el índice común para todos los radicales.
- Se divide el m. c. m. hallado por cada uno de los índices de los radicales; es decir, entre 2, 3 y 4.
- Cada resultado (6, 4 y 3), se multiplica por los exponentes correspondientes en los radicandos, así:

$$\sqrt[12]{(2m)^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8 \cdot t^8} \qquad \sqrt[12]{2^3 \cdot 3^9 \cdot f^6}$$

De esta forma, los radicales obtenidos son equivalentes a los dados y son reducidos a índice común.

7.5 Racionalización

La **racionalización** es un proceso en el que se elimina la parte radical en el denominador de una expresión.

Ejemplo 7

Para racionalizar la expresión $\frac{3h}{\sqrt[3]{9h}}$ cuyo **índice del radical** es 3, se amplifica la fracción por un factor que elimine el radical en el denominador. Es decir, se busca un **factor racionalizante** que multiplicado por $\sqrt[3]{9h}$ dé como resultado $3h$. En este caso el factor es $\sqrt[3]{3h^2}$ porque $\sqrt[3]{3^2h} \cdot \sqrt[3]{3h^2} = 3h$. Al racionalizar la expresión se obtiene:

$$\frac{3h}{\sqrt[3]{3^2h}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3h^2}}{\sqrt[3]{3h^2}} = \frac{3h \cdot \sqrt[3]{3h^2}}{3h} = \sqrt[3]{3h^2}$$

Ejemplo 8

Para racionalizar la expresión $\frac{3x}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$, donde el denominador es un binomio, la fracción se amplifica por el conjugado del denominador, es decir, por el binomio con signo opuesto en el segundo término: $\sqrt{x} - \sqrt{2}$. La racionalización se hace así:

$$\frac{3x}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \frac{3x\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3x\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)}{x - 2}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Simplifica cada expresión.

a. $\sqrt[5]{-32} + (-1)^{\frac{2}{3}}$ b. $\dfrac{-4^{\frac{1}{2}} - \sqrt[5]{-243}}{\sqrt{121}}$

c. $\dfrac{\sqrt{100} - \sqrt[4]{16}}{\sqrt[18]{0}}$ d. $-64^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{100}$

2 Halla dos radicales equivalentes a cada radical.

a. $\sqrt[4]{5x}$ b. $\sqrt[8]{(7d)^{22}}$

c. $(27h)^{\frac{6}{7}}$ d. $56^{\frac{1}{3}}$

e. $\sqrt[16]{\left(\dfrac{g}{2}\right)^{4}}$ f. $\left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{9}}$

3 Reduce a índice común los siguientes radicales.

a. $\sqrt[6]{15a^3x^2}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{3a^2b}$

b. $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$

c. $\sqrt[6]{7a^3b}$, $\sqrt{5x}$, $\sqrt[3]{4x^2y}$

d. $\sqrt[4]{8a^2x^3}$, $\sqrt[6]{3a^5b^4}$

e. $\sqrt[5]{3a^2x}$, $\sqrt[3]{2ab}$, $\sqrt[15]{5a^3x^2}$

Razonamiento

4 Determina qué número es mayor en cada par de expresiones. Evita usar calculadora.

a. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ o $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

b. $2^{\frac{1}{2}}$ o $2^{\frac{1}{3}}$

5 Racionaliza cada expresión.

a. $\dfrac{4ab}{\sqrt[3]{x^2y^3z^3b}}$ b. $\dfrac{h}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$

c. $\dfrac{m^3n\sqrt{x}}{\sqrt[5]{2^4m^7n^6x}}$ d. $\dfrac{\sqrt{m+1}}{1 - \sqrt{m+1}}$

e. $\dfrac{3ab^2}{\sqrt{ab^5}}$ f. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}$

g. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ h. $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}}$

Resolución de problemas

6 Cerca de la superficie terrestre, el tiempo t que tarda un objeto en caer una distancia d, está dado por la expresión $t = \frac{1}{4}d^{\frac{1}{2}}$, donde t se mide en segundos y d se mide en pies. Halla el tiempo que tardará un objeto en caer 100 pies.

7 La relación entre el radio r de una esfera y su área total A es $r = \left(\dfrac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene un área total de 64π unidades cuadradas?

Evaluación del aprendizaje

i Completa la Tabla 1.13. Luego, responde.

n	$2^{\frac{1}{n}}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$
1		
2		
5		
10		
100		

Tabla 1.13

a. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de 2 cuando n se incrementa?

b. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de $\frac{1}{2}$ cuando n se incrementa?

ii Escribe F si la proposición es falsa o V si es verdadera.

a. Racionalizar significa eliminar todos los radicales de una expresión.

b. Solo las expresiones con radicales de índice 2 se pueden racionalizar.

c. El factor racionalizante es una expresión que permite eliminar un radical.

d. El conjugado de un binomio es otro binomio con signos negativos.

8 Logaritmo de un número real

Saberes previos

¿Cuántas veces tendrías que multiplicar el 2 para obtener el 8 como resultado?

Analiza

El oído es sensible a una amplia variedad de intensidades de sonido. **El nivel de intensidad** B, medido en decibeles (dB), se define como:

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

donde I es la intensidad del sonido medida en vatios por metro cuadrado (W/m^2) y I_0 es la menor intensidad del sonido que puede detectar un oído humano: 10^{-12} W/m^2.

- Encuentra el nivel de intensidad de una turbina de avión durante el despegue si la intensidad es 100 W/m^2.

Conoce

El nivel de intensidad B de una turbina de avión durante el despegue, si la intensidad es 100 W/m^2, se obtiene sustituyendo este valor y el de I_0 en la fórmula de nivel de intensidad, así:

$$B = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad es 140 dB.

El **logaritmo** de un número x de base a es un número y al cual se eleva la base a para obtener la potencia x, es decir:

$$\log_a x = y \quad \text{si y solo si} \quad a^y = x, \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Si en la expresión "log" no aparece el número que señala la base, significa que el logaritmo es en base 10.

Ejemplo 1

Al calcular los logaritmos $\log_5 125$, $\log 100\,000$ y $\log_4 \frac{1}{64}$ se obtiene que:

- $\log_5 125 = 3$, porque $5^3 = 125$
- $\log 100\,000 = 5$, porque $10^5 = 100\,000$
- $\log_4 \frac{1}{64} = -3$, porque $4^{-3} = \frac{1}{64}$

8.1 Propiedades de los logaritmos

Para todo $a, x, y \in \mathbb{R}^+$ se verifican las **propiedades de los logaritmos**, definidas en la Tabla 1.14 .

Propiedad	Ejemplos
$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$	$\log_3 9 \cdot 81 = \log_3 9 + \log_3 81$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_5 \frac{5}{125} = \log_5 5 - \log_5 125$
$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$	$\log_7 343^5 = 5 \cdot \log_7 343$
$\log_a 1 = 0$, (para $a \neq 0$)	$\log_{18} 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_{15} 15 = 1$

Tabla 1.14

Ejemplo 2

Si $\log 2 = 0,3$, halla los logaritmos decimales de 20; 5 y 0,2.

Se escriben los números en función de potencias de 2 y de 10 (la base):

- $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log (2) + \log (10) = 0,3 + 1 = 1,3$
- $\log 5 = \log (10 \div 2) = \log (10) - \log (2) = 1 - 0,3 = 0,7$
- $\log 0,2 = \log (2 \div 10) = \log (2) - \log (10) = 0,3 - 1 = -0,7$

8.2 Cambio de base

Para **cambiar la base** de un logaritmo se utiliza la siguiente fórmula:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo 3

Para demostrar que la fórmula de cambio de base de un logaritmo es válida, se parte de la definición de logaritmo:

$$\log_a x = y$$

- Luego se escribe esta expresión en forma exponencial y se toma el logaritmo, con base b, en cada lado de la igualdad, así:

$$a^y = x \longrightarrow \log_b(a^y) = \log_b x$$

- Se aplican las propiedades correspondientes y se despeja y para obtener:

$$y \cdot \log_b a = \log_b x \qquad y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo 4

Para calcular $\log_2 15$, se escribe en función de logaritmos en base 10. Llamando b al logaritmo buscado, se tiene que:

$$b = \log_2 15 \text{ si y solo si } 2^b = 15$$

- Se calcula el logaritmo decimal de ambos lados de la igualdad y se aplican las propiedades de los logaritmos. Entonces:

$$\log 2^b = \log 15 \qquad b \cdot \log 2 = \log 15 \qquad \log_2 15 \cdot \log 2 = \log 15$$

- Se despeja y se hacen los cálculos correspondientes, así:

$$\log_2 15 = \frac{\log 15}{\log 2} = \frac{1{,}176}{0{,}301} = 3{,}907$$

El logaritmo de base e se llama **logaritmo natural** y se denota con ln. Es decir, $\log_e x = \ln x$, donde e es el número irracional trascendente 2,718281…, también llamado constante de Euler o constante de Napier.

Ejemplo 5

Para cambiar ln20 a base 10 se aplica la fórmula, así:

$$\ln 20 = \frac{\log 20}{\log e} \approx 2{,}996$$

En la calculadora solo es posible obtener resultados de logaritmos en base 10 y e; por ello, es necesario primero **cambiar la base de un logaritmo** a estas bases.

Ejemplo 6

El cambio de base del $\log_5 345$ a base 10 y e se muestra en la Tabla 1.15.

A base 10	A base e
$\log_5 345 = \dfrac{\log 345}{\log 5} \approx 3{,}6308$	$\log_5 345 = \dfrac{\ln 345}{\ln 5} \approx 3{,}6308$

Tabla 1.15

Se observa que el resultado aproximado de $\log_5 345$ es 3,6308.

8.3 Paso de una expresión algebraica a una logarítmica y viceversa

Para **convertir una expresión algebraica a una logarítmica** se aplica el logaritmo en la base escogida a ambos lados de la igualdad y luego se utilizan las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo 7

Para convertir la expresión algebraica $R = \dfrac{m^3}{t^7 \cdot \sqrt{g}}$ a una logarítmica natural se procede así:

$$\ln R = \ln \frac{m^3}{t^7 \cdot \sqrt{g}}$$
$$\ln R = \ln m^3 - \ln t^7 - \ln \sqrt{g}$$
$$\ln R = 3 \cdot \ln m - 7 \cdot \ln t - \frac{1}{2} \ln g$$

Para **convertir algunas expresiones logarítmicas a algebraicas** se aplican las propiedades de los logaritmos en sentido inverso.

Ejemplo 8

La expresión logarítmica $\log_5 M = \dfrac{1}{3}\log_5 f^9 + \log_5 f^3 - \dfrac{1}{2}\log_5 k$ se transforma en una algebraica así:

$$\log_5 M = \frac{1}{3}\log_5 f^9 + \log_5 f^3 - \frac{1}{2}\log_5 k$$
$$\log_5 M = \log_5 f^3 + \log_5 f^3 - \log_5 \sqrt{k}$$
$$\log_5 M = \log_5 (f^3 \cdot f^3) - \log_5 \sqrt{k}$$
$$\log_5 M = \log_5 \frac{f^6}{\sqrt{k}} \longrightarrow M = \frac{f^6}{\sqrt{k}}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Expresa cada logaritmo en forma exponencial.

a. $\ln(x-1)=4$ b. $\ln y=5$

c. $\log_8 4=\frac{2}{3}$ d. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)=-3$

e. $\log_5 1=0$ f. $\log_{10} 0{,}1=-1$

2 Escribe cada potencia en forma logarítmica.

a. $e^{0.5x}=t$ b. $10^{-4}=0{,}0001$

c. $81^{1/2}=9$ d. $4^{-3/2}=0{,}125$

e. $8^{-1}=\frac{1}{8}$ f. $2^{-3}=\frac{1}{8}$

3 Halla el valor de cada logaritmo.

a. $\log_9 9$ b. $\log_4 64$

c. $\log_5 5^4$ d. $\log_3 3^2$

e. $\log_3 1$ f. $\log_3 3$

4 Aplica las propiedades de los logaritmos para simplificar cada expresión logarítmica.

a. $\log 12+\frac{1}{2}\log 7-\log 2$

b. $\log_3 5+5\log_3 2$

c. $\log_a b+c\log_a d-r\log_a s$

d. $\log_2 A+\log_2 B-2\log_2 C$

e. $2(\log_5 x+2\log_5 y-3\log_5 z)$

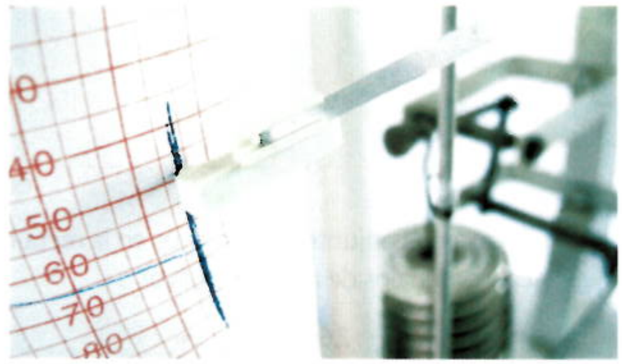
Resolución de problemas

5 La edad de un objeto antiguo puede determinarse por la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por:

$$A=-8\,267\ln\left(\frac{D}{D_0}\right).$$

Encuentra la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en él es el 73% de la cantidad original D_0.

6 La magnitud de un terremoto según la escala de Richter se determina por $M=\log\frac{I}{S}$, donde I es la intensidad y S, la intensidad estándar. Si un sismo tiene $M=6{,}5$, ¿cuál es la magnitud de otro sismo con intensidad 35 veces mayor?



7 El pH de una sustancia está dado por $pH=-\log[H^+]$, donde $[H^+]$ es la concentración de los iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Las sustancias con un $pH=7$ son *neutras*, con $pH<7$ son *ácidas* y con $pH>7$ son *básicas*.

a. En una muestra de sangre humana se encontró que $[H^+]=3{,}16\cdot 10^{-8}$ M. Determina el pH y clasifícalo.

b. La lluvia más ácida medida en la historia tuvo un pH de 2,4. Determina la concentración de iones de hidrógeno.

c. La concentración de iones de hidrógeno en claras de huevo frescas es $1{,}3\cdot 10^{-8}$ M. Determina su pH y clasifica la sustancia.

Evaluación del aprendizaje

Utiliza las propiedades de los logaritmos y calcula.

a. $\log_5\sqrt[3]{x^2+1}$ b. $\log_a\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)$

c. $\ln\sqrt{ab}$ d. $\ln\sqrt[3]{3r^2s}$

e. $\log\left(\frac{x^3y^4}{z^6}\right)$ f. $\log\left(\frac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$

Practica más

Números reales

Comunicación

1 Completa la Tabla 1.16.

Fracción	Decimal	Fracción generatriz	Clasificación
$-\frac{48}{56}$			
$-\frac{35}{48}$			
$\frac{5}{55}$			

Tabla 1.16

2 Ubica cada conjunto de números en la recta numérica y ordénalos de menor a mayor.

a. π; $-1,\overset{\frown}{6}$; $\frac{1}{2}$; 2,6; $-\sqrt{3}$; $-1,4$

b. $-\pi$; $-\frac{4}{10}$; $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$

c. $-2,0$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\sqrt{3}$; 1,8

3 Da ejemplos de números según la condición.

a. Enteros y naturales

b. Racionales y enteros

c. Reales e irracionales

d. Enteros negativos y naturales

4 Representa en la recta numérica los siguientes intervalos. Identifica el centro y el radio.

a. $|x| \leq 2\sqrt{2}$

b. $-7 \leq x < -\sqrt{2}$

c. $[-\pi, 2\pi)$

d. $\left[-\sqrt{2}; 1,\overset{\frown}{9}\right]$

e. $|x + 5| \leq 15$

f. $|x - 5| \leq -15$

Resolución de problemas

5 En la Figura 1.13 se muestra una circunferencia inscrita en un cuadrado de diagonal $5\sqrt{2}$.

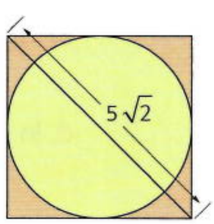


Figura 1.13

¿Cuál es el radio de la circunferencia?

Potencias con exponente entero

Ejercitación

6 Simplifica cada una de las siguientes expresiones.

a. $5^3 \cdot 5^8 \div (5^2 \cdot 5^4)$

b. $5^{-3} \cdot 5^8 \div (5^{-2} \cdot 5^4)$

c. $\frac{2^{-5} \cdot 3^5 \cdot 5^{-2}}{2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{-6}}$

d. $\frac{2^{-5} \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^7}$

e. $\frac{m^{-n} \cdot l^5 \cdot n^{-2}}{m^{2n} \cdot n^2 \cdot l^5}$

f. $\left(\frac{2^{-2}}{2^5} \cdot \frac{\left(2^3\right)^{-5}}{2^7}\right)^2$

g. $\frac{y^{-3} \cdot z^4 \cdot w^{-2}}{y^2 \cdot z^2 \cdot w^3}$

h. $\frac{5^3 \cdot 3^4}{3 \cdot 5^2}$

Radicales

Ejercitación

7 Escribe dos radicales equivalentes a cada radical..

a. $\sqrt[3]{4}$

b. $\sqrt{8}$

c. $\sqrt[3]{3}$

d. $\sqrt[3]{5}$

8 Escribe cada radical como una potencia.

a. $\sqrt[5]{2^3}$

b. $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{5}\right)^2}$

c. $\sqrt[3]{(-3)^5}$

d. $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^5}$

Logaritmo de un número real

Ejercitación

9 Halla los siguientes logaritmos.

a. $\log_2 64$

b. $\log_3 81$

c. $\log_8 64$

d. $\log_4 0,25$

e. $\log_2 (-16)$

f. $\log_5 1$

g. $\log_2 50$

h. $\log_2 14$

10 Encuentra el valor de cada logaritmo.

a. $\log_2 17$

b. $\log_3 12$

c. $\log_5 10$

d. $\log_2 (x \cdot y)$

e. $\log_3 (2^5)$

f. $\log_2 12$

g. $\log_2 (x^2 \cdot y^3)$

h. $\log_2 (x^2 \div y^3)$

i. $\log_3 27$

j. $\log_2 (x^{2n})$

Resolución de **problemas**

Estrategia: Seguir un método

Problema

Si $\frac{1}{3} = 0{,}333...$, $\frac{2}{3} = 0{,}666...$, $\frac{4}{3} = 1{,}333...$ y $\frac{5}{3} = 1{,}666...$, ¿qué regularidades hay en las expresiones decimales de fracciones de la forma $\frac{a}{3}$ cuando a no es múltiplo de 3?

1. Comprende el problema

- ¿Qué datos da el enunciado?

  R: Las expresiones decimales de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$.
- ¿Qué debes hallar?

  R: Las regularidades en este tipo de expresiones cuando a no es múltiplo de 3.

2. Crea un plan

- Se identifica el periodo de cada fracción.
- Se expresan las fracciones impropias cuyo denominador es 3 como la suma de una fracción con un número entero y se encuentra una regularidad.

3. Ejecuta el plan

- En $\frac{1}{3}$ el periodo es 3 y en $\frac{2}{3}$ el periodo es 6. Las demás fracciones tienen una expresión decimal infinita con periodo 3 o 6.
- En las fracciones impropias se observa:

$$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + 0{,}333...$$

$$\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + 0{,}666...$$

R: Cuando $\frac{a}{3}$ es la suma de un número entero y la fracción $\frac{1}{3}$, la expresión decimal tiene periodo 3. Cuando la parte fraccionaria es $\frac{2}{3}$, la expresión decimal tiene periodo 6.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica con las fracciones: $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{17}{3}$ y $\frac{19}{3}$.

Aplica la estrategia

1. ¿Cuál es la regla general que permite determinar la expresión decimal de un número racional de la forma $\frac{a}{4}$, cuando el numerador no es múltiplo de 4?

   a. Comprende el problema

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

Resuelve otros problemas

2. En cierto experimento se observó que la variación de una población de bacterias es:

   A las 8:00 a. m. se inicia con una bacteria.

   A las 9:00 a. m. hay tres bacterias.

   A las 10:00 a. m. hay cinco bacterias.

   A las 11:00 a. m. hay siete bacterias.

   ¿Cómo se puede generalizar la variación de la población de bacterias?

Formula problemas

3. Inventa un problema que involucre los datos de la Tabla 1.17.

Horas	Bacterias
1	1
2	4
3	9
4	1

Tabla 1.17

Enriquece tu vocabulario

- Escribe las diferencias entre números irracionales algebraicos y trascendentes.

Evaluación del aprendizaje

Números reales. Propiedades y relaciones

Razonamiento

1 Determina si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). VERDADERO / FALSO

a. Existen infinitos números irracionales. ( )

b. Todo número decimal es un número real. ( )

c. La expresión $-\frac{7}{0}$ es un número real. ( )

d. El número 0 es racional. ( )

e. Entre dos números racionales siempre existe un número irracional. ( )

f. Ningún número racional es irracional. ( )

2 Aplica las propiedades de los números reales y determina si la siguiente igualdad siempre se cumple. PREGUNTA ABIERTA

$$\frac{ab + ac}{a} = b + c$$

Justifica tu respuesta.

3 Compara los números dados en cada caso. Escribe $=$, $<$ o $>$, según corresponda. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

a. $\frac{\pi}{4}$ ☐ $0{,}8$

b. $-\frac{3}{\ }$[illegible] ☐ 19

c. $\sqrt{3}$ ☐ $1{,}73$

d. $-\sqrt{5}$ ☐ $-2{,}24$

e. 9 ☐ $\sqrt{80}$

f. $-\sqrt{7}$ ☐ $-\frac{13}{5}$

4 Aplica las propiedades de las relaciones de orden entre los números reales y completa las expresiones con los símbolos $<$, $>$ o $=$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Si $a = 3$ y $b = 2 \Rightarrow \frac{1}{3}$ ☐ $\frac{1}{2}$

b. Si $9 \cdot z < 0 \Rightarrow z$ ☐ 0

La recta real

Modelación

5 Relaciona las expresiones equivalentes. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $x < -3$ • $(-\infty, 10]$

b. $5 + x \geq -3$ • $[-8, \infty)$

c. $x - 10 \leq 0$ • $(-\infty, -6)$

d. $x + 3 < -3$ • $(-\infty, -3)$

Resolución de problemas

6 La temperatura media en Montreal durante un año se muestra en la Figura 1.14. Utiliza la fórmula de distancia con valor absoluto para hallar el aumento en grados centígrados entre los meses de enero a julio. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

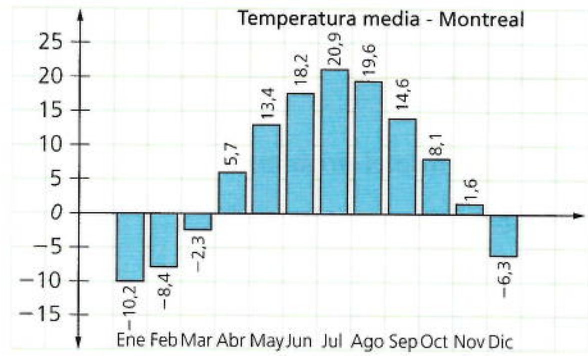


Figura 1.14

7 La escala numérica de evaluación por desempeños en una institución educativa se presenta en la Tabla 1.18. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Nivel de desempeño	Escala numérica
Bajo	1,0 a 2,9
Básico	3,0 a 3,9
Alto	4,0 a 4,5
Superior	4,6 a 5,0

Tabla 1.18

a. ¿Qué tipo de intervalo representa la escala numérica de cada desempeño? Haz la gráfica.

b. Si un estudiante obtiene 3,94 en su promedio bimestral, ¿qué desempeño obtiene?

Operaciones con números reales

Ejercitación

8 Resuelve las siguientes operaciones. Di qué propiedades utilizaste en cada caso. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} - \frac{2}{3}$

b. $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 0{,}595$

c. $\sqrt{3} + \frac{2}{3} - 0{,}086$

d. $\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

e. $\sqrt{2} - \frac{3}{20} + 1{,}3$

Potencias con exponente entero

Ejercitación

9 Calcula mentalmente las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los exponentes. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\frac{18^5}{9^5}$

b. $20^6 \cdot (0,5)^6$

10 Simplifica la expresión $-8^2 \cdot 4^{-3} + 3^0$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Razonamiento

11 Selecciona la expresión que se obtiene al simplificar la fracción $\frac{[x^2 y^{-4} (-z^3)^{-2}]^3}{x^6 y^{-3} z^7}$. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. $-\frac{1}{x^{12} y^9 z^{13}}$

b. $\frac{1}{y^9 z^{11}}$

c. $x^{12} y^9 z^{13}$

d. $x^{12} y^9$

Resolución de problemas

12 En matemáticas financieras, la expresión $F = p(1 + i)^n$ determina el valor futuro F de una cantidad inicial p a una tasa de interés por periodo i dentro de n periodos. Si se depositan en una cuenta \$ 350 000 a un interés mensual de 0,25%, determina el valor futuro después de tres años. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Notación científica

Razonamiento

13 Lee y resuelve.

La distancia en el espacio se mide en años luz. Un año luz es la distancia que recorre un rayo de luz en un año. Si la velocidad de la luz es de aproximadamente 300 000 m/s, determina los metros recorridos en un año luz. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

14 Elige la expresión que resulta de expresar, en miligramos, la masa de un protón ($1,68 \cdot 10^{-27}$ kg). ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. $1,68 \cdot 10^{-24}$ mg

b. $1,68 \cdot 10^{-34}$ mg

c. $1,68 \cdot 10^{-33}$ mg

d. $1,68 \cdot 10^{-20}$ mg

Resolución de problemas

15 Sara puede digitar cerca de 40 palabras por minuto. ¿Cuántas horas le tomará digitar un texto de $2,6 \cdot 10^5$ palabras? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16 Un cabello humano tiene un ancho aproximado de $6,5 \cdot 10^{-5}$ mm. ¿Cuál es el ancho del cabello escrito en notación decimal? ACTIVIDAD DE REFUERZO

Radicales

Comunicación

17 Escribe los radicales en forma de potencia con exponente fraccionario o viceversa, en la Tabla 1.19. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Radical	Potencia
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
$\sqrt[3]{7^2}$	
	$4^{\frac{2}{3}}$
	$11^{-\frac{3}{2}}$
$\sqrt[5]{5^3}$	

Tabla 1.19

Logaritmo de un número real

Ejercitación

18 Usa la fórmula para cambio de base y una calculadora para hallar cada logaritmo. Aproxímalo a cuatro cifras decimales. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. $\log_2 89$

b. $\log_5 26$

c. $\log_3 18$

d. $\log_6 91$

e. $\log_2 89$

f. $\log_5 26$

g. $\log_5 82$

h. $\log_3 81$

i. $\log_4 64$

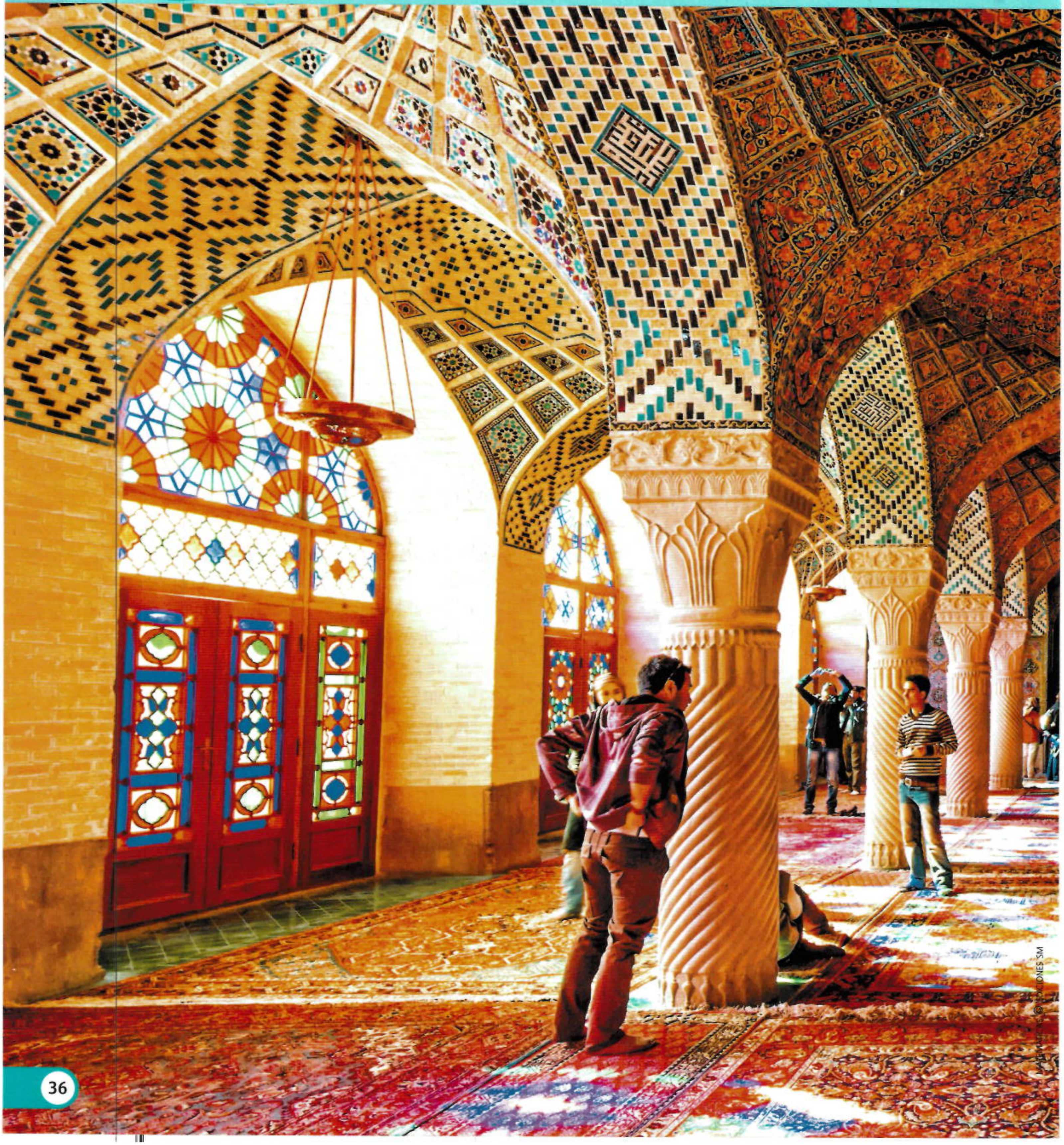
j. $\log_7 987$

Resolución de problemas

19 Una familia de bacterias se divide cada tres horas. Una colonia comienza con 50 bacterias, y el tiempo t (en horas) requerido para que la colonia crezca N bacterias se expresa como $t = 3\,\frac{\log\left(\frac{N}{50}\right)}{\log 2}$.

¿Cuánto tiempo se requiere para que la colonia crezca a un millón de bacterias? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

2 Circunferencia. Razones trigonométricas



Ya sabemos

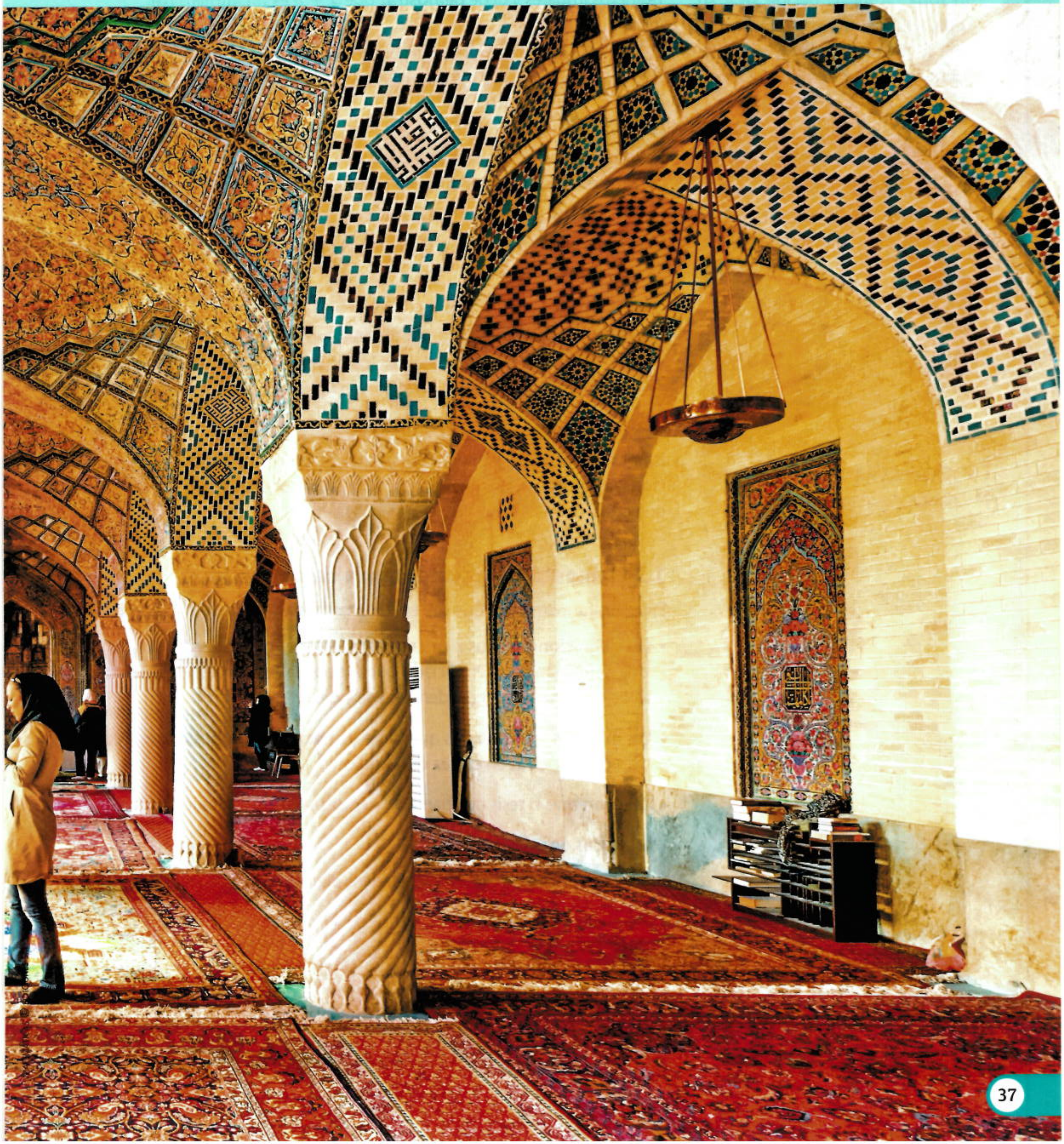
- Identificar postulados y axiomas básicos de la geometría.
- Clasificar triángulos y describirlos.

Vamos a aprender

- A usar diversos métodos de demostración matemática.
- A calcular razones trigonométricas.

Nos sirve para

- Asociar la solución de triángulos rectángulos con fenómenos como el cálculo de distancias y alturas, entre otras.



1 El proceso de la demostración

Saberes previos

La mamá de Rafael le da la siguiente instrucción: "Tiende la cama o lava tu ropa". Si Rafael decide lavar su ropa, ¿puedes afirmar que hizo lo que su mamá le ordenó? ¿Qué valor de verdad tendría la afirmación?

Analiza

María Fernanda afirma que si se suman dos números impares a y b, el resultado es un número par.

- ¿Qué está suponiendo María Fernanda y qué quiere probar?

Conoce

María Fernanda debe demostrar de manera general lo que afirma. Debe tener claro cuál es su suposición y qué quiere demostrar. Ella **supone** que a y b son números impares y debe **demostrar** que $a + b$ es un número par.

La proposición o sentencia que se supone cierta se denomina **hipótesis** y la proposición que se va a demostrar se denomina **tesis**.

Ejemplo 1

En el enunciado "Toda recta l paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales", se identifica que:

- **Hipótesis**: l es una recta paralela a un lado de un triángulo.
- **Tesis:** la recta l divide a los otros dos lados del triángulo en segmentos proporcionales.

Una **demostración** consiste en un conjunto de supuestos, llamados **axiomas** o **premisas**, que se combinan de acuerdo con las **reglas lógicas**, para deducir, como **conclusión**, la proposición que se está demostrando.

Una demostración consta de la **proposición**, cuya validez se desea probar; los **fundamentos**, que serán utilizados como base de la demostración, y la **aplicación** de las reglas de inferencia para construir una cadena de razonamientos que conduzcan hasta la conclusión.

1.1 Elementos que sustentan la demostración

Entre los fundamentos que sustentan una demostración, se consideran:

- Las **definiciones** de los elementos que entran en juego en la demostración. Una definición es un enunciado que especifica las características de un objeto de manera que pueda identificarse y diferenciarse de otros.
- Los **axiomas** y **postulados** que corresponden a las proposiciones que se toman como ciertas en el área de estudio.
- Los **teoremas** o **tesis** que han sido demostrados con anterioridad.
- Las **reglas de inferencia lógica**.

Si p, q y r son proposiciones cualesquiera, algunas reglas de inferencia son:

- *Modus ponendo ponens* $\quad (p \to q) \wedge p \to q$
- *Modus tollendo tollens* $\quad (p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$
- Silogismo hipotético $\quad (p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
- Doble negación $\quad \sim(\sim p) \to p$
- *Modus tollendo ponens* $\quad (p \vee q) \wedge \sim p \to q$

Ejemplo 2

En el enunciado "Toda recta paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales", se involucran: las **definiciones** de "triángulo", "rectas paralelas" y "razón entre segmentos proporcionales"; el **axioma** "Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela a la recta"; el **teorema** "Los segmentos que se generan en dos rectas transversales, al ser cortadas por rectas paralelas, son proporcionales"; y, las **reglas de inferencia lógica** *modus ponendo ponens, modus tollendo tollens* y *modus tollendo ponens.*

1.2 Método directo de demostración

El **método directo de demostración** es un método de razonamiento en el cual, si se tiene una secuencia de proposiciones $P_1, P_2, ..., P_n$, de manera que $P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_3, ..., P_{n-1} \rightarrow P_n$, se puede concluir que $P_1 \rightarrow P_n$.

Una proposición condicional es una proposición resultante de unir dos proposiciones p y q mediante la forma "Si... , entonces". Se simboliza como $p \rightarrow q$.

Ejemplo 3

Para probar que en un $\triangle ABC$, $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$, se construye una tabla de afirmaciones y justificaciones (Tabla 2.1) y una figura auxiliar.

Afirmación	Justificación
Se traza $\overleftrightarrow{XY}$, que pasa por C y es paralela a $\overline{AB}$.	Por un punto exterior a una recta pasa una paralela a esta (Figura 2.1).
$m\measuredangle XCY = 180°$	Un ángulo de lados colineales mide 180°.
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle C = m\measuredangle XCY$	Teorema de la adición de ángulos.
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle C = 180°$	Propiedad transitiva de la igualdad.
$m\measuredangle 1 = m\measuredangle B$ y $m\measuredangle 2 = m\measuredangle A$	Los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes.
$m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180°$	Principio de sustitución.

Tabla 2.1

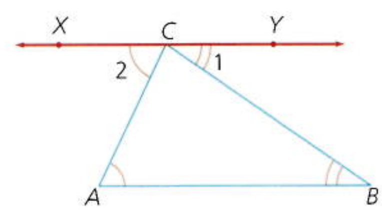


Figura 2.1

1.3 Método indirecto de demostración

El **método indirecto de demostración** es una forma de razonamiento que consiste en:

1. Negar la tesis del enunciado.
2. Suponer cierta la negación de la tesis.
3. Elaborar una cadena de razonamientos que se siguen lógicamente de la negación de la tesis.
4. Obtener una contradicción y afirmar la tesis inicial.

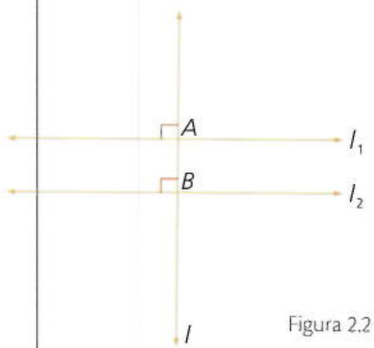


Figura 2.2

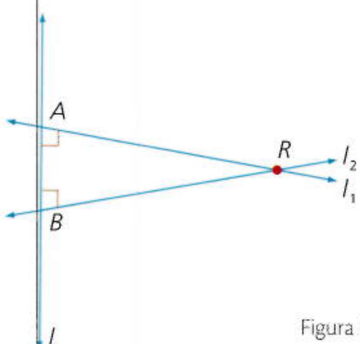


Figura 2.3

Ejemplo 4

Para demostrar que "Si dos rectas coplanares l_1 y l_2 son tales que $\overleftrightarrow{l_1} \perp \overleftrightarrow{l}$ en A y $\overleftrightarrow{l_2} \perp \overleftrightarrow{l}$ en B, entonces $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$"(Figura 2.2), se niega la tesis suponiendo que las rectas se intersecan en un punto R (Figura 2.3). Así, se tiene que:

Afirmación	Justificación
l_1 interseca a l_2 en R	Dado (nueva hipótesis)
l_1 pasa por R y $l_1 \perp l$	Dado (nueva hipótesis)
l_2 pasa por R y $l_2 \perp l$	Dado (nueva hipótesis)

Tabla 2.2

Se tendrían entonces dos rectas perpendiculares a l que pasan por R, lo cual es imposible pues "desde un punto exterior a una recta dada hay a lo sumo una perpendicular a la recta dada". De lo anterior, se concluye que $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$.

1.4 Método de refutación por contraejemplo

El **método de refutación por contraejemplo** consiste en probar la falsedad de una proposición, mostrando un caso o un ejemplo de un individuo o una situación para el que no se cumple la afirmación.

Para utilizar este método se examina el contenido de la proposición y se busca una sentencia que niegue o contradiga lo que se afirma, es decir, se halla un **contraejemplo**.

Ejemplo 5

El teorema de Tales enuncia lo siguiente:

Si la transversal t_1 corta a las rectas paralelas l_1, l_2 y l_3 en A, B y C, respectivamente, y la transversal t_2 lo hace en D, E y F, respectivamente, entonces $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

Este teorema se demuestra por el método directo como se muestra a continuación. Si u es una unidad de medida tal que $AB = xu$ y $BC = yu$, y se trazan paralelas a l_1 por los puntos donde se toma cada unidad u, entonces $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ quedan divididos en segmentos de medidas iguales a u' (Figura 2.4).

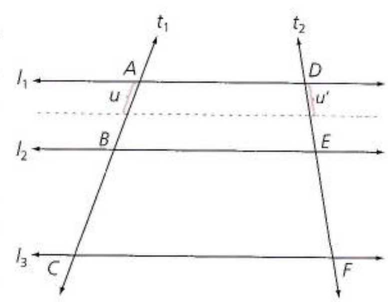


Figura 2.4

Luego: $\frac{AB}{BC} = \frac{xu}{yu}$ y $\frac{DE}{EF} = \frac{xu'}{yu'}$ Así: $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y}$ y $\frac{DE}{EF} = \frac{x}{y}$

Por lo tanto, por transitividad, se obtiene que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, que es equivalente a $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Amanda observa que cada vez que traza las diagonales de un cuadrado, estas resultan ser perpendiculares. Ella quiere probar que esta es una propiedad de todos los cuadrados.

a. ¿Cuál es el enunciado que debe demostrar?

b. ¿Cuál es la hipótesis y cuál la tesis?

2 Realiza una construcción geométrica para cada enunciado y plantea la proposición condicional correspondiente.

a. Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

b. En todo rectángulo se tiene que las diagonales son congruentes.

c. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes.

3 Demuestra las siguientes proposiciones por el método indirecto.

a. Si x y y son enteros positivos y xy es un número impar, entonces x y y son impares.

b. Dadas dos rectas cortadas por una secante, si dos ángulos alternos internos entre estas son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

c. a, b y c son números enteros positivos. Si $ac < bc$, entonces $a < b$.

d. Si $a \in \mathbb{N}$ y a^2 es impar, entonces a es impar.

4 Calcula la medida del segmento AB en la Figura 2.5. Supón que $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{l_3}$.

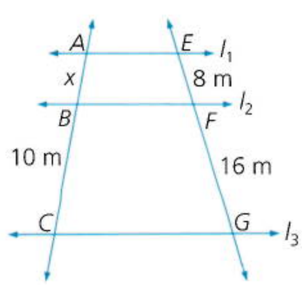


Figura 2.5

Modelación

5 Elige el contraejemplo para la afirmación dada en cada caso.

a. El cuadrado de todo número entero es un número par.

$2^2 = 4$ $\quad$ $3^2 = 9$ $\quad$ $(-6)^2 = 36$

b. Todo número par es divisible entre 4.

$16 \div 4 = 4$ $\quad$ $10 \div 4 = 2{,}5$ $\quad$ $9 \div 4 = 2{,}25$

c. Ningún número primo que sea mayor que 10 termina en 9.

9 $\quad$ 49 $\quad$ 59

Resolución de problemas

6 Propón un contraejemplo para cada afirmación.

a. Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo correspondiente congruente, entonces son congruentes.

b. Si dos triángulos tienen dos pares de lados congruentes, entonces son semejantes.

c. Dos rectángulos que tengan igual perímetro tienen igual área.

d. Todo número real es racional.

e. Todos los triángulos rectángulos son congruentes.

Evaluación del aprendizaje

Demuestra por los métodos directo e indirecto que "Toda paralela a un lado de un triángulo que divide a un lado en segmentos congruentes también divide al otro en segmentos congruentes". Usa la Figura 2.6.

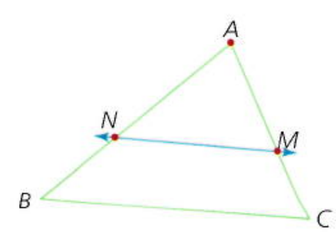


Figura 2.6

2 Segmentos proporcionales

Saberes previos

Toma una fotografía frontal con un celular al tablero de tu salón. Luego, mide el ancho y el largo real y en la fotografía del mismo. Compara las medidas y escribe qué cambios observas en la foto.

Analiza

El ancho y el largo de un apartamento rectangular están en relación de 2 a 5.

- Si el perímetro del apartamento es de 42 m, ¿cuáles son sus dimensiones?

Conoce

Se busca aquí una expresión algebraica a partir de la representación gráfica.

$$2k + 5k + 2k + 5k = 42$$
$$14k = 42$$
$$k = 3$$

Entonces, las dimensiones del apartamento son: $2 \cdot 3 = 6$ m y $5 \cdot 3 = 15$ m.

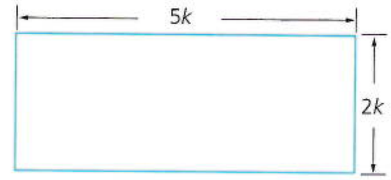


Figura 2.7

2.1 Razones y proporciones

Una **razón** es el cociente entre dos magnitudes comparables entre sí. La razón $a : b$ (a es a b) se escribe como $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$. Cuando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se forma una proporción, donde a y d son los **extremos** y b y c son los **medios.**

Además, se cumple que el **producto de los extremos es igual al producto de los medios**, es decir, $a \cdot d = b \cdot c$.

Ejemplo 1

Las edades de Luis (L), María (M) y Jorge (J) suman 70 años y son proporcionales a 1, 2 y 4, respectivamente. Si k es una constante de proporcionalidad, se tiene que:

$$\frac{L}{1} = \frac{M}{2} = \frac{J}{4} = k$$

Entonces, $L = k$, $M = 2k$ y $J = 4k$.

Como las tres edades suman 70 años, entonces $L + M + J = 70$.

Por lo tanto, $k + 2k + 4k = 70 \Rightarrow 7k = 70 \Rightarrow k = 10$.

Así, Luis tiene 10 años, María tiene 20 años y Jorge tiene 40 años.

2.2 Segmentos proporcionales

Dos **segmentos** son **proporcionales** si sus medidas forman una proporción.

Ejemplo 2

Al comparar las medidas de los segmentos correspondientes en los dos rectángulos de las figuras 2.8 y 2.9, se obtiene que $\frac{12}{18} = \frac{10}{15}$.

Como $12 \cdot 15 = 180 = 18 \cdot 10$, las medidas de los segmentos correspondientes forman una proporción; por lo tanto, los segmentos son proporcionales.

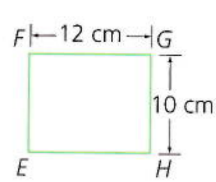


Figura 2.8

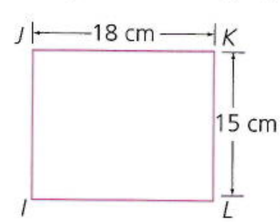


Figura 2.9

Para elaborar los planos de una casa o los modelos para confeccionar una prenda de vestir, se hace indispensable hacer un dibujo.

No siempre se requiere dibujar un objeto en su tamaño original; algunas veces es necesario dibujarlo más grande y otras, más pequeño. A este procedimiento se le conoce con el nombre de **dibujo a escala**. Para realizar un dibujo a escala, se establece una razón de proporcionalidad entre las medidas del dibujo y las del objeto real.

A escala de 1 : 1000 y 1 : 5000 se pueden estudiar fenómenos de mucho detalle. Con escalas entre 1 : 5000 y 1 : 20000 se pueden representar planos de ciudades, mientras que con una escala entre 1 : 200000 y 1 : 1000000 se puede hacer la representación de un país.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Compara las medidas de los segmentos correspondientes en los triángulos de las figuras 2.10 y 2.11. Indica si los segmentos comparados son proporcionales. Justifica tus respuestas.

a.

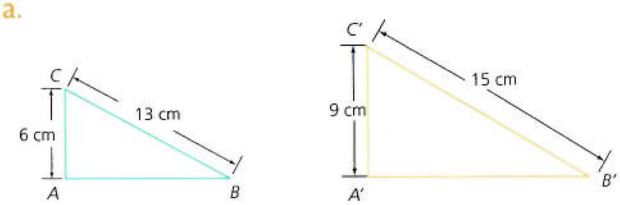


Figura 2.10

b.

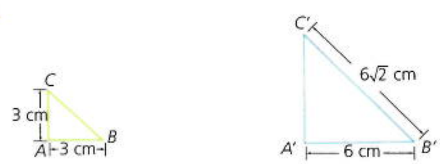


Figura 2.11

2 Decide cuáles de las siguientes igualdades son ciertas. Explica por qué.

a. $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ b. $\frac{2}{8} = \frac{14}{56}$

c. $\frac{9}{6} = \frac{36}{24}$ d. $\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

e. $\frac{3}{12} = \frac{12}{48}$ f. $\frac{5}{13} = \frac{13}{5}$

g. $\frac{1}{12} = \frac{5}{48}$ h. $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$

Resolución de problemas

3 Resuelve los siguientes problemas.

a. Averigua cuáles son las medidas de una hoja tamaño carta. ¿Serán los lados de un rectángulo de 3 cm por 4 cm proporcionales a los lados de una hoja de ese tamaño? ¿Si el rectángulo mide 2,1 cm por 2,97 cm ocurre lo mismo?

b. Consulta acerca de las medias de una hoja A3 y de una hoja A5 y determina si sus lados correspondientes son proporcionales.

Evaluación del aprendizaje

Si las medidas de los lados de un triángulo rectángulo que están en razón de $\frac{4}{7}$ se duplican, ¿cómo varía el perímetro original con respecto al del nuevo triángulo? Haz una representación gráfica que apoye tu respuesta.

Estilos de vida saludable

El consumo de algunas sustancias psicoactivas puede causar deformidades en tu rostro, cambios en el peso o deterioro de los hábitos de higiene.

- Mide tu rostro y dibújalo a escala. Varía la proporción de la nariz en el dibujo que hiciste y observa cómo puede cambiar tu rostro.

3 Circunferencia

Saberes previos

¿Qué objetos tienen una cara plana con forma de círculo? Describe algunos de ellos.

Analiza

La Tierra no es esférica, por ello se dice que tiene un radio medio de 6371 km. Si un satélite tiene una órbita de 30 000 km desde el centro de la Tierra (Figura 2.12), ¿a qué altura está el satélite respecto de la superficie de la Tierra?

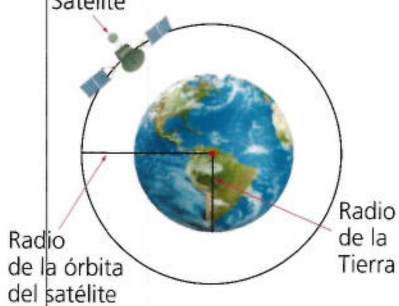


Figura 2.12

Conoce

Para responder la pregunta, se debe restar de la longitud del radio de la órbita del satélite la longitud del radio medio de la Tierra, como se muestra a continuación.

$$30\,000 \text{ km} - 6\,371 \text{ km} = 23\,629 \text{ km}$$

Por lo tanto, el satélite está a una altura aproximada de 23 629 km de la Tierra.

Una **circunferencia** está formada por los puntos del plano que están a igual distancia de un punto llamado **centro**. Tal distancia se denomina **radio de la circunferencia**.

Una circunferencia separa el plano en tres subconjuntos: el **interior** de la circunferencia, el **exterior** de esta y la circunferencia propiamente dicha (Figura 2.13).

La unión de la circunferencia y su interior se denomina **círculo**.

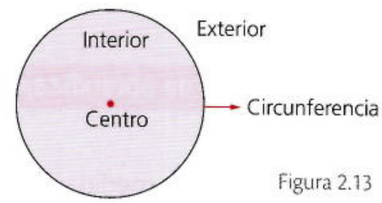


Figura 2.13

3.1 Elementos de la circunferencia

En la circunferencia con centro C se observan los siguientes elementos:

Radio: segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos.

En la Figura 2.14, $\overline{AC}$, $\overline{CM}$ y $\overline{CN}$ son radios.

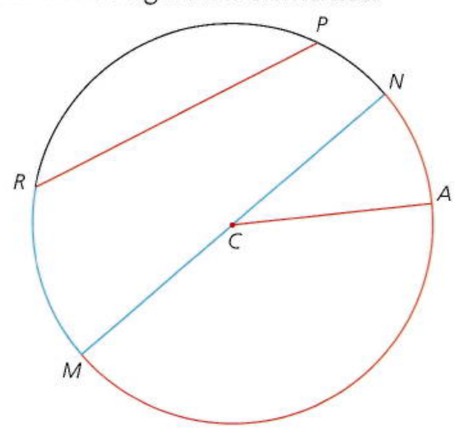


Figura 2.14

Cuerda: segmento cuyos puntos extremos están sobre la circunferencia.

En la Figura 2.14, $\overline{MN}$ y $\overline{RP}$ son cuerdas.

Diámetro: cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

En la Figura 2.14, $\overline{MN}$ es un diámetro.

Arco: porción continua de la circunferencia.

En la Figura 2.14, $\overset{\frown}{MR}$ es un arco.

Semicircunferencia: arco determinado por los extremos de un diámetro. En la Figura 2.14, $\overset{\frown}{MN}$ es una semicircunferencia.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Completa los enunciados a partir de los datos de las figuras 2.15 a 2.18.

a.

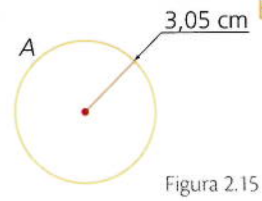


Figura 2.15

b.

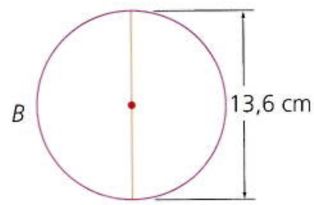


Figura 2.16

c.

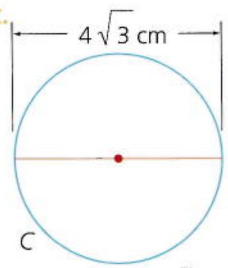


Figura 2.17

d.

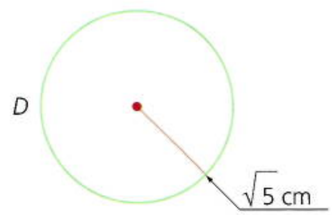


Figura 2.18

a. Si el radio de la circunferencia A mide ______, entonces la longitud del diámetro es ______.

b. Puesto que el diámetro de la circunferencia B es de ______ cm, su radio es de ______ cm.

c. Como el ______ de la circunferencia C es de $4\sqrt{3}$ cm, entonces la longitud del ______ es de $2\sqrt{3}$ cm.

d. Si el ______ de la circunferencia D es de $\sqrt{5}$ cm, entonces el ______ mide $2\sqrt{5}$ cm.

2 Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F).

a. Todas las cuerdas miden lo mismo.

b. El radio mide la mitad del diámetro.

c. Una cuerda puede ser un radio.

d. El diámetro es la mayor de todas las cuerdas posibles.

e. El círculo es la parte del plano encerrada por una circunferencia, incluyendo la propia línea de la circunferencia.

3 Explica con tus palabras la diferencia entre circunferencia y círculo.

4 Identifica cada uno de los elementos de la circunferencia de la Figura 2.19.

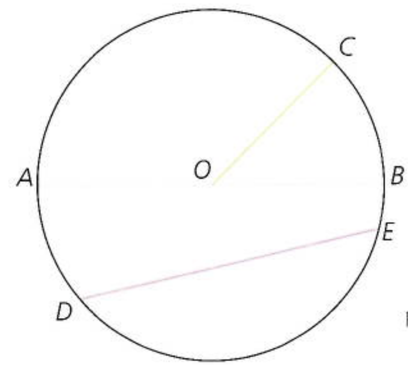


Figura 2.19

a. $\overline{OC}$ es ______.

b. ______ es un diámetro.

c. $\overline{DE}$ es ______.

d. El punto ______ es el centro de la circunferencia.

Evaluación del aprendizaje

✓ Traza los elementos que se indican, en la circunferencia con centro en O (Figura 2.20).

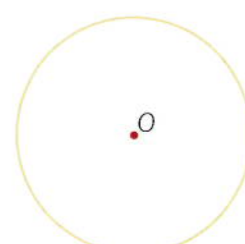


Figura 2.20

a. Un arco AMN.

b. Una cuerda $\overline{PQ}$.

c. Un ángulo central BOC.

d. Un arco RS.

4 Posiciones de una recta y una circunferencia

Saberes previos

Ata a un extremo de un hilo de 50 cm un borrador. Tómalo del otro extremo y hazlo girar alrededor de un punto fijo. Cuando el movimiento del borrador describa una circunferencia, suelta la cuerda. ¿Cómo es la trayectoria del borrador al soltarlo?

Analiza

Observa la circunferencia con centro C y la recta de la Figura 2.21. Explica qué relación se puede establecer entre ellas.

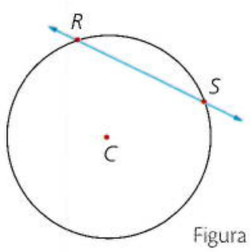


Figura 2.21

Conoce

La recta *RS* está en el mismo plano que la circunferencia de centro *C* y la corta en dos puntos (*R* y *S*). Por lo tanto, $\overleftrightarrow{RS}$ es **secante** a la circunferencia porque tienen dos puntos en común. Otras relaciones que se pueden establecer entre una recta y una circunferencia se muestran en la Tabla 2.3.

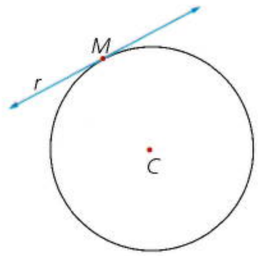
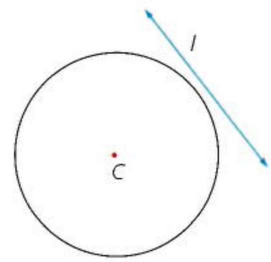
Recta tangente	Recta exterior
	
$\overleftrightarrow{r}$ es **tangente** a la circunferencia en *M* porque tienen en común solo un punto.	$\overleftrightarrow{l}$ es **exterior** a la circunferencia porque no tienen puntos en común.

Tabla 2.3

4.1 Posiciones relativas de un punto y una circunferencia

Entre un punto y una circunferencia que se encuentran en un mismo plano se pueden establecer las tres relaciones siguientes:

- **Interior**: la distancia entre el punto *A* y el centro de la circunferencia es menor que la medida del radio (Figura 2.22).
- **Sobre la circunferencia**: la distancia entre el punto *B* y el centro de la circunferencia es igual que la medida del radio (Figura 2.23).
- **Exterior**: la distancia entre el punto *C* y el centro de la circunferencia es mayor que la medida del radio (Figura 2.24).

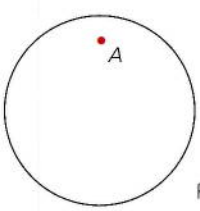


Figura 2.22

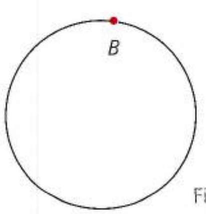


Figura 2.23

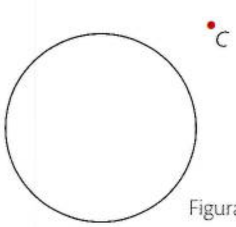


Figura 2.24

4.2 Posiciones relativas entre dos circunferencias

Entre dos circunferencias que se encuentran en un mismo plano se pueden establecer tres relaciones, como se observa en la Tabla 2.4.

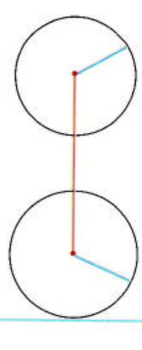
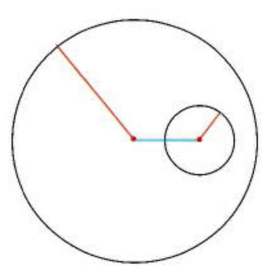
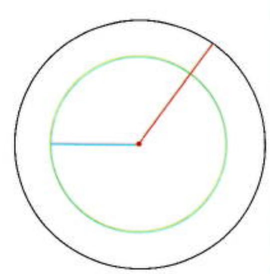
Exteriores	Interiores	Concéntricas
		

Tabla 2.4

4.3 Propiedades de rectas tangentes a una circunferencia

Las rectas tangentes a una circunferencia cumplen las siguientes propiedades:

1. Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado por el punto de tangencia.
2. Si una recta es perpendicular a un radio en su extremo, entonces es tangente a la circunferencia.
3. Los segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a una circunferencia son congruentes.

Ejemplo 1

En la Figura 2.25, $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son tangentes a la circunferencia; entonces se cumple que $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$.

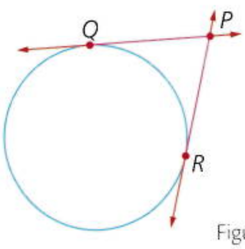


Figura 2.25

4.4 Propiedades de arcos, cuerdas y ángulos centrales

En la Figura 2.26, además del arco MRN y de la cuerda PQ, se determina $\measuredangle AOB$, cuyo vértice coincide con el centro y sus lados son radios de la circunferencia. Este es un **ángulo central**.

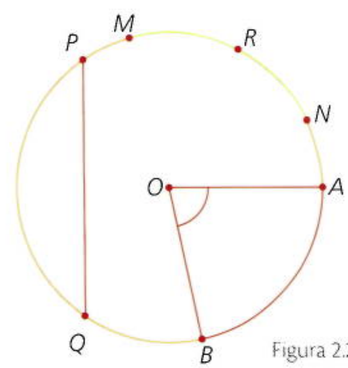


Figura 2.26

Algunas propiedades de los arcos, las cuerdas y los ángulos centrales en una circunferencia, son las siguientes:

1. Todo radio perpendicular a una cuerda biseca la cuerda y el arco correspondiente.
2. Si dos cuerdas de una misma circunferencia son congruentes, entonces las cuerdas equidistan del centro.
3. A ángulos centrales congruentes corresponden arcos congruentes.
4. La medida de un arco es la medida del ángulo central correspondiente.

Ejemplo 2

En la Figura 2.27, se tiene que $\overline{OQ} \perp \overline{XY}$. Como $\overline{OQ}$ es un radio y $\overline{XY}$ es una cuerda de la misma circunferencia, por la propiedad 1 de los arcos, cuerdas y ángulos centrales, se determina que $\overline{OQ}$ biseca a la cuerda $\overline{XY}$.

Por lo tanto, $XM = MY = 6$ cm.

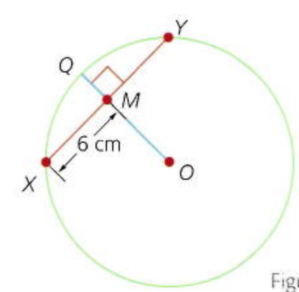


Figura 2.27

4.5 Longitud de la circunferencia

La **longitud de una circunferencia** se obtiene multiplicando la longitud del diámetro d por el valor del número irracional π ($\pi \approx 3{,}1416$).

$$L = \pi d$$

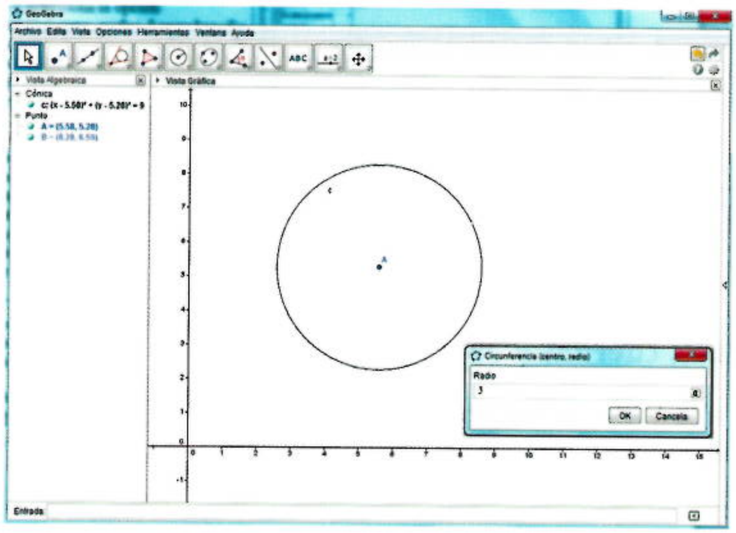
Como la longitud del diámetro es el doble de la del radio, entonces la longitud L de una circunferencia es $L = 2\pi r$.

4 Posiciones de una recta y una circunferencia

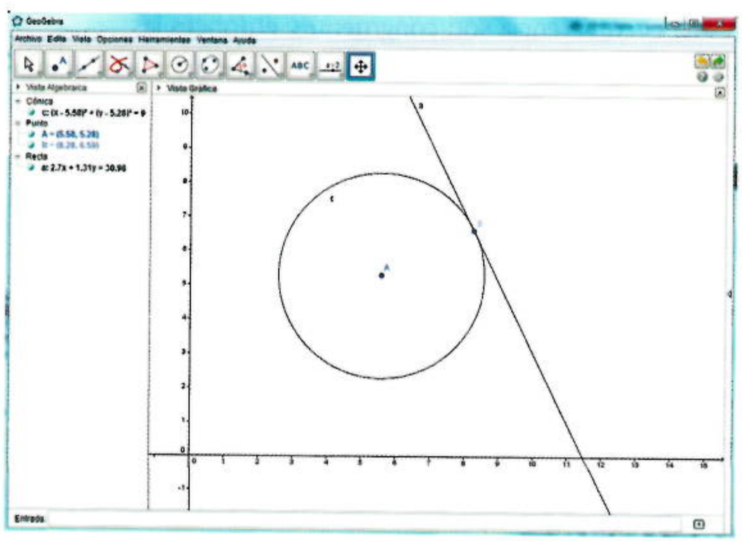
MatemaTICS

Traza rectas tangentes a una circunferencia en GeoGebra

En GeoGebra, haz clic en el ícono y selecciona la opción *Circunferencia (centro, radio)*. Luego, haz clic en algún lugar de la *Vista Gráfica* y en la ventana emergente escribe el número 4 y selecciona "OK". En GeoGebra aparecerá una circunferencia de centro *A* y radio 3.



Haz clic en el ícono y luego sobre la circunferencia obtenida a partir de la primera construcción, para obtener el punto *B*. A continuación, pulsa el ícono, selecciona la opción *Tangentes*, haz clic en el punto *B* y luego en la circunferencia. En GeoGebra aparecerá la recta tangente a la circunferencia por el punto *B*.



Mueve el punto *B* sobre la circunferencia y observa las infinitas rectas tangentes a la circunferencia.

Otra manera de construir una circunferencia es seleccionando la opción *Circunferencia (centro, punto)* y a continuación hacer clic en dos lugares distintos de la *Vista Gráfica*. De esta manera obtendrás una circunferencia de centro *A* y radio $\overline{AB}$. Puedes modificar el radio de esta circunferencia arrastrando el punto *B*.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Calcula la medida de $\overline{OQ}$ en la Figura 2.28, si sabes que $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia en P.

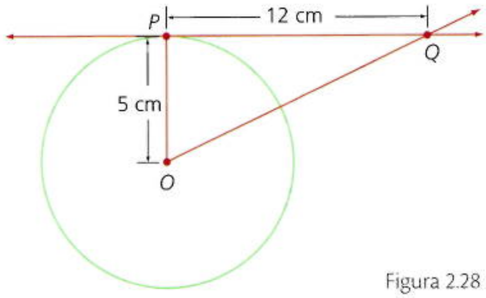


Figura 2.28

2 Encuentra el valor del radio, dada la longitud de cada circunferencia.

a.

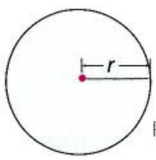


Figura 2.29

$L = 25{,}12$ cm

b.

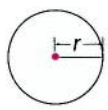


Figura 2.30

$L = 24{,}492$ cm

c.

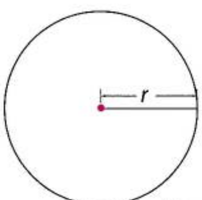


Figura 2.31

$L = 39{,}564$ cm

d.

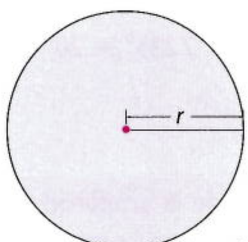


Figura 2.32

$L = 89{,}176$ cm

3 Relaciona cada elemento con su medida correspondiente, teniendo en cuenta la Figura 2.33.

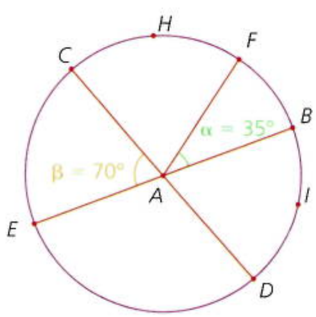


Figura 2.33

a. $\widehat{FBD}$	70°
b. $\widehat{CHB}$	75°
c. $\widehat{CED}$	105°
d. $\widehat{BID}$	180°
e. $\widehat{CEB}$	250°

4 ¿Cuál es la longitud de la circunferencia de la Figura 2.34? ¿Cuál es la medida del radio? ¿Cuál es la medida del diámetro?

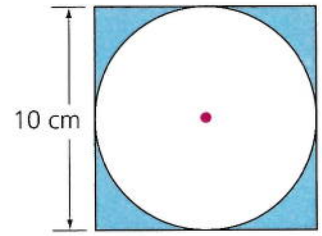


Figura 2.34

Resolución de problemas

5 Si la rueda de una bicicleta tiene 80 cm de diámetro, ¿qué distancia recorre la bicicleta en cada giro de la rueda? ¿Qué distancia recorre en seis giros?

Evaluación del aprendizaje

Determina la medida de $\overline{JI}$ en la Figura 2.35. Considera que $\overleftrightarrow{HJ}$ y $\overleftrightarrow{JI}$ son tangentes a la circunferencia en H y I, respectivamente.

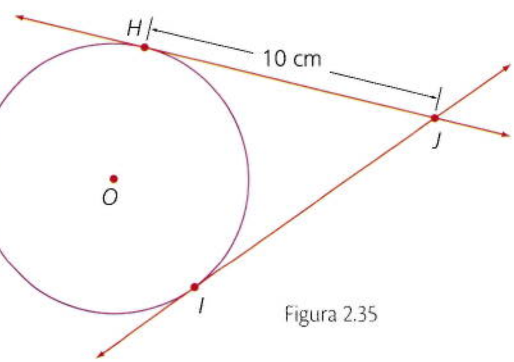


Figura 2.35

5 Medida de ángulos

Saberes previos

¿Cuántos grados gira el horario de un reloj desde las 12:00 hasta las 3:00?

Analiza

Observa la Figura 2.36.

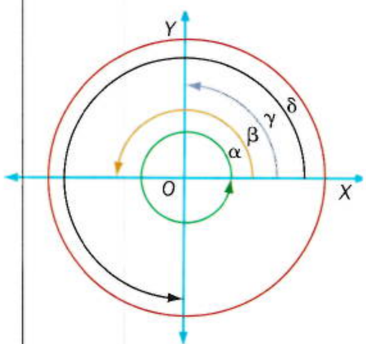


Figura 2.36

- Halla la medida de la amplitud angular de los ángulos centrales marcados en la figura.

Conoce

5.1 El grado

Para hallar la medida de la amplitud angular de α, β, γ y δ, se fija como primer lado de los ángulos el semieje positivo de las abscisas.

Si el sentido de giro es contrario al de las agujas del reloj, la medida de los ángulos es un número positivo; si el sentido es el mismo al de las manecillas, es un número negativo.

Por lo tanto, la medida de los ángulos α, β, γ y δ son: 360°, 180°, 90° y 270°, respectivamente.

El **grado** es la medida de amplitud angular de cada uno de los ángulos que resultan al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales. Su símbolo es °.

Un grado se divide en 60 **minutos**: $1° = 60'$.

Un minuto se divide en 60 **segundos**: $1' = 60''$.

Ejemplo 1

Para expresar el ángulo de 7225° como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360°, se divide por 360°, de modo que el cociente es el número de vueltas y el residuo es el ángulo buscado.

$$7225° = 20 \cdot 360° + 25°$$

5.2 El radián

El **radián** es la medida de la amplitud angular del ángulo central de una circunferencia cuyo arco tiene la misma longitud que el radio. Su símbolo es **rad**.

Como el ángulo de un giro completo abarca toda la circunferencia, y la longitud de una circunferencia con radio r es $2\pi r$, este ángulo mide 2π rad. Por lo tanto, se tiene la equivalencia:

$$360° = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 180° = \pi \text{ rad}$$

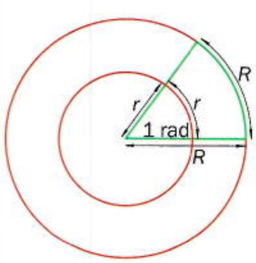


Figura 2.37

El radián no depende del radio de la circunferencia que se considere, ya que todos los sectores circulares determinados por un mismo ángulo son semejantes entre sí (Figura 2.37).

Los ángulos que determinan arcos de mayor longitud que la de la circunferencia pueden expresarse como la suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360° o 2π radianes.

5.3 Conversión entre unidades de medida de ángulos

Para hacer conversiones de medidas de ángulos entre los sistemas sexagesimal y de radianes, se parte de la equivalencia $360° = 2\pi$ rad.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Para expresar 2,4 rad en grados, se plantea la regla de tres:

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{2{,}4 \text{ rad}}{x} \Rightarrow x = \frac{180° \cdot 2{,}4 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = \frac{432°}{\pi} \; 137{,}5099°$$

Para expresar 125° en radianes, se plantea la regla de tres:

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{x}{125°} \Rightarrow x = \frac{125° \cdot 2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{25\pi}{36} \text{ rad}$$

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Indica a qué ángulo menor que 360° equivalen los ángulos que se muestran a continuación.

a. 720° b. 1 050° c. 990°
d. 840° e. 600° f. 1 260°

Ejercitación

2 Indica la medida en radianes de los siguientes ángulos dados en grados.

a. 0° b. −45° c. −60°
d. 120° e. 30° f. −240°
g. 90° h. −270° i. 135°
j. −300° k. 36° l. −20°
m. 216° n. −160° ñ. 324°

3 Expresa la medida en radianes del ángulo α, menor que 360°, al que equivalen estos ángulos.

a. 480° b. −1 235° c. 930° d. 1 440°

4 Expresa en grados los siguientes ángulos.

a. $-\frac{\pi}{6}$ rad b. 0,8 rad c. $\frac{3\pi}{4}$ rad
d. -3π rad e. 4π rad f. $-\frac{9\pi}{4}$ rad
g. $-\frac{7\pi}{9}$ rad h. $\frac{13\pi}{6}$ rad i. $-\frac{5\pi}{12}$ rad
j. $-\frac{11\pi}{5}$ rad k. $-\frac{\pi}{5}$ rad l. $\frac{5\pi}{6}$ rad

Razonamiento

5 Un ángulo en posición normal tiene su vértice en el origen de coordenadas, su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas y su lado final se ubica en cualquier cuadrante.

Representa cada ángulo en posición normal e identifica sus elementos.

a. Su lado final debe estar en el primer cuadrante.

b. Su rotación debe ser de media vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

c. Su lado final debe coincidir con el semieje positivo de las ordenadas.

Resolución de problemas

6 Dos ángulos a y b son complementarios si la suma de sus medidas es igual a la medida de un ángulo recto, es decir, $a + b = 90°$. ¿Cuál es la medida, en radianes y en grados, del ángulo complementario en cada caso?

a. 15° b. 38° c. $\frac{5\pi}{12}$ d. $\frac{13\pi}{36}$

Evaluación del aprendizaje

✓ Calcula el ángulo equivalente, en sentido positivo, a cada uno de los siguientes ángulos. Utiliza la misma unidad de medida en que vienen dados.

a. −330° b. $-\frac{3\pi}{4}$ rad
c. −120° d. $-\frac{\pi}{2}$ rad

6 Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Pensamiento espacial

Saberes previos

Traza en tu cuaderno un triángulo rectángulo e identifica sus elementos y las medidas tanto de sus lados como de sus ángulos.

Analiza

Observa la Figura 2.38.

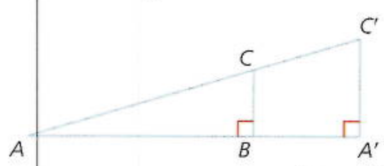


Figura 2.38

- ¿Qué razones se pueden establecer entre las medidas de los lados de los triángulos que se forman en relación con el ángulo A?

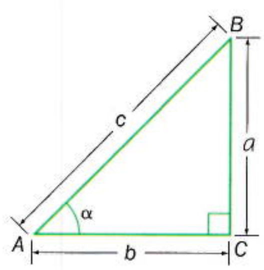


Figura 2.39

Conoce

Para determinar las razones que hay entre las medidas de los lados del $\triangle ABC$ y del $\triangle AA'C'$ en relación con el ángulo A, se tiene en cuenta que:

- Los dos triángulos comparten el ángulo A.
- El $\measuredangle B$ y el $\measuredangle A'$ por ser rectos, son congruentes; esto es, $\measuredangle B \cong \measuredangle A'$.
- Por lo anterior, los triángulos ABC y $AA'C'$ son semejantes, ya que tienen dos ángulos correspondientes congruentes. Esto se denota $\triangle ABC \sim \triangle AA'C'$ y se conoce como el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo. En consecuencia, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{A'C'}{AC'} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{AA'}{AC'} \qquad \frac{BC}{AB} = \frac{A'C'}{AA'}$$

A estas razones iguales se les denominan *seno del ángulo A*, *coseno del ángulo A* y *tangente del ángulo A*, respectivamente, y reciben el nombre de **razones trigonométricas**.

Las **razones trigonométricas** del ángulo α de la Figura 2.39 son:

$$\textbf{seno de } \boldsymbol{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\textbf{coseno de } \boldsymbol{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\textbf{tangente de } \boldsymbol{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la Figura 2.40 son semejantes, ya que son triángulos rectángulos y tienen los ángulos α y α' congruentes; por consiguiente, los lados correspondientes son proporcionales.

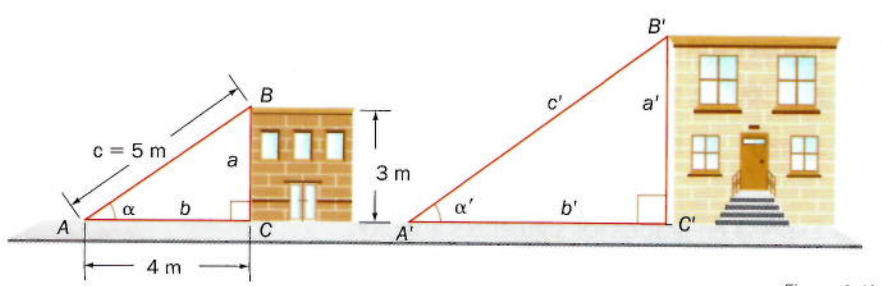


Figura 2.40

Las razones trigonométricas de los ángulos α y α' son:

seno: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{3}{5}$

coseno: $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{4}{5}$

tangente: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{3}{4}$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 8 cm, 15 cm y 17 cm, respectivamente (Figura 2.41), son:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{15}{17} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{15}{8}$$

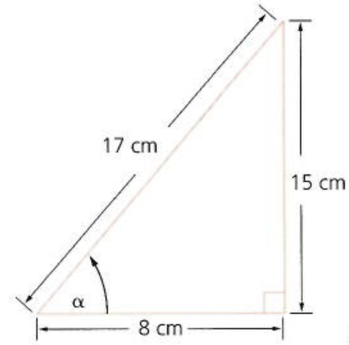


Figura 2.41

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada triángulo rectángulo.

a.

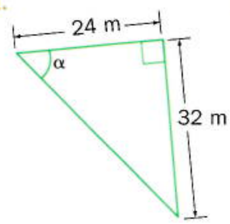


Figura 2.42

b.

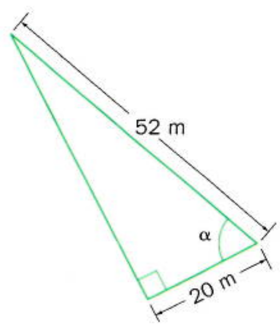


Figura 2.43

2 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de mayor amplitud de la Figura 2.44.

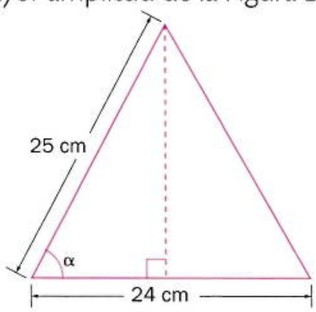


Figura 2.44

Comunicación

3 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si se sabe que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 cm y 5 cm, respectivamente.

4 Describe tres formas distintas de hallar la hipotenusa en un triángulo rectángulo cuando se conocen un cateto y un ángulo.

Resolución de problemas

5 La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 20 dm, 16 dm y 12 dm, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

Evaluación del aprendizaje

Escribe, en función de m, n y p, el seno, el coseno y la tangente de cada ángulo α.

a.

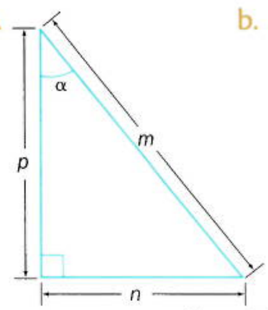


Figura 2.45

b.

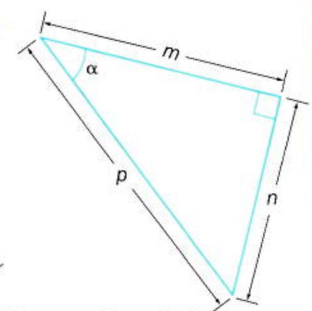


Figura 2.46

Educación ambiental

En la imagen se indica la posición de un planeta que tiene agua. ¿A qué distancia del Sol se encuentra?

- ¿Qué implicaciones para la vida tiene que exista agua fuera de la Tierra?

Pensamiento espacial

7 Razones trigonométricas de ángulos notables

Saberes previos

Traza un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 4 cm. Luego, mide los ángulos que estos forman con la hipotenusa. ¿Qué puedes conjeturar?

Analiza

En un triángulo rectángulo isósceles, los dos catetos tienen la misma longitud y los dos ángulos agudos son congruentes e iguales a 45° (Figura 2.47).

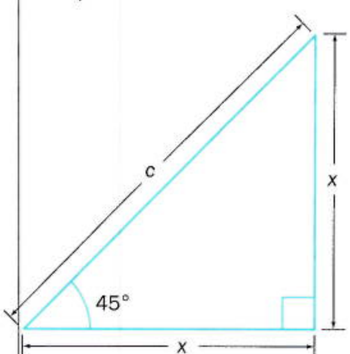


Figura 2.47

- Calcula los valores de sen45°, cos45° y tan45°.

Conoce

7.1 Razones trigonométricas del ángulo de 45°

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles mide:

$$c = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

De acuerdo con las definiciones de las razones trigonométricas, para el ángulo de 45° se tiene que:

$$\text{sen}45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan 45° = \frac{x}{x} = 1$$

A partir de la definición de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, es posible calcular los valores correspondientes a los **ángulos notables** tales como **45°**, **30°** y **60°**.

7.2 Razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

La altura de un triángulo equilátero lo divide en dos triángulos rectángulos cuyos catetos menores corresponden a la mitad del lado y cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, como se muestra en la Figura 2.48.

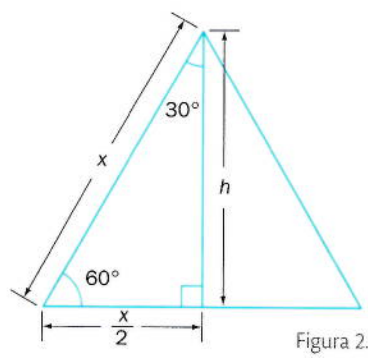


Figura 2.48

La medida de la altura se calcula con el teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Así, las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$\text{sen}60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}; \tan 60° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Por su parte, las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$\text{sen}30° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}; \cos 30° = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan 30° = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

Un faro de 45 m de altura ilumina un barco con un rayo de luz que forma un ángulo de 30° con la horizontal (Figura 2.49). Para saber la distancia a la que se encuentra el barco del faro, se utiliza la tangente del ángulo de 60°. Así:

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot \tan 60^\circ$$
$$= 45 \cdot \sqrt{3}$$
$$= 77{,}94 \text{ m}$$

Por tanto, el barco se encuentra a 77,94 m del faro.

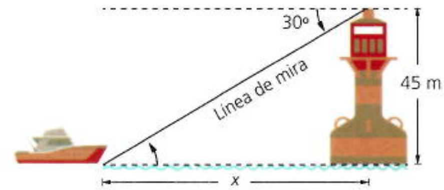


Figura 2.49

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa la Tabla 2.5.

α	$\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
			$\sqrt{3}$
30°			

Tabla 2.5

2 Determina la medida de la altura del triángulo *ABC* de la Figura 2.50.

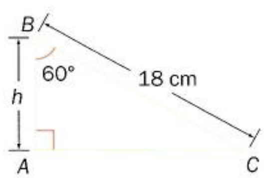


Figura 2.50

Comunicación

3 Contesta las preguntas.

a. Si el $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ¿cuándo mide el ángulo α?

b. Si la $\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ¿cuánto mide el ángulo β?

4 Calcula la medida de los ángulos del triángulo de la Figura 2.51.

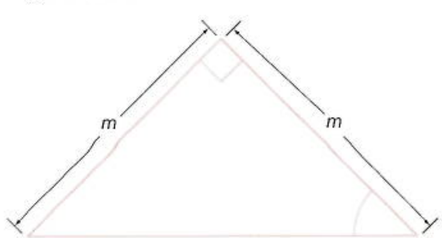


Figura 2.51

Ejercitación

5 Calcula el valor de cada expresión.

a. $\text{sen}\,45^\circ + \text{sen}\,60^\circ$

b. $\text{sen}\,30^\circ + \cos 60^\circ$

c. $\tan 45^\circ - (\cos 60^\circ + \text{sen}\,30^\circ)$

d. $\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ$

e. $\text{sen}\,45^\circ + \frac{1}{2}\cos 45^\circ$

f. $3\cos 60^\circ - 2\,\text{sen}\,30^\circ$

g. $\dfrac{\tan 30^\circ + \tan 60^\circ}{1 + \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ}$

h. $\dfrac{\cos 60^\circ - \cos 30^\circ}{\text{sen}\,30^\circ}$

Resolución de problemas

6 Una escalera alcanza una ventana situada a 3 m de altura formando un ángulo de 60º con el piso. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

7 ¿Qué distancia separa a dos carros *A* y *B* que se desplazan sobre una vía, uno al encuentro del otro, si un hombre con binóculos, situado a 200 m de la vía, observa al auto *A* con un ángulo de 30° y al auto *B* con un ángulo de 45°?

Evaluación del aprendizaje

Indica cuál es la relación entre cada par de valores.

a. $\text{sen}\,60^\circ$ y $\cos 30^\circ$

b. $\cos 60^\circ$ y $\text{sen}\,30^\circ$

c. $\tan 60^\circ$ y $\tan 30^\circ$

8 Teorema de Pitágoras

Saberes previos

Eleva los números 3, 4 y 5 al cuadrado y forma una igualdad con ellos.

Analiza

Según el teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de las medidas de los cuadrados de los catetos.

- Utiliza argumentos geométricos para demostrar este teorema.

Conoce

Para demostrar geométricamente la relación que plantea el teorema de Pitágoras, se pueden seguir estos pasos:

1. Se parte de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea a y sus catetos sean b y c (Figura 2.52).
2. Se construye un cuadrado de lado a y se dibujan cuatro triángulos congruentes al primero (Figura 2.53).
3. Se rotan dos de los triángulos (como se ve en la Figura 2.54).
4. Si se prolonga un lado, se observa que la nueva figura está formada por dos cuadrados, uno de lado b y otro de lado c. Con esto, el área del cuadrado de lado a es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados b y c, respectivamente; es decir, $a^2 = b^2 + c^2$ (Figura 2.55).

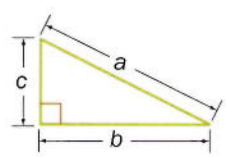


Figura 2.52

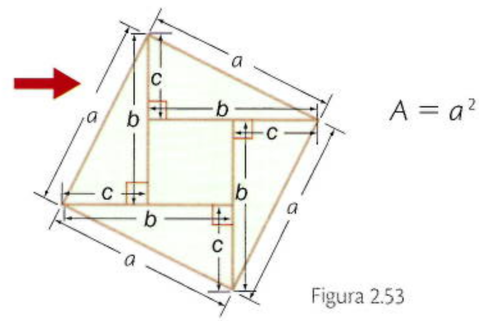


Figura 2.53

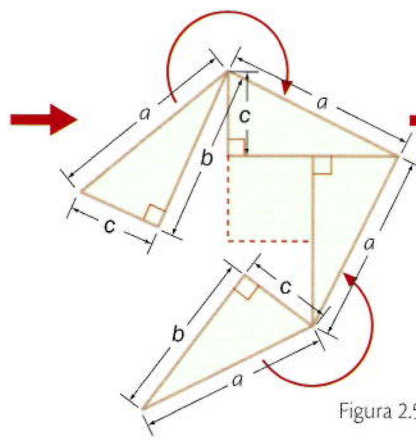


Figura 2.54

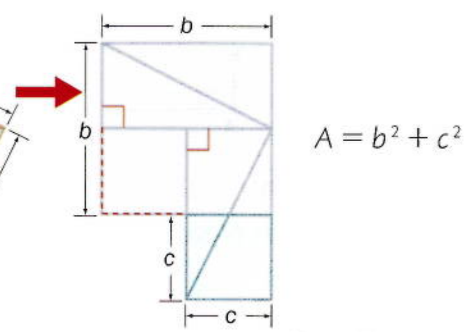


Figura 2.55

De esta forma, en un triángulo rectángulo se tiene la siguiente relación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

8.1 Medidas indirectas

Algunas longitudes no se pueden medir directamente con instrumentos; por ejemplo, alturas muy elevadas o lugares inaccesibles. Por eso se dice que son **medidas indirectas**. En esos casos, se pueden utilizar relaciones como el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1

En la Figura 2.56, la torre está situada formando un ángulo recto con los extremos del lago. En este caso, se puede utilizar el teorema de Pitágoras para hallar la medida a del largo del lago.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 40^2 + 30^2 = 2\,500$$

$$a = \sqrt{2\,500} = 50$$

Entonces, el largo del lago mide 50 m.

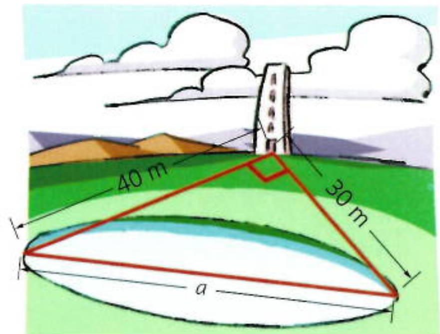


Figura 2.56

8.2 Reconocimiento de triángulos rectángulos

Un **triángulo** de lados conocidos a, b y c es **rectángulo** si cumple el teorema de Pitágoras.

Para determinar si un triángulo es rectángulo, se pueden:

1. Medir sus ángulos con un transportador para comprobar si alguno de ellos es recto.

En el triángulo de la Figura 2.57, se comprueba que $\measuredangle A$ mide 90° y, por tanto, el triángulo es rectángulo.

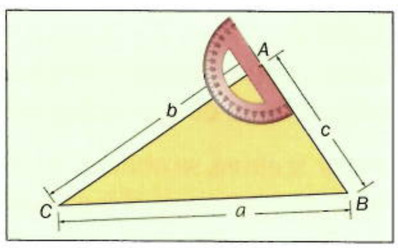


Figura 2.57

2. Medir sus lados y comprobar si cumplen o no el teorema de Pitágoras.

Si en el triángulo ABC, $a = 13$ cm, $b = 12$ cm y $c = 5$ cm, se comprueba la relación $a^2 = b^2 + c^2$, porque $13^2 = 12^2 + 5^2$. Por lo tanto, el triángulo es rectángulo.

Ejemplo 2

Observa cómo se comprueba, sin dibujar, si el triángulo de lados 4 cm, 3 cm y 2 cm es rectángulo o no.

Si es rectángulo, la hipotenusa debe ser el lado mayor (el lado de 4 cm) y se debe cumplir el teorema de Pitágoras: $4^2 = 3^2 + 2^2$

Entonces, se calcula: $4^2 = 16$ y $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

Como $16 \neq 13$, no se cumple el teorema de Pitágoras; por tanto, el triángulo no es rectángulo.

8.3 Cálculo de distancias

El teorema de Pitágoras permite calcular la **distancia entre dos puntos** que son vértices de un triángulo rectángulo o que tienen alguna relación con él.

Ejemplo 3

El dormitorio de Pablo es rectangular, y sus lados miden 3 m y 4 m. Se decidió dividirlo en dos con una cortina que une dos esquinas opuestas (Figura 2.58). Para determinar cuánto mide la cortina, se procede así:

La diagonal y los lados del dormitorio forman un triángulo rectángulo en el que la diagonal es la hipotenusa.

Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 3^2 + 4^2$$

Se opera: $d^2 = 9 + 16 = 25$

Se despeja: $d = \sqrt{25} = 5$

Por lo tanto, la cortina mide 5 m.

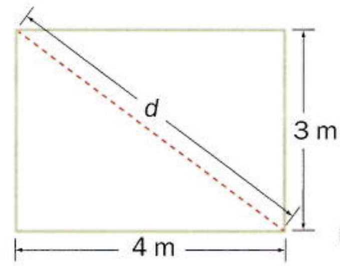


Figura 2.58

Ejemplo 4

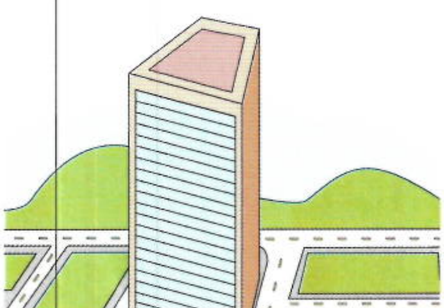


Figura 2.59

La azotea de un rascacielos es como la de la Figura 2.59. Se puede calcular la medida del lado oblicuo aplicando el teorema de Pitágoras.

Al trazar la altura, se obtiene un triángulo rectángulo: la hipotenusa es el lado oblicuo, un cateto es la altura, y el otro, la diferencia de las bases (Figura 2.60).

Por el teorema de Pitágoras: $d^2 = 8^2 + 6^2$

Se opera: $d^2 = 64 + 36 = 100$

Se despeja: $d = \sqrt{100} = 10$

Así que, el lado oblicuo mide 10 m.

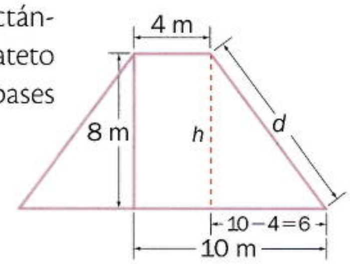


Figura 2.60

Ejemplo 5

En un hexágono regular, el segmento que une el centro con un vértice mide lo mismo que un lado. Entonces, la apotema es un cateto de un triángulo rectángulo, y el otro cateto mide la mitad del lado.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$h^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow h = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

Entonces, la apotema mide aproximadamente 8,66 cm.

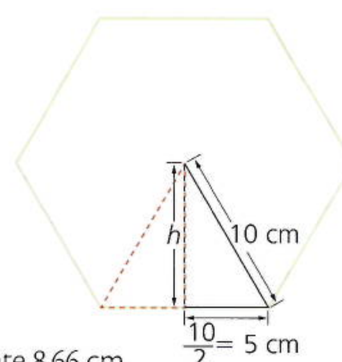


Figura 2.61

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Las ternas pitágoricas se forman con tres números enteros que cumplen la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$. Indica cuáles de las siguientes ternas de números forman una terna pitagórica. Justifica.

a. 28, 195, 197
b. 17, 144, 140
c. 11, 61, 15
d. 11, 61, 60
e. 7, 24, 25
f. 8, 9, 15
g. 9, 10, 11
h. 16, 63, 65

2 Calcula el lado desconocido de los triángulos de las figuras 2.62 y 2.63.

a.

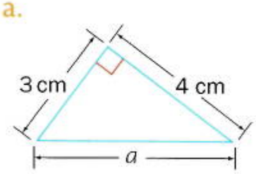


Figura 2.62

b.

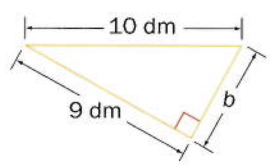


Figura 2.63

Comunicación

3 Determina el perímetro del rectángulo de la Figura 2.64, cuyas medidas de la base y la diagonal son 7 cm y 7,5 cm, respectivamente.

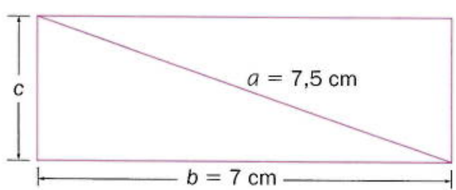


Figura 2.64

Razonamiento

4 Determina, sin hacer el dibujo, si son triángulos rectángulos aquellos cuyos lados tienen las medidas dadas.

a. 6 dm, 10 dm y 8 dm

b. 50 cm, 120 cm y 130 cm

c. 11 cm, 9 cm y 2 cm

d. 25 cm, 20 cm y 15 cm

e. 3 dm, 5 dm y 6 dm

Resolución de problemas

5 Un terreno rectangular es dividido por un río que lo atraviesa diagonalmente (Figura 2.65). El dueño necesita encerrar la parte del terreno en que se encuentran los animales. ¿Cuánta malla utilizará si las medidas de los lados que forman el ángulo recto son 12 m y 15 m?

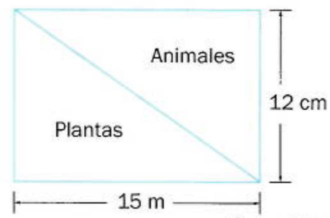


Figura 2.65

Evaluación del aprendizaje

i Dos aviones salen del mismo aeropuerto. Uno se dirige hacia el norte y el otro hacia el oriente. Cuando se encuentran, a 1 580 km uno del otro, uno de ellos ha recorrido 800 km. ¿Qué distancia ha recorrido el otro avión?

ii En el centro de una plaza que tiene forma circular de 300 m de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 m de altura. Con un teodolito situado en el borde de la plaza, se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6°. Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 m del suelo, ¿cuánto mide la estatua?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

El número 5 tenía gran simbolismo para los pitágoricos, pues era el menor número cuyo cuadrado es la suma de dos cuadrados: $5^2 = 3^2 + 4^2$; además, simbolizaba el matrimonio.

- Consulta el significado de los diez primeros números naturales para los pitágoricos y asocíalos con rasgos de tu personalidad.

9 Trayectorias y desplazamientos

Saberes previos

Escribe las indicaciones para ir desde el colegio hasta tu casa. ¿Qué palabras utilizas?

Analiza

La Figura 2.66 representa un automóvil que se ha movido en línea recta una distancia de 2 km.

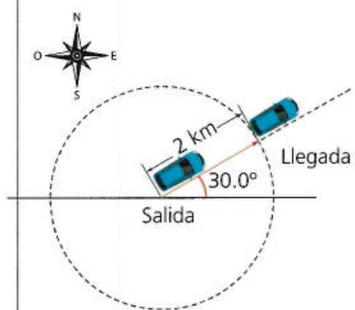


Figura 2.66

- ¿Cómo se puede describir el movimiento del automóvil de una manera más completa?

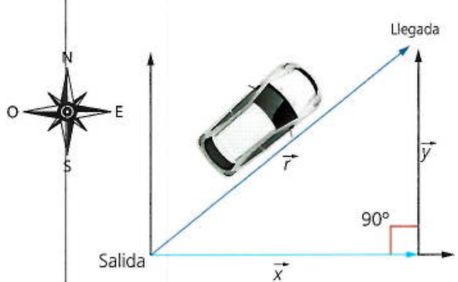


Figura 2.68

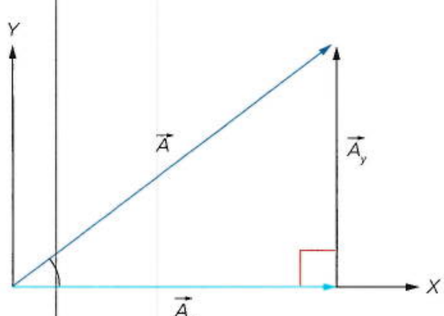


Figura 2.69

Conoce

Cuando se describe el movimiento del vehículo, resulta insuficiente decir que "se ha movido en línea recta una distancia de 2 km". Una descripción más completa debería incluir la **dirección** y el **sentido**, junto con la distancia, en un enunciado similar a "el automóvil se ha movido una distancia de 2 km en una dirección de 30° al noroeste (respecto al eje X)".

Una cantidad que se refiere tanto al valor numérico como a la dirección y al sentido de un movimiento, se llama **magnitud vectorial**. La magnitud, la dirección y el sentido son las características más importantes de un **vector**.

A menudo, magnitudes como desplazamiento, velocidad y fuerza se describen mediante vectores.

Matemáticamente, un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en un punto A y su extremo en un punto B (Figura 2.67).

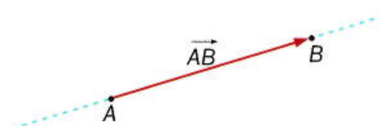


Figura 2.67

Ejemplo 1

En la Figura 2.68 el vector $\vec{r}$ representa el **desplazamiento** de un vehículo. La magnitud y dirección de $\vec{r}$ dan la distancia y dirección de la **trayectoria** en línea recta. Sin embargo, el vehículo podría haber llegado al punto final moviéndose primero al este, girando 90°, y moviéndose luego al norte. Esta trayectoria alternativa, se asocia con dos vectores de desplazamiento $\vec{x}$ y $\vec{y}$ denominados componentes del vector $\vec{r}$.

Las **componentes de un vector** tienen dos características principales: son perpendiculares y su suma vectorial es igual al vector original.

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$$

Cualquier tipo de vector se puede expresar en términos de sus componentes. Para ello, se puede usar cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo para determinarlas. Por ejemplo, para calcular las componentes del vector $\vec{A}$ de la Figura 2.69, se procede así:

$$\cos\theta = \frac{|A_x|}{|A|} \Rightarrow |A_x| = |A|\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|A_y|}{|A|} \Rightarrow |A_y| = |A|\operatorname{sen}\theta$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Un vector desplazamiento $\vec{r}$ tiene un módulo de $\vec{r} = 175$ m y apunta con un ángulo de 50° con respecto al eje *X*, como se muestra en la Figura 2.70.

Para calcular las componentes *x* y *y*, se puede considerar el triángulo rectángulo *ABC* formado por el vector $\vec{r}$ y sus componentes.

La componente *y* se puede obtener usando el ángulo de 50°:

$$\text{sen}\theta = \frac{|y|}{|r|} \Rightarrow y = r\text{sen}50° = 175 \cdot \text{sen}50° = 134 \text{ m}$$

De manera similar, la componente *x* se puede obtener con:

$$\cos\theta = \frac{|x|}{|r|} \Rightarrow x = r\cos 50° = 175 \cdot \cos 50° = 112 \text{ m}$$

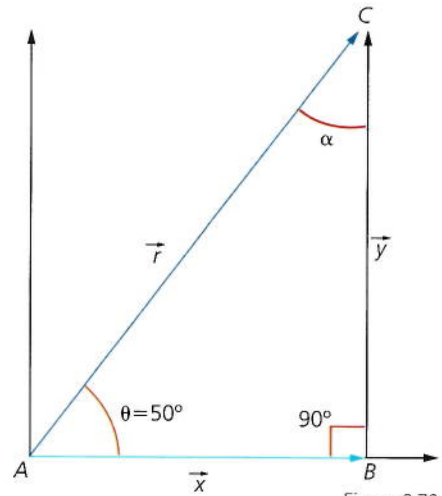


Figura 2.70

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones están relacionadas con un vector?

a. Camino 2 km a lo largo de la playa.

b. Camino 2 km al norte a lo largo de la playa.

c. Salto desde un acantilado y entro en el agua desplazándome 10 km por hora.

d. Salto desde un acantilado y entro en el agua desplazándome verticalmente a una velocidad de 10 km por hora.

Comunicación

2 Calcula la magnitud de las componentes de cada vector.

a.

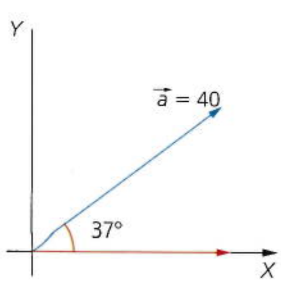


Figura 2.71

b.

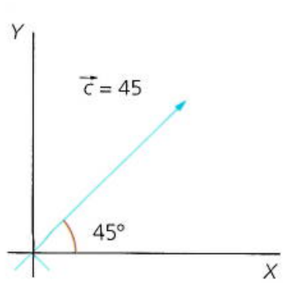


Figura 2.72

Resolución de problemas

3 El futbolista #1 está a 8,6 m de la portería. Si lanza primero a la jugadora #2, quien luego lanza a la red (Figura 2.73). ¿Cuáles son las magnitudes de estos desplazamientos sucesivos?

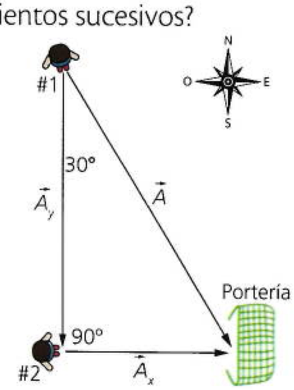


Figura 2.73

Evaluación del aprendizaje

La Figura 2.74 representa el movimiento de un automóvil que, desde un punto de salida, se desplaza 275 m hacia el este, y luego, 125 m hacia el norte. ¿Cuál es la longitud de su desplazamiento?

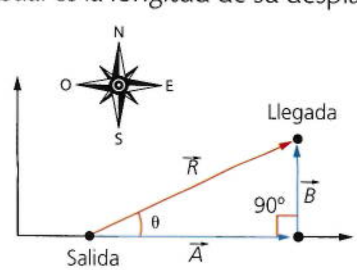


Figura 2.74

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

El proceso de la demostración

Comunicación

1 Realiza una construcción geométrica y plantea la proposición condicional correspondiente.

a. Dos rectas paralelas cortadas por una transversal determinan ángulos internos no alternos suplementarios.

b. Un punto que esté sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.

c. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

2 Prueba la falsedad de la siguiente afirmación: "Todo número primo es impar". ¿Cuál método de demostración utilizaste?

Segmentos proporcionales

Modelación

3 Realiza la construcción según las condiciones dadas.

a. Dos rectángulos cuyos lados correspondientes sean proporcionales.

b. Dos rombos cuyos lados correspondientes sean proporcionales.

c. Dos triángulos rectángulos en los que sus catetos correspondientes sean proporcionales.

d. Dos triángulos rectángulos donde la hipotenusa y un cateto correspondiente sean proporcionales.

Ejercitación

4 Halla la longitud del segmento *BG* de la Figura 2.75.

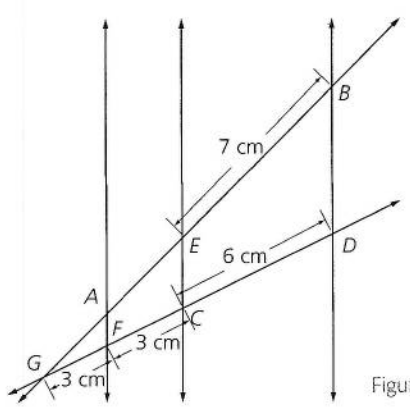


Figura 2.75

Circunferencia

5 Explica por qué las rectas de las figuras 2.76 y 2.77 no son tangentes a las circunferencias dadas.

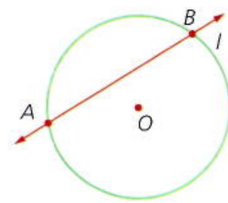


Figura 2.76

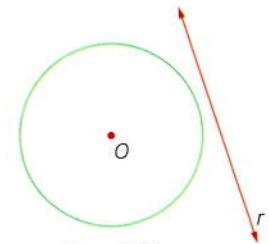


Figura 2.77

Razones trigonométricas y teorema de Pitágoras

6 Completa la Tabla 2.6.

Ángulo en grados	Ángulo en radianes
15°	
	5π
	12
57°	
124°	
	π

Tabla 2.6

7 Halla el valor de la hipotenusa y las razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a.

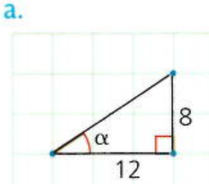


Figura 2.78

b.

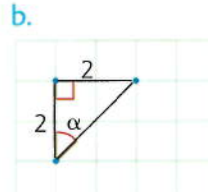


Figura 2.79

8 Evalúa cada expresión utilizando las razones trigonométricas de los ángulos notables.

a. $\operatorname{sen}30° + \cos60°$

b. $\tan45° + \operatorname{sen}60°$

c. $\cos45° - \cos30°$

d. $\operatorname{sen}30° \cdot \cos30°$

e. $\cos45° \cdot \operatorname{sen}45°$

Resolución de **problemas**

Estrategia: **Analizar un dibujo**

Problema

Observa los triángulos de la Figura 2.80.

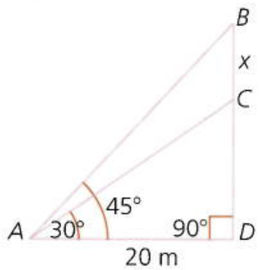


Figura 2.80

¿Cuál es el valor de x?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes observar en la Figura 2.80?
  R: Dos triángulos rectángulos con un lado en común.
- ¿Qué debes encontrar?
  R: El valor de x en la figura.

2. Crea un plan

- Identifica cada uno de los triángulos involucrados, establece relaciones entre sus lados y propón una estrategia para calcular el valor de x.

3. Ejecuta el plan

- Los triángulos ΔADB y ΔADC comparten el lado $\overline{AD}$.
- Como $m\measuredangle A = 45°$ y $m\measuredangle D = 90°$, entonces $m\measuredangle B = 45°$; por lo tanto, el ΔADB es isósceles. Luego, $AD = BD = 20$ m.
- En ΔADC, se tiene que $\tan 30 = \frac{CD}{20}$. Al despejar, se obtiene $CD = 20\tan 30° = 11{,}55$ m.
- Como $x + CD = 20$ m, entonces:

$$x + 11{,}55 \text{ m} = 20 \text{ m}$$
$$x = 20 \text{ m} - 11{,}55 \text{ m}$$
$$x = 8{,}45 \text{ m}$$

R: El valor de x es 8,45 m.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que la hipotenusa del triángulo rectángulo ADB mide a $20\sqrt{2}$ m.

Aplica la estrategia

1. En la circunferencia de la Figura 2.81 se ha trazado una de sus cuerdas.

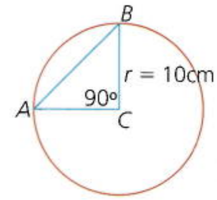


Figura 2.81

¿Cuál es la longitud de dicha cuerda?

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. La rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 120 cm. Si la rueda gira un ángulo de 120°, ¿a cuánto equivale el ángulo de giro en radianes?

Formula problemas

3. Inventa un problema que involucre la información de la Figura 2.82 y resuélvelo.

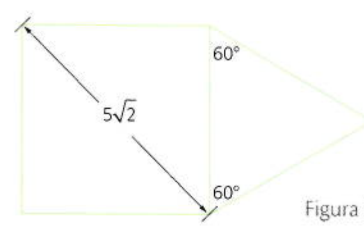


Figura 2.82

Enriquece tu vocabulario

- Explica con tus palabras lo que entiendes por razón y proporción.

Evaluación del aprendizaje

El proceso de la demostración

Razonamiento

1 Realiza una construcción geométrica para cada enunciado y plantea la proposición condicional correspondiente. PREGUNTA ABIERTA

a. Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

b. En todo rectángulo las diagonales son congruentes.

c. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes.

2 Analiza la Figura 2.83. PREGUNTA ABIERTA

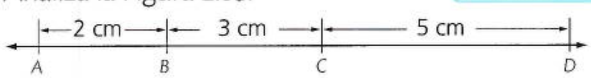


Figura 2.83

¿Será verdad que $\frac{AB + BC}{CD} = 1$? Justifica tu respuesta.

3 Completa la demostración de la Tabla 2.7.

Si en el ΔABC, $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ y $\overline{CD}$ es bisectriz del $\measuredangle C$, entonces $\measuredangle CAD \cong \measuredangle CBD$. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

Afirmación	Justificación
$\overline{AB} \cong \overline{BD}$	
$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$	
$\overline{CD} \cong \overline{CD}$	Todo segmento es congruente consigo mismo.
$\Delta ADC \cong \Delta BDC$	
$\measuredangle CAD \cong \measuredangle CBD$	

Tabla 2.7

Circunferencia y teorema de Pitágoras

Comunicación

4 Discute con un compañero: ¿Qué relación existe entre las tangentes de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo? ACTIVIDAD DE REFUERZO

Resolución de problemas

5 En un triángulo rectángulo ABC, $\measuredangle A = 45° = \measuredangle C$. Si la hipotenusa mide 10 cm, ¿cuánto mide cada cateto? ACTIVIDAD DE REFUERZO

Comunicación

6 Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo si se sabe que los catetos miden 1 dm y 12 dm, respectivamente. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Razonamiento

7 Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 16 cm. ACTIVIDAD DE REFUERZO

8 Calcula la medida de estos segmentos.

a. La altura de un triángulo equilátero de 8 cm de lado. ACTIVIDAD DE REFUERZO

b. La altura de un trapecio isósceles de bases 4 cm y 6 cm, y lados congruentes de 5 cm.

9 Lee y realiza lo que se indica a continuación. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Los lados de un triángulo miden 3 cm, 4 cm y 6 cm.

a. Dibuja el triángulo y mide sus ángulos. ¿El triángulo es rectángulo?

b. Comprueba si cumple o no el teorema de Pitágoras.

Resolución de problemas

10 Dibuja una circunferencia de 5 cm de radio. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. ¿Cuánto mide su diámetro?

b. ¿Puedes trazar una cuerda de 4 cm? Explica.

c. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

d. Traza una recta secante y una recta tangente a la circunferencia.

11 ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 7 cm de radio? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

12 Observa la Figura 2.84. Si $\overline{HI} \cong \overline{LM}$, utiliza las propiedades de los arcos, cuerdas y ángulos centrales para encontrar la medida de $\overline{OK}$. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

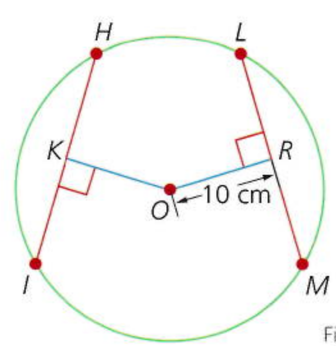


Figura 2.84

Trayectorias y desplazamientos

Ejercitación

13 Luis se desplaza 4 km hacia el este y luego 3 km hacia el norte. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Representa los desplazamientos de Luis con vectores.

b. ¿Cuál será su desplazamiento total? Utiliza el teorema de Pitágoras para calcularlo.

Razones trigonométricas de triángulos rectángulos

Ejercitación

Tabla 2.8

14 Halla las razones trigonométricas de cada triángulo rectángulo de las figuras 2.85 a 2.88.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

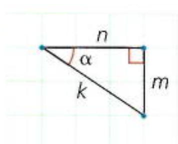


Figura 2.85

b.

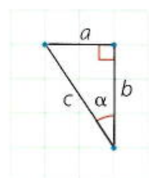


Figura 2.86

c.

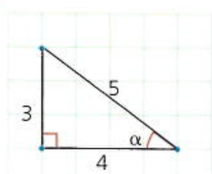


Figura 2.87

d.

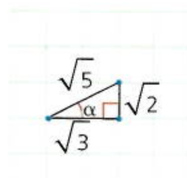


Figura 2.88

Comunicación

15 Lee y resuelve. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Si $\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$ y $\cos\beta = \frac{12}{13}$:

a. Representa el triángulo rectángulo y ubica los valores correspondientes.

b. Calcula la razón trigonométrica tangente para el ángulo β.

c. Calcula las razones trigonométricas para el otro ángulo agudo del triángulo.

Razones trigonométricas de ángulos notables

16 Encuentra el valor de x en cada triángulo.

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a.

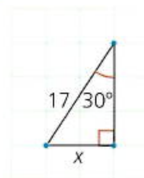


Figura 2.89

b.

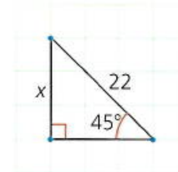


Figura 2.90

c.

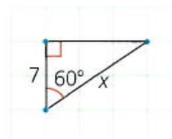


Figura 2.91

d.

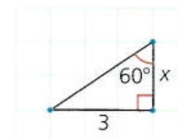


Figura 2.92

e.

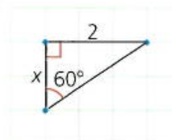


Figura 2.93

f.

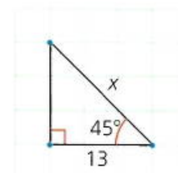


Figura 2.94

Resolución de triángulos rectángulos

Resolución de problemas

17 Resuelve las siguientes situaciones.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Si la sombra del árbol de la Figura 2.95 es de 12 m, halla su altura.

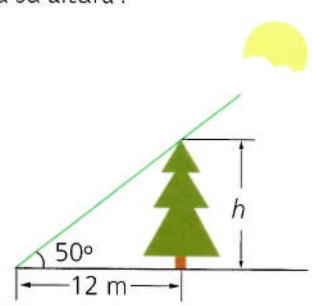


Figura 2.95

b. Halla la distancia entre el edificio de la Figura 2.96 y el peatón que se encuentra a la izquierda.

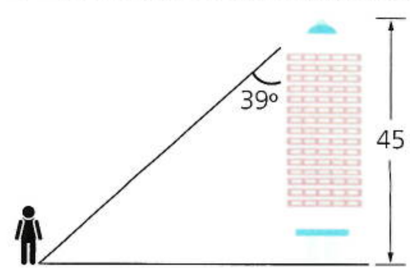
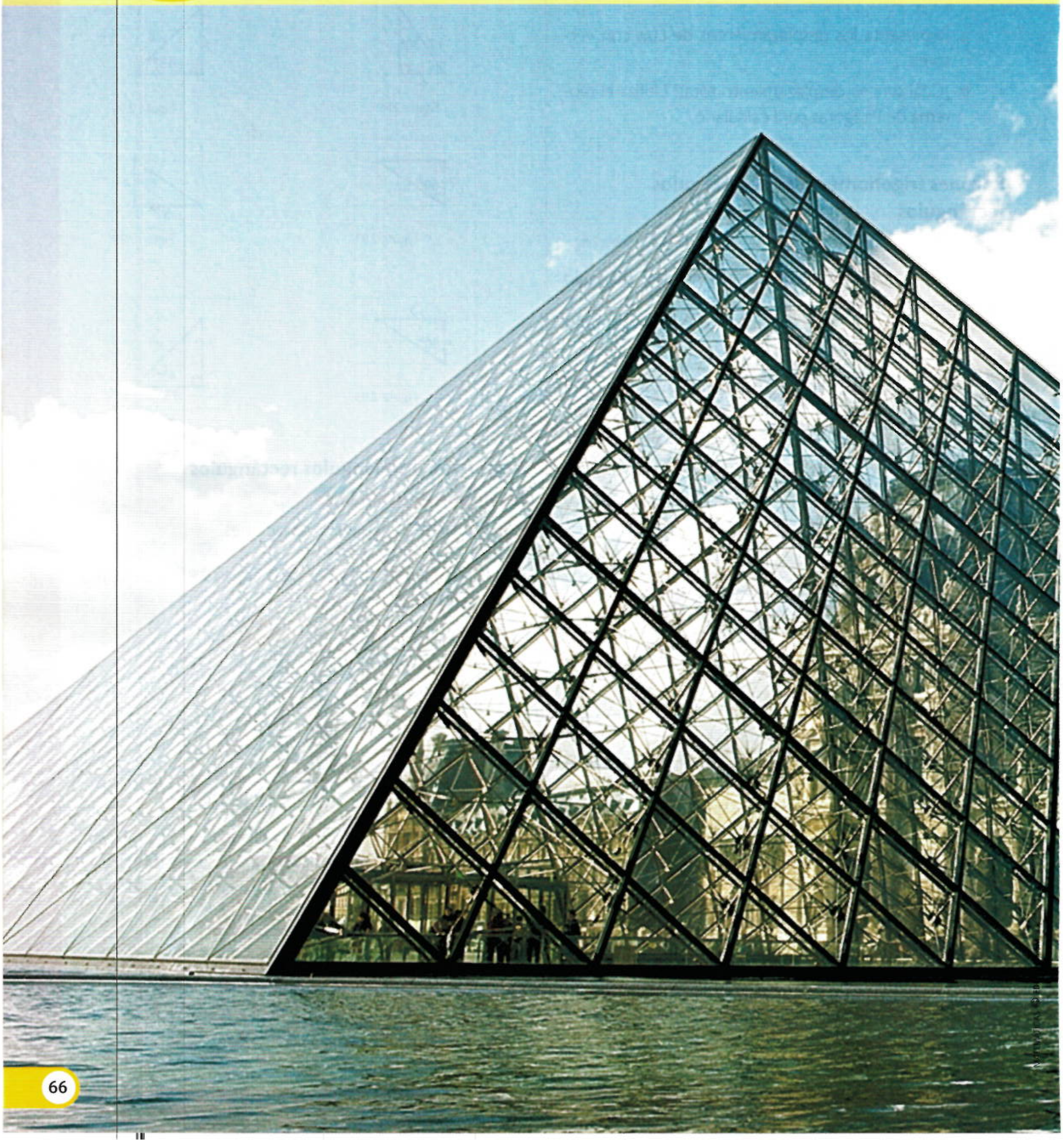


Figura 2.96

3 Longitudes, áreas y volúmenes



Ya sabemos

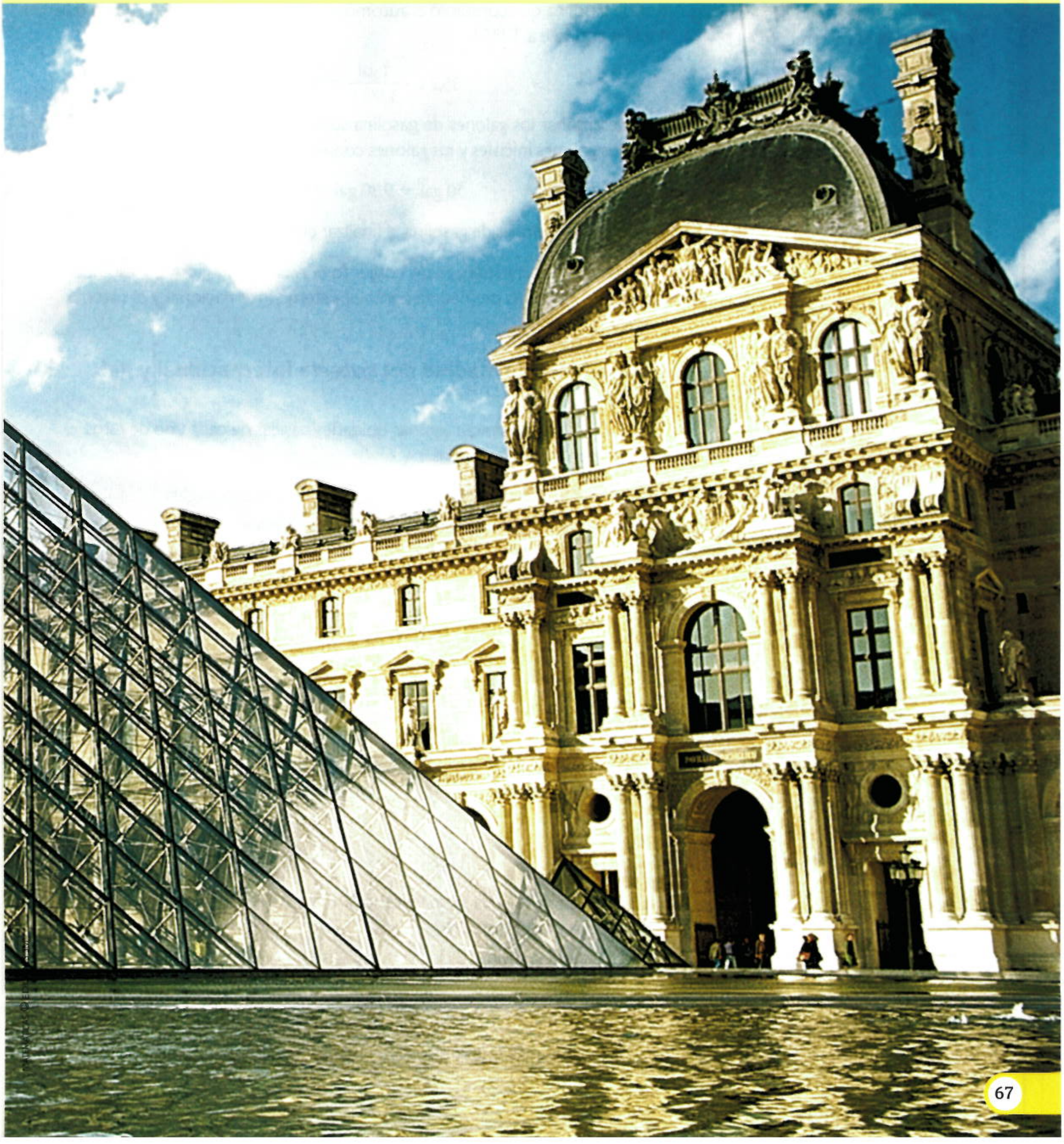
- Efectuar operaciones con números reales.
- Calcular el área de algunas figuras planas.

Vamos a aprender

- A calcular el área y el volumen de algunos cuerpos geométricos.

Nos sirve para

- Resolver problemas cotidianos que involucren el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos.



1 Sistemas de medida internacional y anglosajón. Conversiones

Saberes previos

Con una botella de capacidad 5 L y otra de capacidad 3 L, ¿cómo puedes medir exactamente 4 L?

Analiza

Manuel llenó el tanque de su automóvil con diez galones de gasolina para salir de viaje. Si en el recorrido gastó 35,2 L, ¿cuántos galones de gasolina le quedan en el tanque?

Conoce

Para saber cuántos galones de gasolina sobraron es necesario convertir los litros de gasolina que consumió el automóvil a galones, teniendo en cuenta que 1 galón equivale a 3,785 L.

$$35{,}2\ \text{L} \cdot \frac{1\ \text{gal}}{3{,}785\ \text{L}} = 9{,}30\ \text{gal}$$

Para determinar los galones de gasolina sobrantes se debe hallar la diferencia entre los galones iniciales y los galones consumidos.

$$10\ \text{gal} - 9{,}30\ \text{gal} = 0{,}7\ \text{gal}$$

Quedaron 0,7 galones de gasolina al finalizar el recorrido.

Un **sistema de unidades** es un conjunto consistente, uniforme y estandarizado de unidades de medida como el **sistema internacional** y el **sistema inglés**.

1.1 Unidades de medida del sistema internacional y del sistema inglés

En la Tabla 3.1 se presentan algunas unidades básicas de cada uno de estos sistemas con sus equivalencias.

Sistema internacional		Sistema inglés	
Magnitud	**Unidad básica**	**Unidad básica**	**Equivalencias**
Longitud	Metro (m)	Pulgada (in)	1 in = 2,54 cm
		Pie (ft)	1 ft = 30,48 cm
		Yarda (yd)	1 yd = 0,914 m
		Milla (mi)	1 mi = 1,609 km
Masa	Kilogramo (kg)	Libra (lb)	1 lb = 453,6 g
		Onza (oz)	1 oz = 28,35 g
		Tonelada (t)	1 t = 907,2 kg
Capacidad	Litro (L)	Galón (gal)	1 gal = 3,785 L
		Cuarto de galón (qt)	1 qt = 946,4 mL
		Pie cúbico (ft^3)	1 ft^3 = 28,32 L

Tabla 3.1

Ejemplo 1

En una carrera atlética Jorge recorrió 80,6 ft y Andrés recorrió 56 yd. ¿Quién recorrió la mayor distancia?

Jorge

$$80{,}6\ \text{ft} \cdot \frac{30{,}48\ \text{cm}}{1\ \text{ft}} \cdot \frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}} = 24{,}57\ \text{m}$$

Andrés

$$56\ \text{yd} \cdot \frac{0{,}914\ \text{m}}{1\ \text{yd}} \cdot = 51{,}20\ \text{m}$$

Andrés recorrió la mayor distancia en la carrera atlética.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Expresa en kilogramos cada masa.

a. 753 lb b. 9 435 g c. 87,3 oz d. 4,86 t

2 Expresa en metros cada longitud.

a. 166 in b. 370 ft c. 28 yd d. 0,77 mi

3 Expresa en litros las siguientes capacidades.

a. 15 gal b. 3 qt

c. 0,12 ft^3 d. 5 qt

Comunicación

4 Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué es más pesado, 5 toneladas de plumas o 4 536 kg de hierro?

b. ¿Cuántos miligramos hay en 0,82 oz?

c. ¿Cuántos gramos hay en 0,012 t?

d. ¿Cuántos centímetros hay en 2 ft?

Razonamiento

5 Encierra en un círculo del mismo color las medidas equivalentes.

1,47 m	60 g	1,6 yd	2 gal
19,05 cm	340,2 kg	84,96 L	7,5 in
7,6 L	3 ft	2,12 oz	750 lb

Resolución de problemas

6 En la Tabla 3.2 se presentan las cantidades de alcohol necesarias para preparar diferentes perfumes. ¿Cuántos gramos de alcohol se deben emplear en la preparación de cada perfume?

Perfume	Onzas de alcohol	Gramos de alcohol
Perfume 1	0,78	
Perfume 2	1,74	
Perfume 3	2,85	

Tabla 3.2

7 Se requiere llenar un tanque con 250 000 mL de agua. El tanque tiene un volumen de 8,33 ft^3. ¿Cuántos mL de agua puede almacenar el tanque? ¿Tiene el tanque la capacidad para almacenar toda el agua?

Evaluación del aprendizaje

La Figura 3.1 corresponde al recorrido de un automóvil de una ciudad a otra. Lee la bitácora de viaje (informe que el conductor entrega a la empresa sobre el recorrido) e interpreta la gráfica para contestar las preguntas.

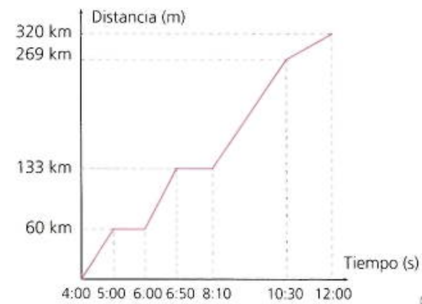


Figura 3.1

Bitácora de viaje

- Salí de Bogotá el miércoles 13 de abril a las 4:00 de la mañana.
- Me detuve solo dos veces, la primera para cargar diésel y la segunda para almorzar.
- En mi recorrido un tramo de la carretera estaba en reparación.

a. ¿De cuántos metros fue el recorrido?

b. ¿Cuántos minutos duró el recorrido?

c. ¿Cuánto tiempo se detuvo en cada parada?

d. ¿Cuántas millas recorrió el automóvil durante las dos primeras horas?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Se cree que el sistema inglés de medidas surgió en la edad media, ya que algunas medidas como el pie, la braza y el codo, fueron adoptadas tomando como base ciertas partes del cuerpo. Consulta acerca de otras unidades de medida utilizadas en la edad media. ¿Qué inconvenientes presentaban estas unidades en las relaciones culturales de las personas?

2 Magnitudes físicas

Saberes previos

Para ir al colegio desde su casa, Juan cuenta 867 pasos y Ana, 933 cuartas. Si el paso de Juan mide 25 cm y la cuarta de Ana mide 13 cm. ¿Quién recorrió la mayor distancia?

Analiza

La masa de un cubo metálico es 0,255 kg y cada arista tiene una longitud de 2 cm. ¿Cuál es la densidad del cubo metálico expresada en kg/cm³?

Conoce

Para determinar la densidad del cubo metálico es necesario conocer su masa y su volumen. Primero, se halla el volumen teniendo en cuenta que $V = a^3$, donde a es la arista del cubo.

$$V = (2\text{ cm})^3 = 8\text{ cm}^3$$

$$\text{Densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{0{,}255\text{ kg}}{8\text{ cm}^3} = 0{,}032\text{ kg/cm}^3$$

La densidad del cubo es 0,032 kg/cm³.

Las **magnitudes** son atributos con los que se miden determinadas propiedades físicas. Existen **magnitudes escalares** que son aquellas determinadas por un valor numérico y una unidad de medida, y las **magnitudes vectoriales,** donde se especifica además de un valor numérico, la dirección y el sentido.

2.1 Unidades de medida de magnitudes físicas

En la Tabla 3.3 se presentan las fórmulas con las que se determinan algunas de las magnitudes físicas y sus unidades de medida.

Magnitud	Fórmula	Unidad Básica
Densidad	$d = \frac{m}{v}$, donde m es masa y v es volumen	kg/cm³
Rapidez media	Rapidez $= \frac{d}{t}$, donde d es distancia y t es tiempo	m/s
Aceleración	$\vec{a} = \frac{\vec{v}}{t}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad y t es tiempo	m/s²
Fuerza	$F = m \cdot \vec{a}$, donde m es masa y a es aceleración	$N = kg \cdot m/s^2$
Trabajo	$W = F \cdot d$, donde F es fuerza y d es distancia	$J = N \cdot m$, donde J es julios
Potencia	$P = \frac{W}{t}$, donde W es trabajo realizado y t es tiempo	$W = J/s$, donde W es vatios
Energía potencial	$E_p = m \cdot g \cdot h$, donde m es la masa, g es la gravedad y h es la altura.	$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$, donde J es Julios.
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2$, donde m es la masa y v es la velocidad.	

Tabla 3.3

Ejemplo 1

Un avión parte del reposo, acelera en la pista y en 29 s alcanza una velocidad de 260 km/h. Para determinar su aceleración se realiza el siguiente procedimiento:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{t} = \frac{260 \text{ km/h} - 0 \text{ km/h}}{29 \text{ s}} = 8{,}97 \; \frac{\text{km/h}}{\text{s}} = 2{,}49 \text{ m/s}^2$$

Por lo tanto, la aceleración del avión es 2,49 m/s^2.

En el trabajo con magnitudes físicas es necesario realizar el análisis dimensional para conocer en qué unidades queda expresada la respuesta. Para hallar la **aceleración** de un cuerpo, la ecuación de la fuerza se despeja en términos de la aceleración y se obtiene:

$$\vec{a} = \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}{\text{kg}} = \frac{\frac{\cancel{\text{kg}} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}{\cancel{\text{kg}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ejemplo 2

Una fuerza de 90 N actúa sobre un cuerpo que tiene 450 kg de masa. Para hallar su aceleración $\vec{a}$, se aplica la fórmula:

$$F = m \cdot \vec{a}$$

Se despeja la anterior ecuación en términos de la aceleración.

$$\vec{a} = \frac{F}{m} = \frac{90 \text{ N}}{450 \text{ kg}} = 0{,}2 \; \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La aceleración del cuerpo es 0,2 m/s^2.

Ejemplo 3

Para saber qué requiere más trabajo, hacer una fuerza de 120 N para arrastrar un bulto de cemento en una carretera de 300 m, o hacer una fuerza de 60 N para arrastrar un bulto de arena en una carretera de 600 m, se aplica la fórmula del trabajo.

$$W = F \cdot d$$

Se halla el trabajo para la carretera de 300 m.

$$W = 120 \text{ N} \cdot 300 \text{ m} = 36\,000 \text{ J}$$

Se determina el trabajo realizado en la carretera de 600 m.

$$W = 60 \text{ N} \cdot 600 \text{ m} = 36\,000 \text{ J}$$

Por lo tanto, para arrastrar el bulto de cemento y el bulto de arena aplicando las fuerzas indicadas se requiere el mismo trabajo.

La **unidad del trabajo** en el SI es el Julio (J) y se define como el trabajo que realiza una fuerza de 1 N sobre un cuerpo que se desplaza 1 metro en la misma dirección y sentido de la fuerza. La **unidad de la potencia** en el SI es el Vatio (W) y se define como la potencia necesaria para hacer un trabajo de 1 J en un segundo.

Ejemplo 4

Una grúa eleva un peso de 350 N a una altura de 15 metros en 7 segundos.

El trabajo se obtiene de la siguiente manera.

$$W = F \cdot d$$

$$W = 350 \text{ N} \cdot 15 \text{ m} = 5\,250 \text{ J}$$

La grúa hizo un trabajo de 5 250 J.

La potencia se obtiene con la siguiente expresión.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{5\,250 \text{ J}}{7 \text{ s}} = 750 \text{ W}$$

La potencia de la grúa es 750 W.

La **unidad de la energía cinética** en el SI es la misma unidad que la del trabajo, es decir, el Julio (J). Esto permite concluir que la energía y el trabajo están estrechamente relacionados, pues cuando una fuerza externa neta realiza un trabajo sobre un objeto, la energía cinética cambia desde un valor inicial (E_0) a un valor final (E_f). La diferencia entre E_0 y E_f es igual al trabajo.

Ejemplo 5

Un cuerpo de 8 kg de masa se encuentra en reposo a una altura de 10 m.

La energía potencial se obtiene de la siguiente manera.

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$E_p = 8 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 784 \text{ J}$$

La energía potencial del cuerpo es 784 J.

La energía cinética se obtiene como se muestra a continuación.

$$E_c = \frac{1}{2} \ m \cdot v^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ kg} \cdot \left(0 \frac{m}{s}\right)^2 = 0 \text{ J}$$

Como el cuerpo está en reposo, se asume que su velocidad es 0 m/s². En este caso su energía cinética es 0 J.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 En la Tabla 3.4 se relacionan la masa y el volumen de diferentes sustancias. A partir de la información, determina la densidad de cada una en g/cm³.

Sustancia	Masa (g)	Volumen (cm³)	Densidad (g/cm³)
A	8,33	2,29	
B	5,25	4,88	
C	11,53	6,28	
D	43,07	11	
E	50	6,26	

Tabla 3.4

Resolución de problemas

2 Una ambulancia se mueve con una velocidad de 180 km/h. Si tiene que recorrer una autopista recta de 90 km, ¿qué tiempo necesita para llegar a su destino?

3 ¿Qué distancia puede recorrer un corredor en 2,5 horas si su rapidez media es 3,35 m/s?

4 Un automóvil inicia su recorrido con una velocidad de 70 km/h y luego de 55 segundos alcanza una velocidad de 180 km/h. Determina la aceleración del automóvil.

5 Un cuerpo metálico con masa de 800 kg acelera a razón de 2,5 m/s². ¿Qué fuerza lo impulsó?

6 ¿Qué masa debe tener un cuerpo para que una fuerza de 450 N lo acelere a razón de 10 m/s²?

7 ¿Qué trabajo hizo una persona para arrastrar un baúl al que se le aplica una fuerza de 5 N si recorrió 100 m?

8 Calcula la potencia de una máquina que ejecuta un trabajo de 2 300 julios en 35 s.

Evaluación del aprendizaje

i La Figura 3.2 presenta la relación entre la masa y el volumen de tres sustancias diferentes.

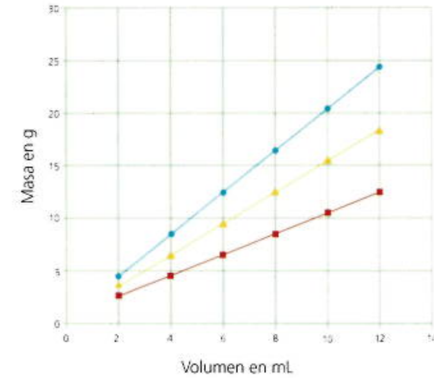


Figura 3.2

a. ¿Cuál es la densidad de cada sustancia?

b. ¿Qué volumen tiene 20 g de la sustancia A?

ii Resuelve cada situación.

a. Un automóvil recorre una pista de carreras que tiene 200 km de largo y vuelve al mismo en el que partió. Si demora 4 horas en hacer el recorrido, ¿cuál es su rapidez media?

b. Una patrulla de policía aumenta su velocidad de 0 a 30 m/s en 15 segundos. ¿Cuál es su aceleración?

c. Calcula el trabajo y la potencia de un motor que desplaza un objeto a 75 m en 12 segundos empleando una fuerza de 300 N.

d. Calcula la masa de un cuerpo que situado a una altura de 20 metros tiene una energía potencial de 700 J.

Estilos de vida saludable

La frecuencia cardíaca depende del estado de salud, de la edad, del esfuerzo físico, entre otras y se puede ver alterada por el consumo de sustancias psicoactivas.

- Determina tu frecuencia cardíaca en diferentes actividades. Arma una tabla y compara las medidas.

3 Longitudes de cuerdas y segmentos

Pensamiento métrico

Saberes previos

Traza una circunferencia en tu cuaderno y ubica dos puntos: uno interior y otro exterior. ¿Cuántas rectas tangentes a la circunferencia puedes trazar por el punto exterior?

Analiza

En la Figura 3.3, $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son cuerdas de la circunferencia que se cortan en el punto E.

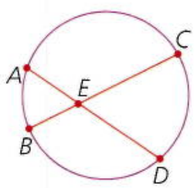


Figura 3.3

- Si se sabe que $EC = 12$ cm, $BE = 6$ cm y que $ED = 3(AE)$, ¿cuánto mide ED y AE?

Conoce

3.1 Longitudes de cuerdas

Como $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son cuerdas de una misma circunferencia que se intersecan en el punto E, se cumple que $AE \cdot ED = BE \cdot EC$. Para encontrar la medida de ED y AE, se reemplazan los datos conocidos en la regla anterior y se despeja la medida desconocida como se muestra a continuación.

Como $AE \cdot ED = BE \cdot EC$

$$AE \cdot ED = 6\text{ cm} \cdot 12\text{ cm}$$
$$AE \cdot 3(AE) = 72\text{ cm}^2$$
$$3(AE)^2 = 72\text{ cm}^2$$
$$AE^2 = 24\text{ cm}^2$$
$$AE = \sqrt{24\text{ cm}^2} = 2\sqrt{6}\text{ cm}$$

Por lo tanto, $AE = \sqrt{24\text{ cm}^2} = 2\sqrt{6}$ cm y $ED = 3(AE) = 6\sqrt{6}$ cm.

Para dos **cuerdas que se intersecan en el interior de una circunferencia** se cumple que el producto de las longitudes de los segmentos en los que queda dividida una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos en que queda dividida la otra cuerda.

La propiedad anterior se puede replantear de la siguiente manera:

Dadas las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ de la circunferencia de la Figura 3.4, que se intersecan en el punto E, entonces $AE \cdot ED = BE \cdot EC$.

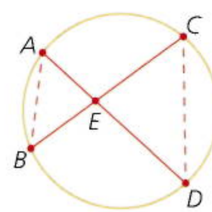


Figura 3.4

La demostración se muestra en la Tabla 3.5.

Afirmación	Justificación
Se construyen $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$	Construcción.
$\measuredangle ABC \cong \measuredangle CDA$ y $\measuredangle DAB \cong \measuredangle DCB$	Ángulos inscritos que intersecan el mismo arco.
$\triangle ABE \sim \triangle CDE$	Criterio de semejanza ángulo-ángulo.
$\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CE}{DE}$	Lados correspondientes de triángulos semejantes.
$AE \cdot ED = BE \cdot EC$	Propiedad de las proporciones.

Tabla 3.5

Ejemplo 1

En la Figura 3.5, $AE = 3$ cm y $EC = 27$ cm. Como el diámetro $\overline{AC}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{DB}$, entonces $\overline{AC}$ biseca a $\overline{DB}$; es decir, $DE = EB = x$.

Por la propiedad de las cuerdas que se intersecan en el interior de una circunferencia, se tiene que $AE \cdot EC = DE \cdot EB$. Al reemplazar en esta igualdad los datos iniciales, se obtiene lo siguiente:

$$3 \cdot 27 = x \cdot x \Rightarrow 81 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{81} = 9$$

Por lo tanto, $DE = EB = 9$ cm y $DB = 18$ cm.

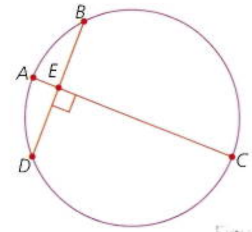


Figura 3.5

3.2 Longitudes de segmentos tangentes

Los **segmentos tangentes trazados desde un punto exterior a una circunferencia** son congruentes y determinan ángulos congruentes con el segmento que une el punto exterior con el centro.

La propiedad anterior se puede enunciar de la siguiente manera:

Si $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ son segmentos tangentes a la circunferencia de la Figura 3.6, que se intersecan en el punto P exterior a esta, entonces $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ y $\measuredangle QPC \cong \measuredangle RPC$.

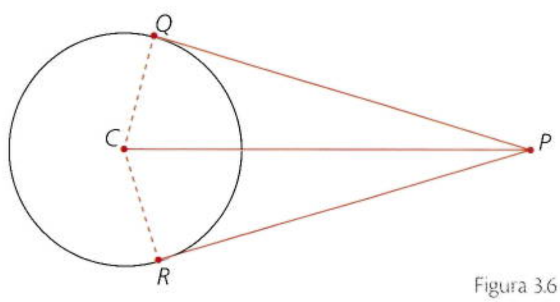


Figura 3.6

La demostración de esta propiedad se evidencia en la Tabla 3.6.

Afirmación	Justificación
$\overline{CQ} \perp \overline{QP}$ y $\overline{CR} \perp \overline{RP}$. $\triangle CQP$ y $\triangle CRP$ son triángulos rectángulos.	Los radios de una circunferencia son perpendiculares a las tangentes por su punto de tangencia.
$\overline{CQ} \cong \overline{CR}$	Radios de la misma circunferencia.
$\overline{CP} \cong \overline{CP}$, $\overline{CP}$ es la hipotenusa de los triángulos rectángulos CQP y CRP.	Propiedad reflexiva.
$\triangle CQP \cong \triangle CRP$	Criterio de congruencia cateto-hipotenusa.
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	Lados correspondientes de triángulos congruentes.
$\measuredangle QPC \cong \measuredangle RPC$	Ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

Tabla 3.6

3.3 Longitudes de segmentos secantes

Para dos **segmentos secantes trazados desde un punto exterior a una circunferencia** se cumple que el producto de las longitudes de un segmento secante y de su segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y de su segmento externo.

Esta propiedad se puede enunciar de la siguiente manera:

Dados los segmentos secantes $\overline{EB}$ y $\overline{ED}$ que se cortan en el punto E exterior a la circunferencia, entonces $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ (Figura 3.7).

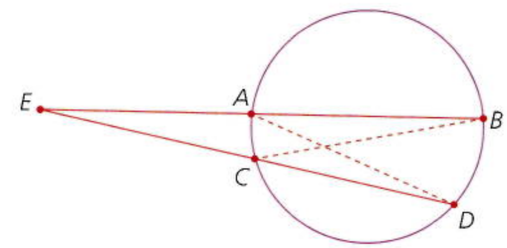


Figura 3.7

La demostración de la propiedad anterior se muestra en la Tabla 3.7.

Afirmación	Justificación
Se construyen $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$	Construcción
$\measuredangle EDA \cong \measuredangle EBC$	Ángulos inscritos que intersecan el mismo arco.
$\measuredangle AED \cong \measuredangle CEB$	Propiedad reflexiva.
$\triangle AED \sim \triangle CEB$	Criterio de semejanza ángulo-ángulo.
$\frac{AE}{CE} = \frac{ED}{EB}$	Lados correspondientes de triángulos semejantes.
$AE \cdot EB = CE \cdot ED$	Propiedad de las proporciones.

Tabla 3.7

Ejemplo 2

En la Figura 3.8 se observa que $PB = 6 + x$, y que $\overline{PD}$ y $\overline{PB}$ son segmentos secantes de la misma circunferencia.

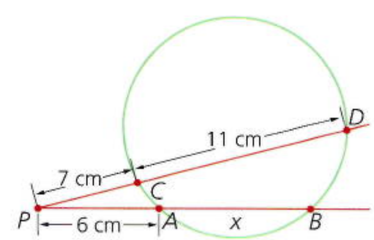


Figura 3.8

Aplicando la propiedad $PB \cdot PA = PD \cdot PC$ de las longitudes de segmentos secantes, se obtiene lo siguiente:

$$(6 + x) \cdot 6 = (7 + 11) \cdot 7 \Rightarrow 36 + 6x = 126 \Rightarrow x = 15$$

Por lo tanto, $AB = 15$ cm y $PB = 21$ cm.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina el valor de x de acuerdo con la información presentada en las figuras.

a.

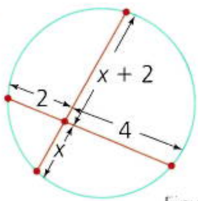


Figura 3.9

b.

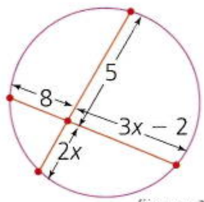


Figura 3.10

c.

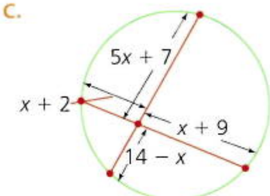


Figura 3.11

d.

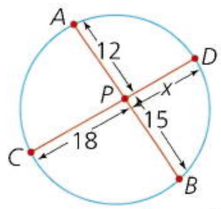


Figura 3.12

2 Halla el valor de x en las figuras teniendo en cuenta que los segmentos representados en cada caso son secantes a la circunferencia.

a.

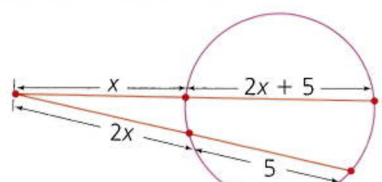


Figura 3.13

b.

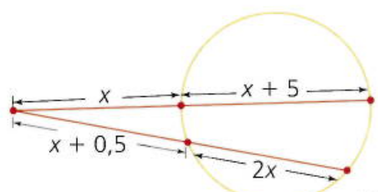


Figura 3.14

c.

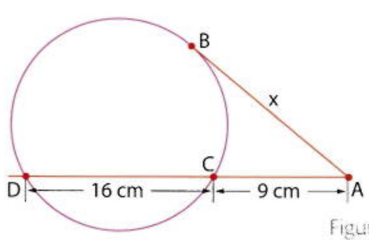


Figura 3.15

d.

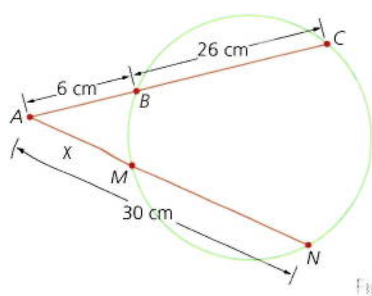


Figura 3.16

Razonamiento

3 Determina si cada afirmación es verdadera o falsa.

a. Un segmento secante a una circunferencia la corta en dos puntos.

b. Un segmento tangente y uno secante a una circunferencia se pueden intersecar en tres puntos.

c. Dos segmentos secantes a una circunferencia pueden intersecarla en cuatro puntos diferentes.

d. En una circunferencia se pueden trazar infinitos segmentos secantes.

e. Si dos segmentos tangentes a una misma circunferencia se intersecan en el exterior de esta, se puede afirmar que los segmentos tienen la misma medida.

Ejercitación

4 En la Figura 3.17, $EC = 24$ cm, $CD = 18$ cm y $AB = 3(AP)$. ¿Cuánto mide el segmento secante PB?

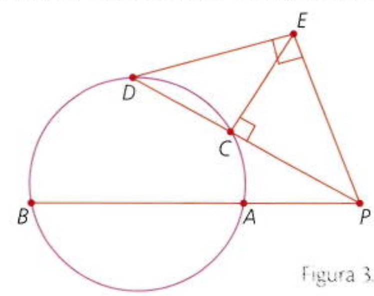


Figura 3.17

Evaluación del aprendizaje

i Desde un punto P, exterior a una circunferencia de centro O, se traza la recta tangente PT (T es punto de tangencia) y la recta secante PB, que contiene al diámetro AB ($PB > PA$).

Si el segmento tangente PT mide 12 cm y el radio de la circunferencia 5 cm, ¿cuánto mide el segmento PA?

ii $\overline{EB}$ y $\overline{ED}$ son rectas secantes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior E. $\overline{EB}$ corta a la circunferencia en A y en B, y $\overline{ED}$ lo hace en C y en D.

Si se sabe que $AE = 10$ cm, $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia, $EA \cdot AB = 180$ cm^2 y $\overline{CD}$ es un radio de la circunferencia, ¿cuál es la medida de $\overline{EC}$?

4 Cálculo de longitudes en un triángulo rectángulo

Saberes previos

Dibuja diferentes triángulos y mide los ángulos interiores. Calcula la suma de estos y da una conclusión al respecto.

Analiza

La hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de la Figura 3.18 mide 10 cm.

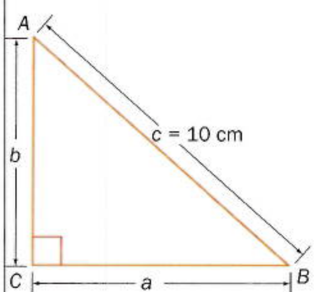


Figura 3.18

- Halla la medida de los ángulos agudos y de los catetos.

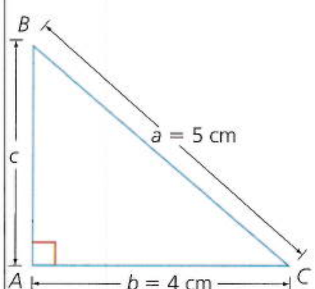


Figura 3.19

Conoce

Dado que *ACB* es un triángulo rectángulo, se sabe que $m\measuredangle C = 90°$. Además, por ser isósceles, los ángulos agudos son congruentes entre sí. Es decir:

$$m\measuredangle A + m\measuredangle B = 90° \Rightarrow m\measuredangle A = m\measuredangle B = 45°$$

Para averiguar la medida del cateto b, se realiza lo siguiente:

$$\text{sen}45° = \frac{b}{10}, \Rightarrow b = 10 \cdot \text{sen}45 = 7{,}07 \text{ cm}$$

Al ser $a = b$, el lado a mide también 7,07 cm. El triángulo queda resuelto así:

$$a = 7{,}07 \text{ cm} \quad b = 7{,}07 \text{ cm} \quad c = 10 \text{ cm}$$

$$m\measuredangle A = 45° \quad m\measuredangle B = 45° \quad m\measuredangle C = 90°$$

Resolver un triángulo consiste en hallar la medida de todos sus lados y de todos sus ángulos.

Ejemplo 1

En el triángulo rectángulo de la Figura 3.19 se observa que $m\measuredangle A = 90°$, $a = 5$ cm y $b = 4$ cm. Para determinar la medida del cateto c y la medida de los ángulos, se puede proceder de la siguiente manera:

- Por el teorema de Pitágoras, se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 - 4^2$$
$$\Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \text{ cm}$$

- $\cos C = \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

  Por lo tanto, $C = \arccos 0{,}8 = 36° \, 52' \, 12''$.

- Dado que $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180° \Rightarrow m\measuredangle B + m\measuredangle C = 90°$

$$\Rightarrow m\measuredangle B = 90° - m\measuredangle C$$
$$\Rightarrow m\measuredangle B = 90° - 36° \, 52' \, 12''$$
$$\Rightarrow m\measuredangle B = 53° \, 7' \, 48''$$

4.1 Teorema de la altura

El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma.

Ejemplo 2

Por el teorema de Pitágoras, en el triángulo rectángulo *BCH* de la Figura 3.20 se cumple que:

$$a^2 = m^2 + h^2$$

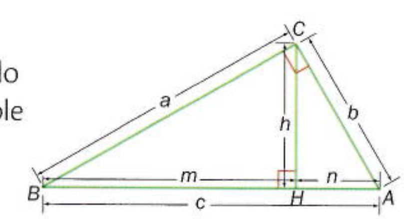


Figura 3.20

Por el teorema de la altura se tiene que $h^2 = m \cdot n$.

Luego, $a^2 = m^2 + m \cdot n = m(m + n) = m \cdot c$.

Ejemplo 3

Para calcular la medida del lado a del triángulo rectángulo de la Figura 3.21, se aplican el teorema de la altura y el teorema de Pitágoras.

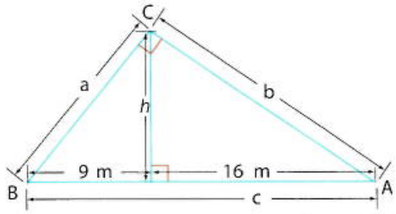


Figura 3.21

- Por el teorema de la altura:

$h^2 = 9 \cdot 16 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12 \text{ m}$

- Por el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 225 \Rightarrow a = 15 \text{ m}$

4.2 Teorema del cateto

El cuadrado de un cateto de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa por la proyección del cateto sobre la misma.

Ejemplo 4

Para resolver el triángulo rectángulo de la Figura 3.22, en primer lugar se tiene en cuenta que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 18 m y 32 m, respectivamente. Por lo tanto, la medida de la hipotenusa c es:

$$18 \text{ m} + 32 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

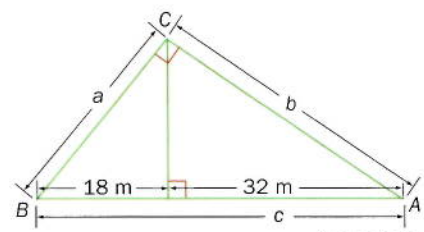


Figura 3.22

Además, por el teorema del cateto se cumple que:

$$a^2 = 18 \cdot 50 \Rightarrow a^2 = 900 \Rightarrow a = 30$$

$$b^2 = 32 \cdot 50 \Rightarrow b^2 = 1600 \Rightarrow b = 40$$

Como $\cos B = \dfrac{18}{30} = 0{,}6$, entonces $m\measuredangle B = \arccos 0{,}6 = 53°\,7'\,48''$.

Análogamente:

$$m\measuredangle A = \arccos \frac{32}{40} = 36°\,52'\,12''$$

Por lo tanto:

$$a = 30 \text{ m} \qquad b = 40 \text{ m} \qquad c = 50 \text{ m}$$

$$m\measuredangle A = 36°\,52'\,12'' \quad m\measuredangle B = 53°\,7'\,48'' \quad m\measuredangle C = 90°$$

Ejemplo 5

En la Figura 3.23 se observa el triángulo rectángulo ACB.

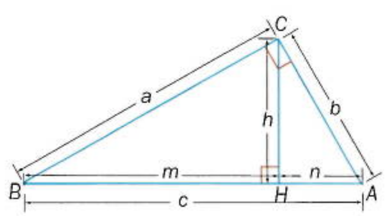


Figura 3.23

- Por el teorema del cateto se cumple que:

$$a^2 = m \cdot c \text{ y } b^2 = n \cdot c$$

4 Cálculo de longitudes en un triángulo rectángulo

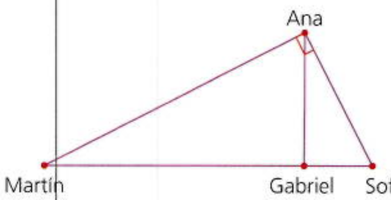


Figura 3.24

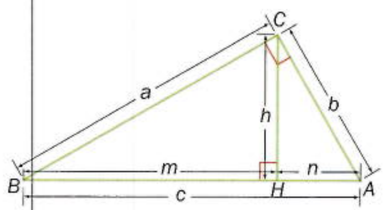


Figura 3.25

Ejemplo 6

Las casas de Sofía, Ana, Gabriel y Martín están ubicadas como se muestra en la Figura 3.24. La distancia de la casa de Sofía a la de Martín es de 3 km y la distancia de la casa de Sofía a la de Gabriel es 1,08 km. Para determinar cuántos kilómetros de distancia hay entre algunas de las casas se procede de la siguiente manera:

La situación se puede representar como en la Figura 3.25. Por lo tanto,

- Distancia de la casa de Gabriel a la de Martín:
$$m = c - n = 3 \text{ km} - 1{,}08 \text{ km} = 1{,}92 \text{ km}$$
- Distancia de la casa de Sofía a la de Ana (por el teorema del cateto):
$$b^2 = n \cdot c = 1{,}08 \text{ km} \cdot 3 \text{ km} = 3{,}24 \text{ km}^2 \Rightarrow b = 1{,}8 \text{ km}$$
- Distancia de la casa de Ana a la de Gabriel (por el teorema de Pitágoras):
$$h^2 = b^2 - n^2 \Rightarrow h^2 = (1{,}8)^2 - (1{,}08)^2 = 2{,}0736 \Rightarrow h = 1{,}44 \text{ km}$$

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la medida de los lados y los ángulos que faltan en los triángulos de las figuras.

a.

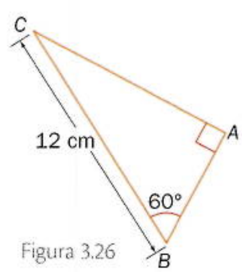


Figura 3.26

b.

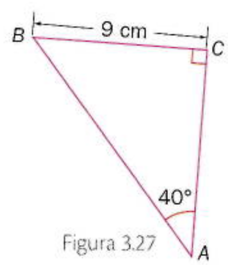


Figura 3.27

c.

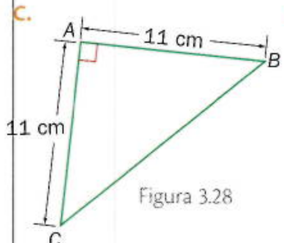


Figura 3.28

d.

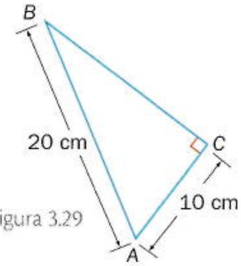


Figura 3.29

e.

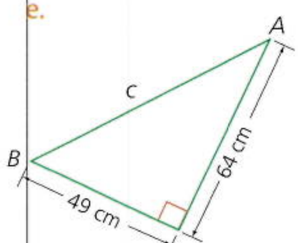


Figura 3.30

f.

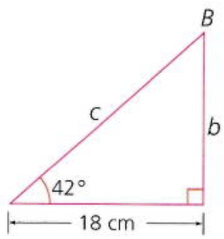


Figura 3.31

Razonamiento

2 Responde estas preguntas. Razona tus respuestas.

a. ¿Qué elementos de un triángulo rectángulo hay que conocer para resolverlo?

b. ¿Se puede resolver un triángulo conociendo solo dos de su ángulos? ¿Por qué?

Comunicación

3 Lee y resuelve.

Un **ángulo de depresión** es el que se forma entre la línea horizontal y la línea visual entre un observador y un objeto situado por debajo de la horizontal.

Desde la cima de un faro de 8 m de altura se divisa una lancha con un ángulo de depresión de 8º. La situación se representa en la Figura 3.32.

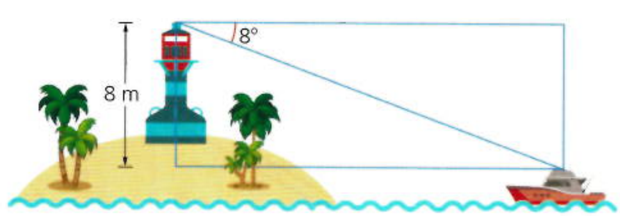


Figura 3.32

Calcula la distancia entre la lancha y el pie del faro en ese mismo instante.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Razonamiento

4 Halla las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa y uno de los catetos miden 4 cm y 2 cm, respectivamente.

5 Determina la medida de la altura sobre el lado desigual de un triángulo isósceles, si dicho lado mide 16 m y se sabe que el ángulo desigual es de 80º.

6 Calcula la medida del lado de un rombo en el que la diagonal mayor mide 8 cm y forma con cada lado contiguo un ángulo de 26°.

7 Explica si es posible resolver un triángulo rectángulo conociendo la altura sobre la hipotenusa y la proyección de uno de los catetos sobre la misma.

8 Halla la medida de los ángulos del trapecio rectángulo de la Figura 3.33.

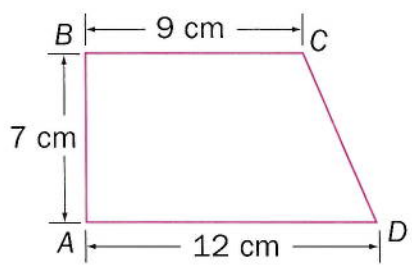


Figura 3.33

Resolución de problemas

9 Un avión de combate localiza un barco enemigo con un ángulo de depresión de 28º. Si el avión vuela a 3 200 m de altura, ¿cuál es la distancia a la que se encuentra el barco enemigo?

10 Usa el teorema de la altura para proponer cómo se podría construir un segmento cuya longitud sea la media proporcional entre dos segmentos de 4 cm y 9 cm. ¿Cómo se podría construir si los segmentos son de *a* cm y *b* cm?

11 Encuentra la longitud de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 10 cm y el cateto menor 6 cm.

12 De un triángulo rectángulo se conoce que su hipotenusa mide 20 cm y la suma de los catetos mide 24 cm. ¿Cuánto mide su área?

13 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 m y 27 m. ¿Cuál es la longitud de la altura del triángulo con respecto a la hipotenusa?

14 Juan subió en un globo aerostático hasta una altura de 50 m. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo, como aparece en la Figura 3.34.

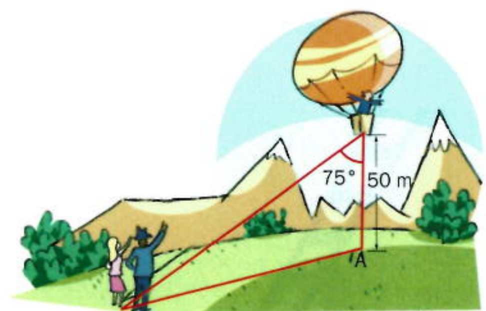


Figura 3.34

a. ¿A qué distancia del punto *A* se encuentran los padres de Juan?

b. Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo de observación de Juan es de 60°, ¿a cuántos metros de altura se encontraría el globo en ese momento?

Evaluación del aprendizaje

i En el momento del día en que los rayos del Sol forman un ángulo de 60° con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 m y la de otro es de 1,9 m. ¿Cuánto mide de alto cada árbol?

ii Unas cigüeñas construyeron su nido sobre el tejado de un edificio a 25 m del suelo. Un niño lo observa desde un punto situado a 50 m del edificio.

a. Calcula el ángulo de observación del niño.

b. Calcula el ángulo de observación de las cigüeñas.

5 Teorema de Tales

Saberes previos

¿Qué son rectas paralelas? Dibuja una recta en una hoja y explica cómo construyes una recta que sea paralela a ella por un punto dado.

Analiza

Un obrero apoya una escalera sobre una pared y atraviesa un palo de 2 m para ayudarla a sostener. La situación se modela en la Figura 3.35.

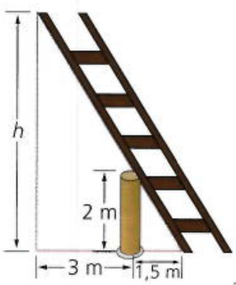


Figura 3.35

- ¿A qué altura está el borde superior de la escalera del piso?

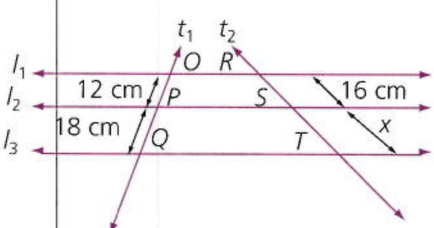


Figura 3.36

Conoce

Para hallar h se establece la siguiente proporción:

$$\frac{1{,}5}{2} = \frac{4{,}5}{h} \Rightarrow h = 6 \text{ m}$$

Por lo tanto, el borde superior de la escalera está a 6 m del piso.

El teorema de Tales es un importante enunciado en el que se afirma lo siguiente:

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos rectas transversales, entonces los segmentos de las transversales, determinados por las paralelas, son proporcionales.

Ejemplo 1

Como en la Figura 3.36 se cumple que $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{l_3}$, entonces la medida de $\overline{ST}$ se calcula con el siguiente procedimiento:

$$\frac{OP}{RS} = \frac{PQ}{ST} \longleftarrow \text{Se plantea la proporción.}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{18}{x} \longleftarrow \text{Se reemplazan los datos conocidos.}$$

$$12 \cdot x = 16 \cdot 18 \longleftarrow \text{Se aplica la propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$x = 24 \longleftarrow \text{Se resuelve la ecuación.}$$

El teorema de Tales es útil en la demostración de otros teoremas geométricos, como el que se enuncia a continuación.

Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e interseca a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a dichos lados.

Ejemplo 2

El teorema anterior se puede aplicar para determinar la medida de $\overline{NC}$ en el $\triangle ABC$ de la Figura 3.37.

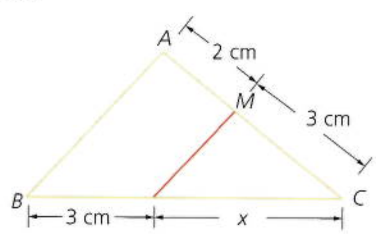


Figura 3.37

Como $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$, se cumple que $\frac{BC}{NC} = \frac{AC}{MC}$.

Luego, se reemplazan los datos conocidos y se determina el valor desconocido, así:

$$\frac{3 + x}{x} = \frac{5}{3} \Rightarrow 9 + 3x = 5x$$

Por lo tanto, $x = 4{,}5$ cm.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Encuentra la longitud desconocida en las figuras.

a.

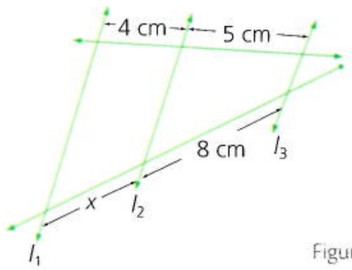


Figura 3.38

$\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{l_3}$

b.

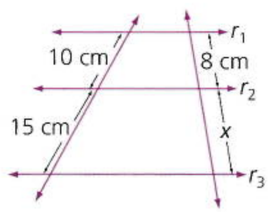


Figura 3.39

$\overleftrightarrow{r_1} \parallel \overleftrightarrow{r_2} \parallel \overleftrightarrow{r_3}$

c.

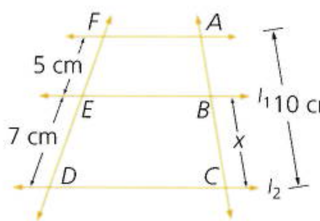


Figura 3.40

$\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

Modelación

2 Para determinar la altura de la torre de una iglesia se midió la altura y la sombra que proyecta un árbol como se observa en la Figura 3.41.

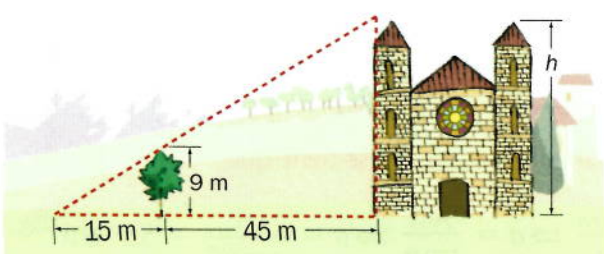


Figura 3.41

Calcula la altura de la torre de la iglesia.

Comunicación

3 Para saber la altura del silo (depósito de trigo) de un pueblo, se alinea con él un palo y se mide su sombra como se muestra en la Figura 3.42.

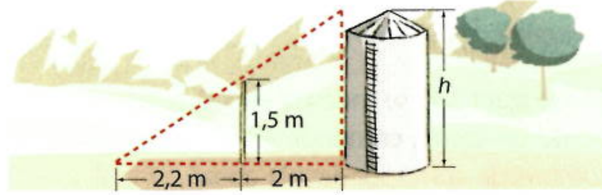


Figura 3.42

Halla la altura del silo.

4 A la misma hora del día, se miden las sombras que proyectan la torre del reloj y el obelisco de una plaza. Halla la altura de la torre del reloj.

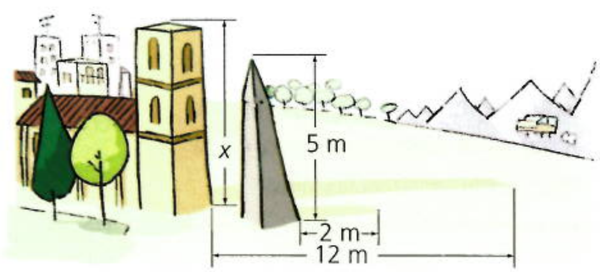


Figura 3.43

Evaluación del aprendizaje

i Si la distancia real entre dos ciudades es de 65 km, al medir en un mapa elaborado a una escala de 1 : 300 000, ¿qué distancia las separa?

ii Halla el valor de x. Ten en cuenta que $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son paralelos.

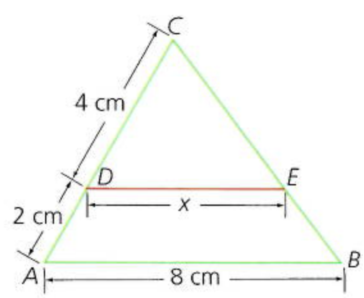


Figura 3.44

6 Longitudes y áreas de figuras planas

Saberes previos

¿Qué diferencia hay entre área y perímetro?

Analiza

En la Figura 3.45 se muestra el plano de un teatro, en donde el área sombreada corresponde a la zona de silletería.

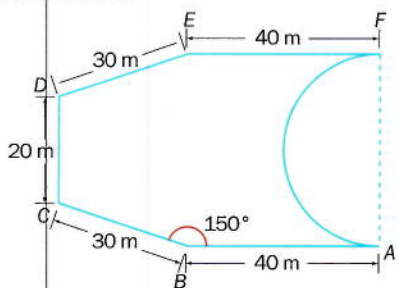


Figura 3.45

- Según la información de la figura, ¿cuál es el área de la zona en la que se encuentran las sillas?

Conoce

En la Figura 3.46 se observa que el plano del teatro tiene una forma irregular; por eso, para hallar su área se realiza el siguiente procedimiento:

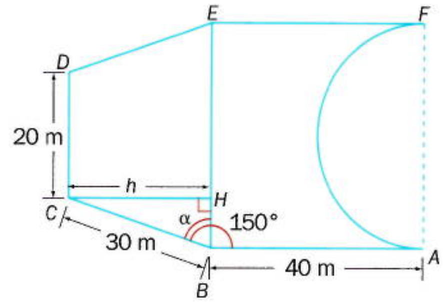


Figura 3.46

- Se traza una altura h del trapecio isósceles $BCDE$ desde el vértice C. Entonces, $\triangle BHC$ es un triángulo rectángulo y $\alpha = 150° - 90° = 60°$.

$$\text{sen}60° = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 25{,}98 \text{ m y } \cos 60° = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 15 \text{ m}$$

Como $BC = DE$, se tiene que $\overline{BE}$ mide $15 + 20 + 15 = 50$ m.

Por lo tanto, $A_{\text{Trapecio}} = \dfrac{B+b}{2} \cdot h = \dfrac{50+20}{2} \cdot 25{,}98 = 909{,}3 \text{ m}^2$.

- El área del rectángulo $ABEF$ es $40 \cdot 50 = 2\,000 \text{ m}^2$.

Por ser $AF = BE$, el radio de la circunferencia que pasa por A y por F mide 25 m.

Así, $A_{\text{Círculo}} = \pi r^2 = \pi \cdot 25^2 = 1\,963{,}5 \text{ m}^2$.

- Entonces, el área ocupada por la zona de silletería es:

$$A = 909{,}3 + 2\,000 - \frac{1\,963{,}5}{2} = 1\,927{,}55 \text{ m}^2$$

Las razones trigonométricas proporcionan herramientas para el cálculo de **longitudes y áreas de algunas figuras planas**.

Ejemplo 1

Se quiere calcular el área del pentágono regular de lado 8 cm que se muestra en la Figura 3.47.

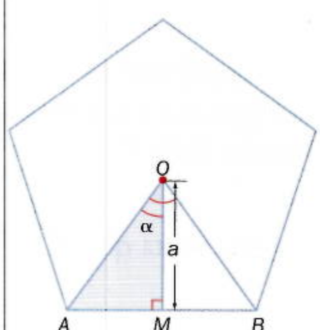


Figura 3.47

Para hallar la medida de la apotema, se une el centro con dos vértices consecutivos. Los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ determinan el ángulo central O. Luego:

$$m\measuredangle O = \frac{360°}{5} = 72°$$

La apotema divide el $\measuredangle AOB$ en dos ángulos congruentes y al $\overline{AB}$ en dos segmentos congruentes. Así, $\alpha = 36°$ y $\overline{AM} = 4$ cm.

Por ser $\triangle AMO$ un triángulo rectángulo, se tiene que:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AM}}{a} \Rightarrow a = \frac{\overline{AM}}{\tan\alpha} \Rightarrow a = \frac{4}{\tan 36°} = 5{,}51 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el área del pentágono es:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{40 \cdot 5{,}51}{2} = 110{,}2 \text{ cm}^2$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Para hallar el área del octágono regular de la Figura 3.48 se procede de la siguiente manera:

Como el octágono es regular, entonces se deduce que:

$$m\measuredangle POQ = \frac{360°}{8} = 45°$$

Dado que la apotema a divide al $\measuredangle POQ$ en dos ángulos congruentes y forma un ángulo recto con el lado del octágono, entonces:

$$m\measuredangle POR = 22{,}5°$$

Así, $\operatorname{sen}22{,}5° = \frac{PR}{49} \Rightarrow PR = 49 \cdot \operatorname{sen}22{,}5° = 18{,}75$ mm.

Además, $PQ = 2PR$, por lo cual, el lado del octágono es:

$$PQ = 2 \cdot 18{,}75 \text{ mm} = 37{,}5 \text{ mm}$$

Para determinar la apotema, se tiene en cuenta que:

$$\cos 22{,}5° = \frac{a}{49} \Rightarrow a = 49 \cdot \cos 22{,}5° = 45{,}27 \text{ mm}$$

Por último, el área del octágono regular es:

$$A = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{(8 \cdot 37{,}5) \cdot 45{,}27}{2} = 6\,790{,}5 \text{ mm}^2$$

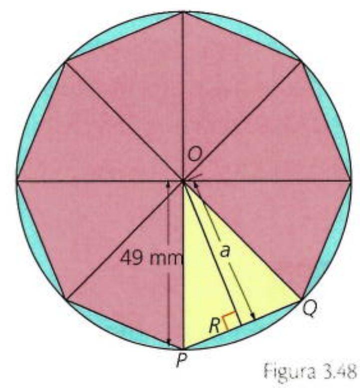


Figura 3.48

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el área y el perímetro de los polígonos que se presentan a continuación.

a.

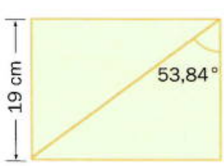


Figura 3.49

b.

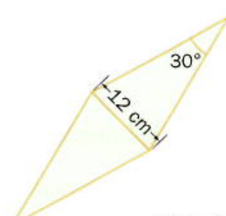


Figura 3.50

Comunicación

2 Calcula la longitud de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita en un octágono regular cuyo lado mide 12 m.

3 Halla el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

4 Calcula el área de un triángulo rectángulo, si las proyecciones de sus catetos sobre la hipotenusa miden 14,4 cm y 25,6 cm, respectivamente.

Evaluación del aprendizaje

i Halla el perímetro y el área de un rectángulo en el que la diagonal mide 28,84 dm y forma con la base un ángulo de 33° 41′ 24″.

ii En la Figura 3.51 se muestra el plano de un terreno con forma de paralelogramo.

a. ¿Cuál es el área del terreno?

b. Si se quiere cercar el terreno con tres vueltas de alambre, ¿qué cantidad se necesita?

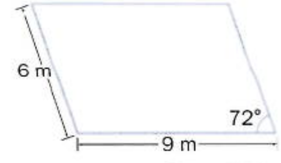


Figura 3.51

7 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Saberes previos

Un galón de pintura alcanza para pintar 10 m² y se deben pintar dos paredes que miden 3,5 m de largo y 2,7 m de alto y 5,25 m de largo y 1,8 m de alto, respectivamente. ¿Cuál pared tiene una mayor superficie? ¿Alcanzará el galón de pintura para cubrir ambas superficies?

Analiza

En una fábrica de chocolates se empacan los productos en cajas cuya forma es un prisma trapezoidal, como se ve en la Figura 3.52.

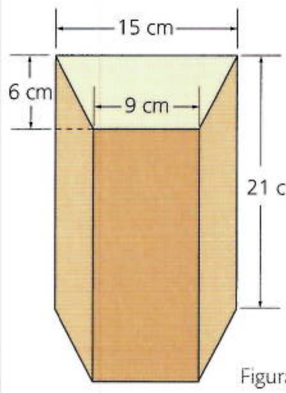


Figura 3.52

- Si se empacan chocolates de 7 cm³ de volumen, ¿cuántas unidades caben en la caja?

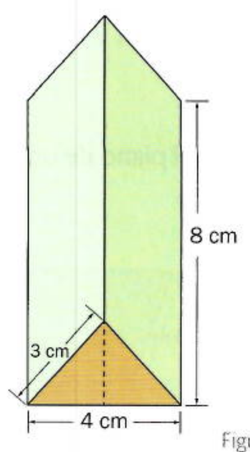


Figura 3.53

Conoce

7.1 Área y volumen de prismas

Para resolver el problema es importante recordar que un **prisma** es un sólido conformado por dos polígonos paralelos congruentes, que se denominan bases, y por tantos paralelogramos como lados tengan las bases. En la Figura 3.54 se observa que las bases de las cajas son trapecios, por lo tanto:

$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{15+9}{2} \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

El volumen del prisma es $V = A_{\text{Trapecio}} \cdot h \Rightarrow V = 72 \text{ cm}^2 \cdot 21 \text{ cm} = 1512 \text{ cm}^3$.

Como cada chocolate tiene un volumen de 7 cm³, entonces en la caja caben $1512 \div 7 = 216$ chocolates.

El **área total** de un prisma es la suma entre el área lateral y el área de las dos bases. El **volumen** corresponde al producto del área de la base por la altura.

Si en un prisma, P_B es el perímetro de la base A_B el área de la base y h la altura, entonces el área total, A_T, y el volumen, V, son respectivamente:

$$A_T = P_B h + 2A_B \qquad V = A_B h$$

Ejemplo 1

Para calcular el área total y el volumen del prisma triangular de la Figura 3.53, cuya base es un triángulo isósceles, se realiza lo siguiente:

- Se calcula la altura del triángulo isósceles de la base.

$$h = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

- Se calcula el perímetro y el área de la base.

$$P_B = 10 \text{ cm y } A_B = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}^2$$

- Por lo tanto, el área total A_T es:

$$A_T = 10 \cdot 8 + 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4(20 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$$

- Así, el volumen es: $V = 2\sqrt{5} \cdot 8 = 16\sqrt{5} \text{ cm}^3$.

7.2 Área y volumen de pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base, que es un polígono cualquiera, y por caras, que son triángulos coincidentes en un vértice común.

El **área total de una pirámide** es la suma del área de las caras laterales y el área de la base. El **volumen de una pirámide** es la tercera parte del volumen de un prisma con la misma base y la misma altura.

Si en una pirámide, A_L es el área lateral, A_B el área de la base y h la altura, entonces el área total, A_T, y el volumen, V, son respectivamente:

$$A_T = A_L + A_B \qquad V = \frac{A_B h}{3}$$

Ejemplo 2

El área total y el volumen de la pirámide cuadrangular de la Figura 3.54 cuya altura es 7,23 cm, se calculan así:

$$A_T = 4 \cdot \overbrace{\frac{4 \cdot 7{,}5}{2}}^{A_L} + \overbrace{16}^{A_B} = 76\text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\overbrace{16}^{A_B} \cdot \overbrace{7{,}23}^{h}}{3} = 38{,}56\text{ cm}^3$$

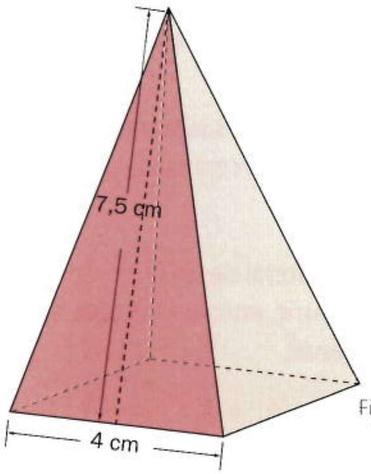


Figura 3.54

7.3 Área y volumen de cilindros

Un **cilindro** es un sólido limitado por dos bases circulares y una cara curva. Se obtiene cuando un rectángulo rota una vuelta entera alrededor de uno de sus lados. En la Figura 3.55 se observa un cilindro de altura h y radio de la base r.

El **área total de un cilindro recto** es la suma del área lateral y el área de las dos bases. El **volumen** corresponde al producto del área de la base por la altura.

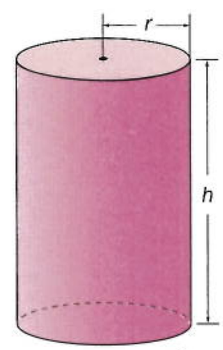


Figura 3.55

Si $\boldsymbol{A_L}$ es el área lateral de un cilindro recto, $\boldsymbol{A_B}$ es el área de la base, $\boldsymbol{h}$ es la altura y $\boldsymbol{r}$ es el radio de la base, entonces el **área total, $\boldsymbol{A_T}$**, y el **volumen, $\boldsymbol{V}$**, se calculan respectivamente como:

$$A_T = A_L + 2A_B \qquad V = A_B h$$

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) \qquad V = \pi r^2 h$$

Ejemplo 3

Para calcular el área total y el volumen del cilindro de la Figura 3.56, se aplican las fórmulas anteriores.

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r(h + r) \\ &= 2\pi \cdot 3\text{ cm} \cdot (10\text{ cm} + 3\text{ cm}) \\ &= 6\pi\text{ cm} \cdot 13\text{ cm} \\ &= 78\pi\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (3\text{ cm})^2 \cdot 10\text{ cm} \\ &= \pi \cdot 9\text{ cm}^2 \cdot 10\text{ cm} \\ &= 90\pi\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

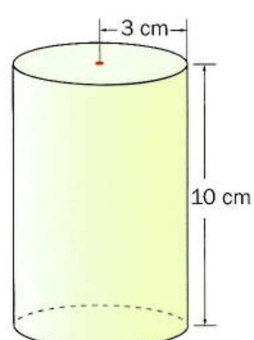
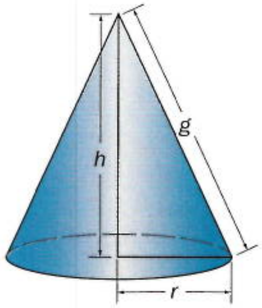


Figura 3.56

Por lo tanto, el cilindro tiene 78π cm² de área total y 90π cm³ de volumen.

7.4 Área y volumen de conos



$g = \sqrt{h^2 + r^2}$ Figura 3.57

Un **cono**, como el de la Figura 3.57, es un sólido limitado por una base circular y una cara curva. Se obtiene al rotar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El **área total del cono** es la suma del área lateral con el área de la base. El **volumen del cono** es la tercera parte del volumen de un cilindro con la misma base y la misma altura.

Si $\boldsymbol{A_L}$ es el área lateral de un cono de altura $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{A_B}$ es el área de la base de radio $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{g}$, la generatriz, entonces el área total, $\boldsymbol{A_T}$, y el volumen, $\boldsymbol{V}$, del cono son respectivamente:

$$A_T = A_L + A_B \qquad V = \frac{A_B h}{3}$$

$$A_T = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r) \qquad V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Ejemplo 4

Para determinar el área total y el volumen de un cono de altura 12 cm y cuyo diámetro de la base mide 5 cm, es necesario, en primer lugar, calcular la generatriz g del cono utilizando el teorema de Pitágoras.

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + (2,5)^2} = 12,26 \text{ cm}$$

Por lo tanto:

$$A_T = \pi \cdot 2,5 \cdot (12,26 + 2,5) = 36,9\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot (2,5)^2 \cdot 12}{3} = 25\pi \text{ cm}^3$$

Ejemplo 5

La Figura 3.58 está compuesta por un cilindro y un cono. Por lo tanto, para determinar el área total se suman el área lateral del cono, el área lateral del cilindro y el área de una de sus bases.

Por el teorema de Pitágoras, la generatriz del cono está dada por:

$$g = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

De modo que:

$$A_T = \underbrace{\left(\pi \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2\right)}_{A_{L\,\text{Cono}}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6}_{A_{L\,\text{Cilindro}}} + \underbrace{\pi \cdot 2^2}_{A_B}$$

$$= 4\pi\left(7 + \sqrt{5}\right) \text{cm}^2$$

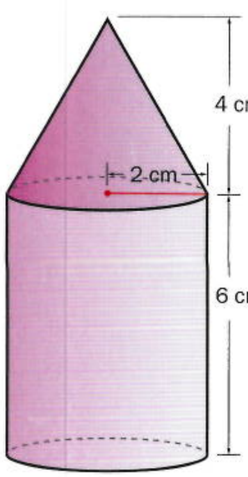


Figura 3.58

El volumen del sólido es la suma de los volúmenes del cono y del cilindro.

$$V_{\text{Sólido}} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 4}{3} + \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = \frac{88\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula el área total y el volumen del prisma cuya base es un hexágono regular (Figura 3.59).

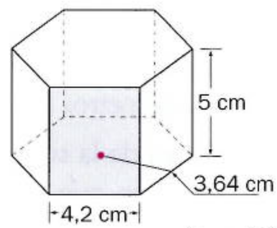


Figura 3.59

2 Determina el volumen del sólido de la figura.

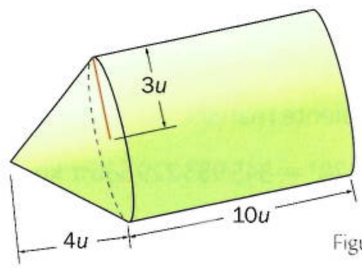


Figura 3.60

3 Halla el área total y el volumen del ortoedro presentado en la figura.

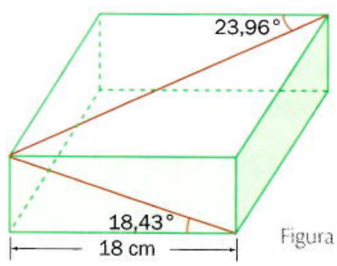


Figura 3.61

4 ¿Cuál es el espacio ocupado por las pirámides de las figuras si sus bases son polígonos regulares?

a.

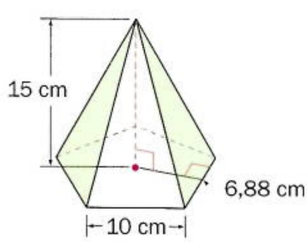


Figura 3.62

b.

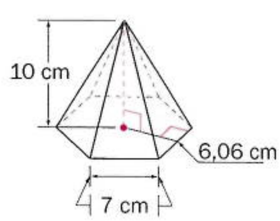


Figura 3.63

Resolución de problemas

5 ¿Cuánto papel de regalo se necesita para envolver una caja de 9,5 cm de ancho, 2 cm de largo y 3 cm de profundidad?

6 ¿Cuánto metal se requiere para fabricar una lata cilíndrica como la de la Figura 3.64?

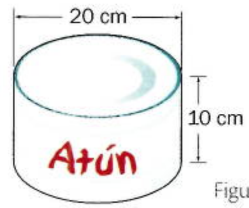


Figura 3.64

Evaluación del aprendizaje

i ¿Cuáles son el área total y el volumen del sólido de la Figura 3.65?

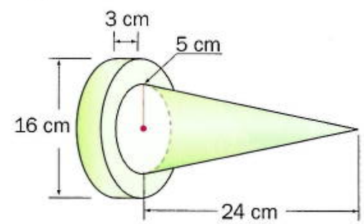


Figura 3.65

ii Asigna medidas a las figuras e inventa un problema donde se pida calcular el área total y el volumen de cada una.

a.

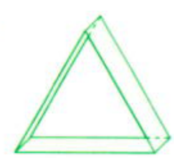


Figura 3.66

b.

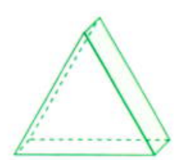


Figura 3.67

c.

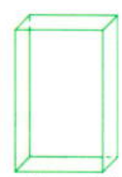


Figura 3.68

d.

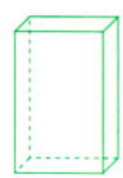


Figura 3.69

Educación ambiental

Halla en tu casa el volumen de dos recipientes en los que puedas almacenar agua. Si sabes que 1 L = 1000 cm^3, ¿cuál de los dos recipientes podrías utilizar si quisieras recoger agua para reutilizar en el inodoro? ¿Cómo crees que ayuda al medio ambiente la reutilización del agua?

8 Área y volumen de la esfera

Saberes previos

¿Por qué no es posible medir el volumen de un círculo?

Analiza

El diámetro ecuatorial del planeta Tierra es de 12 756 km aproximadamente.

- ¿Cuáles son el área superficial y el volumen de la Tierra?

Conoce

Para calcular los valores sobre los cuales se pregunta, es necesario considerar la Tierra como una esfera.

Una **esfera** es el conjunto de puntos del espacio que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo conocido como centro. La esfera se obtiene al girar una circunferencia alrededor de uno de sus diámetros (Figura 3.70).

Además, se debe tener en cuenta que el **área de la superficie de una esfera** es igual a cuatro veces el área del círculo máximo, que contiene el centro de la esfera y tiene su mismo radio r, y que su **volumen** equivale a cuatro tercios del producto de π por el cubo de su radio.

Según lo anterior, para hallar el área y el volumen de la Tierra se comienza calculando su radio, que es de 6 378 km. Así, su área superficial estará dada por:

$$A_{\text{Esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 6\,378^2 = 162\,715\,536\pi \text{ km}^2$$

El volumen se determina de la siguiente manera:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 6\,378^3 = 345\,933\,229\,536\pi \text{ km}^3$$

Para una esfera de radio r, el área, $\boldsymbol{A}_{\text{Esfera}}$, y el volumen, $\boldsymbol{V}_{\text{Esfera}}$, son respectivamente:

$$A_{\text{Esfera}} = 4\pi r^2 \qquad V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

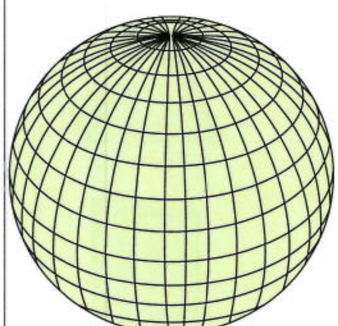


Figura 3.70

Ejemplo 1

El área superficial y el volumen de un balón de baloncesto cuyo diámetro mide 24 cm, se calculan de la siguiente manera:

$$A_{\text{Esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 12^2 = 576\pi \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 = 2\,304\pi \text{ cm}^3$$

El plano que pasa por el centro de la esfera la divide en dos regiones llamadas **semiesferas**. El **área superficial y el volumen de la semiesfera** corresponden a la mitad del área superficial y a la mitad del volumen de la esfera.

Para una semiesfera de radio r, el área, $A_{\text{Semiesfera}}$, y el volumen, $V_{\text{Semiesfera}}$, son respectivamente:

$$A_{\text{Semiesfera}} = 2\pi r^2 \qquad V_{\text{Semiesfera}} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Figura 3.71

Ejemplo 2

La cúpula de la Figura 3.71 es una semiesfera cuyo diámetro es 50 m.

El área superficial de la cúpula se calcula de la siguiente manera:

$$A_{\text{Semiesfera}} = 2 \cdot \pi \cdot 25^2 = 1\,250\pi \text{ m}^2$$

El volumen de la semiesfera se calcula así:

$$V_{\text{Semiesfera}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 = \frac{31\,250}{3}\pi \text{ m}^3$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

El volumen del cubo de la Figura 3.72 es 17 576 mm^3; entonces, su lado mide 26 mm. Como la esfera está inscrita en el cubo, su radio mide 13 mm.

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 13^3 = \frac{8\,788}{3} \pi \text{ mm}^3$$

El volumen comprendido entre el cubo y la esfera es:

$$\underbrace{17\,576 \text{ mm}^3}_{\text{Volumen del cubo}} - \underbrace{\frac{8\,788}{3} \pi \text{ mm}^3}_{\text{Volumen de la esfera}} = 43\,940 \frac{\pi}{3} \text{ mm}^3$$

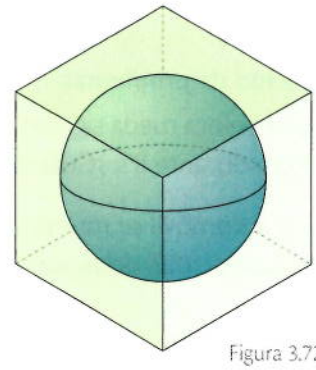


Figura 3.72

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el área superficial y el volumen de cada sólido.

a. Una esfera de diámetro 15 dm

b. Una esfera de diámetro 8 cm

c. Una esfera inscrita en un cubo de 6 dm de lado

d. Una semiesfera de diámetro 32 m

Comunicación

2 Calcula el área superficial y el volumen de la esfera.

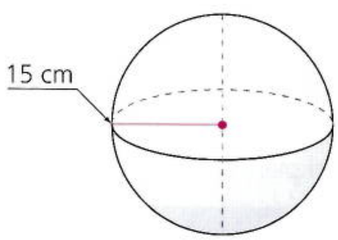


Figura 3.73

Razonamiento

3 Encuentra el radio de una esfera cuya área es igual a la suma de las áreas de cuatro esferas de radio 5 cm.

4 Discute con alguno de tus compañeros la veracidad de la siguiente afirmación: "El volumen de la esfera es cuatro veces el volumen de un cono cuya altura y radio tienen la misma longitud que el radio de la esfera".

5 Las siguientes figuras (la esfera y el cono) tienen el mismo volumen.

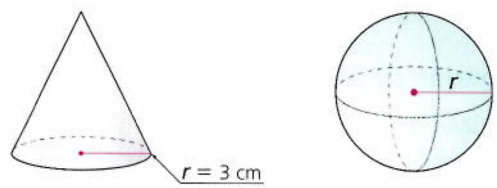


Figura 3.74

¿Cuál debe ser la altura del cono para que su base y el círculo máximo de la esfera sean iguales?

Evaluación del aprendizaje

i En una caja en forma de prisma rectangular, de dimensiones 12 cm, 18 cm y 24 cm, se empacan bolas de cristal de 6 cm de radio.

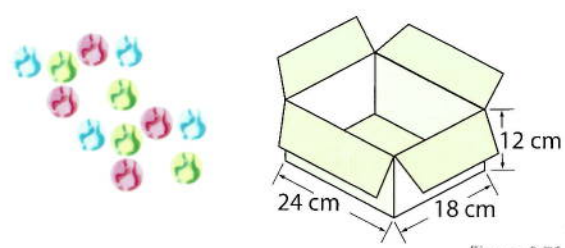


Figura 3.75

¿Cuántas bolas caben en la caja?

ii Para hacer un arreglo navideño se van a forrar, en tela, bolas de icopor de 4 cm de radio. ¿Qué cantidad de tela se debe comprar como mínimo?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Sistemas de unidades de medida. Magnitudes físicas

Resolución de problemas

1 Una pelota rueda siguiendo una trayectoria recta de 15 m durante 8 s. ¿Cuál es su rapidez media?

2 Un automóvil se mueve a razón de 40 min/h. ¿Cuál es la velocidad del automóvil en metros por minuto?

Cálculo de longitudes

Ejercitación

3 Halla la longitud designada con x en cada triángulo.

a.

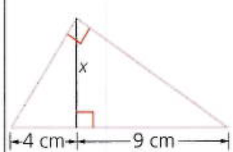


Figura 3.76

b.

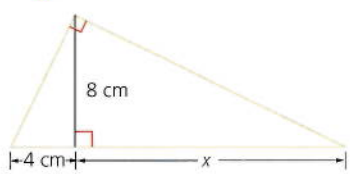


Figura 3.77

Resolución de problemas

4 Halla la longitud de los lados de un triángulo rectángulo cuyas proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 6,4 cm y 3,6 cm, respectivamente.

5 $\overline{EB}$ y $\overline{ED}$ son secantes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior E. $\overline{EB}$ corta a la circunferencia en A y en B, y $\overline{ED}$ lo hace en C y en D.

Si se sabe que $AE = 10$ cm, $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia, $EA \cdot AB = 180$ cm^2 y $\overline{CD}$ es un radio de la circunferencia, ¿cuál es la medida de $\overline{EC}$?

Teorema de Tales

Ejercitación

6 Selecciona la proporción correcta. Supón que $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{l_3}$ en la Figura 3.78.

- $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{EF}{FG}$
- $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{FG}{EF}$
- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{EF}{AB}$

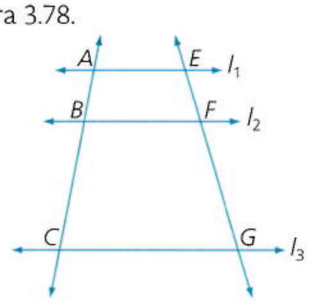


Figura 3.78

Resolución de problemas

7 ¿Cuál es la medida de t en la ventana que se observa en la Figura 3.79?

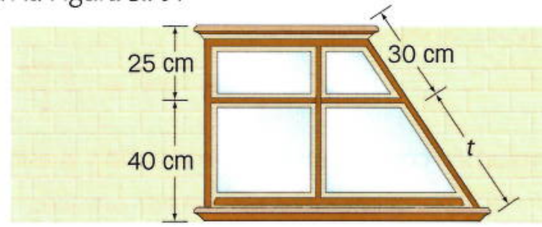


Figura 3.79

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Resolución de problemas

8 El pivote de cierto mecanismo se ilustra en la Figura 3.80. Consiste en dos conos iguales de hierro diamantado, para evitar el desgaste por fricción, y un cilindro de acero templado resistente a la tracción. ¿Cuál es el volumen del pivote?

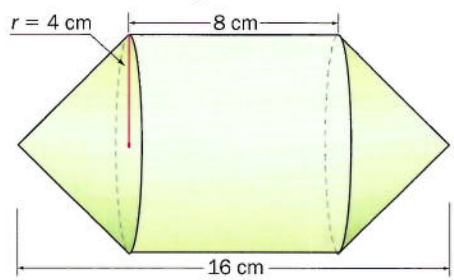


Figura 3.80

9 Un satélite artificial se encuentra a 12 000 km del centro de un planeta, como se observa en la Figura 3.81.

Calcula el área de la superficie del planeta y halla el volumen del planeta.

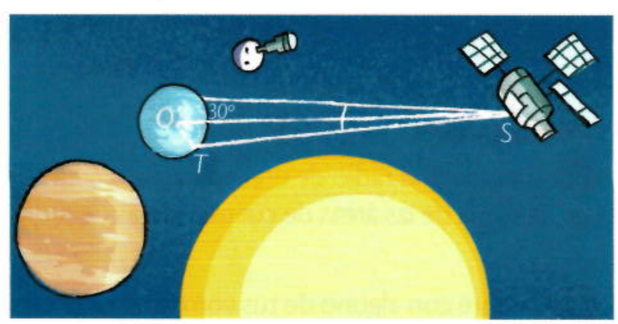


Figura 3.81

10 Halla el área total y el volumen de una pirámide de altura 8 cm, con base pentagonal regular de 6 cm de lado y una apotema igual a 3 cm.

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: **Hacer cálculos parciales**

Problema

El envase de un perfume se elaboró extrayendo de un cilindro de vidrio dos porciones iguales en forma de cono y adicionando una semiesfera como tapa (Figura 3.82). ¿Cuál es el volumen de la estructura?

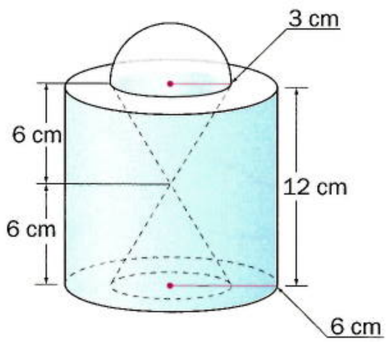


Figura 3.82

1. Comprende el problema

- ¿Cuánto miden el radio de la base y la altura del cilindro?

  R: Radio: 6 cm; altura: 12 cm

- ¿Cuáles son las medidas del radio de la base y la altura de cada cono? ¿Cuál es el radio de la semiesfera?

  R: Radio: 3 cm; altura: 6 cm. Radio de la semiesfera: 3 cm

2. Crea un plan

- Calcula el volumen de los sólidos que componen la estructura. Luego, del volumen del cilindro resta el volumen de los conos y adiciona el de la semiesfera.

3. Ejecuta el plan

- Se calcula el volumen del cilindro, de los conos y de la semiesfera.

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi(6\text{ cm})^2(12\text{ cm}) \qquad V_{\text{Cilindro}} = 432\pi\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}\pi(3\text{ cm})^2(6\text{ cm}) \qquad V_{\text{Cono}} = 18\pi\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Semiesfera}} = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi(3\text{ cm})^2 \qquad V_{\text{Semiesfera}} = 18\pi\text{ cm}^3$$

- Se calcula el volumen del envase.

$$V_{\text{Total}} = 432\pi - 36\pi + 18\pi = 414\pi\text{ cm}^3$$

El volumen del envase es 1 299,9 cm³, aproximadamente.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el volumen de los dos conos sea 36π.

Aplica la estrategia

1. ¿Cuál es el volumen total de la Figura 3.83?

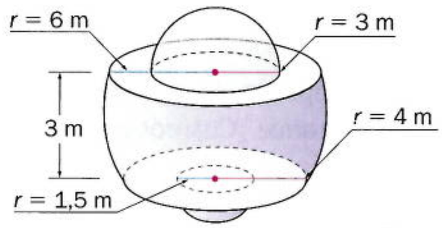


Figura 3.83

a. Comprende el problema

....

....

b. Crea un plan

....

....

c. Ejecuta el plan

....

....

d. Comprueba la respuesta

....

....

Resuelve otros problemas

2. ¿Cuál es el volumen en metros cúbicos de una esfera cuyo diámetro mide 100 centímetros?

Formula problemas

3. Plantea y resuelve un problema que involucre la información de la Figura 3.84.

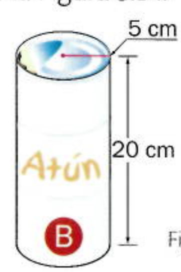


Figura 3.84

Enriquece tu vocabulario

- Busca el significado de las siguientes palabras y explica la diferencia entre ellas:
  - Área lateral
  - Área total
  - Volumen de un cuerpo geométrico

Evaluación del aprendizaje

Sistemas de unidades de medida. Magnitudes físicas

Resolución de problemas

1 Resuelve cada problema. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Elena compra en el supermercado 23 kg de azúcar y 15 kg de arroz. ¿Cuántos gramos en total compró Elena?

b. La distancia d desde un bote hasta un punto de observación es de 6 267 m. ¿Qué valor tiene esta distancia en pies? ¿Y en millas?

c. Un automóvil parte del reposo y recorre 80 m en 15 segundos. ¿Cuál es la rapidez media del automóvil? ¿Cuál es su aceleración?

d. ¿Cuál es la densidad de una sustancia de masa 12 kg y volumen 3 cm^3?

e. Si un cuerpo de 15 kg lleva una aceleración de 40 m/s^2, ¿cuál es la fuerza que lo impulsa?

f. ¿Cuál es la energía potencial de un martillo de 1 kg de masa cuando se halla situado a una altura de 2,5 m sobre el suelo?

g. Se empuja un libro 2,3 m sobre una mesa horizontal con una fuerza horizontal de 4 N. ¿Qué trabajo efectúa la fuerza de 4 N?

Cálculo de longitudes

Ejercitación

2 Determina el valor de las incógnitas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

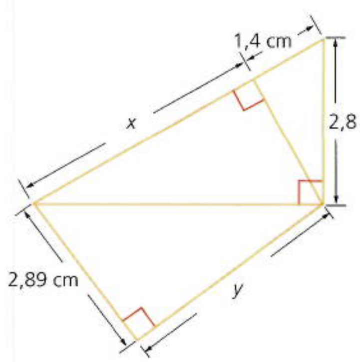


Figura 3.85

Razonamiento

3 Determina la longitud del segmento CD tangente a la circunferencia y la longitud del segmento EF. Ten en cuenta que $CG = 2{,}74$ cm, $CF = 2{,}63$ cm y $BG = 2{,}92$ cm. ACTIVIDAD DE REFUERZO

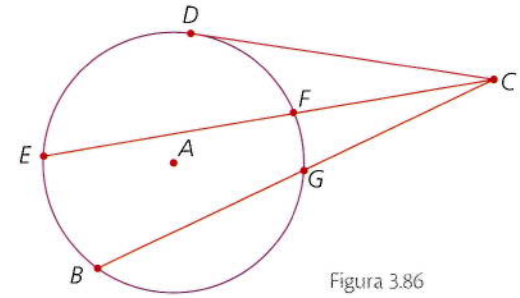


Figura 3.86

Teorema de Tales

Modelación

4 Determina el valor de x. Ten en cuenta que $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

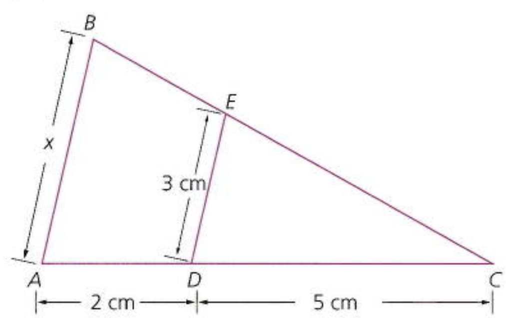


Figura 3.87

Ejercitación

5 Observa la Figura 3.88. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

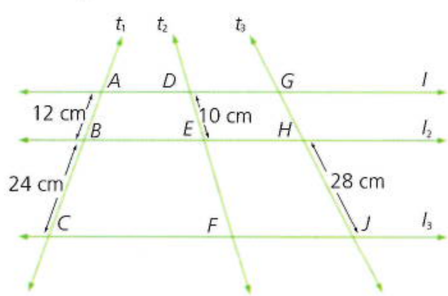


Figura 3.88

Calcula las siguientes medidas, si se sabe que $\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{l_3}$.

a. $EF =$ ____ b. $GH =$ ____

c. $DF =$ ____ d. $GJ =$ ____

Resolución de problemas

6 Una torre eléctrica es sostenida por tres cables tensionados que están amarrados al suelo. Si los tres cables son paralelos, ¿cuál es la altura de la torre?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

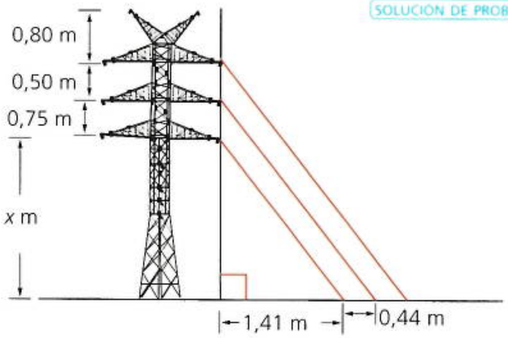


Figura 3.89

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Resolución de problemas

7 Determina la cantidad de cartón que se utilizó para construir una caja como la que se ilustra en la figura.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

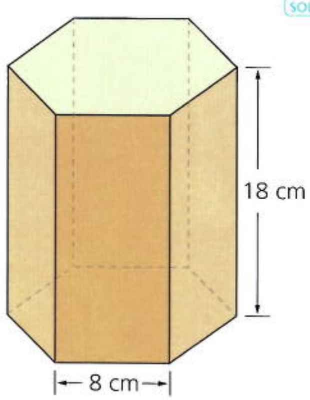


Figura 3.90

8 El principio de Arquímedes permite calcular el volumen de un sólido irregular. Según el principio, el volumen de un cuerpo es igual al volumen del líquido desplazado se sumerge el sólido en él.

Si se cuenta con un recipiente con agua, como el de la Figura 3.91, al sumergir un objeto, el nivel del agua sube 1,5 cm, ¿cuál es el volumen del objeto?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

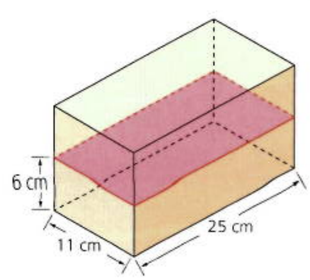


Figura 3.91

9 ¿Cuál es la altura de un prisma de base hexagonal, si se sabe que el perímetro de la base es 81 cm y su área lateral es 567 cm^2?

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 0,6 dm
b. 70 mm
c. 1 dm
d. 0,08 m

10 Encuentra el volumen comprendido entre la pirámide de base cuadrada y un cono que se construye a partir de una circunferencia inscrita en la base de la pirámide. Ten en cuenta que las caras laterales son triángulos isósceles.

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

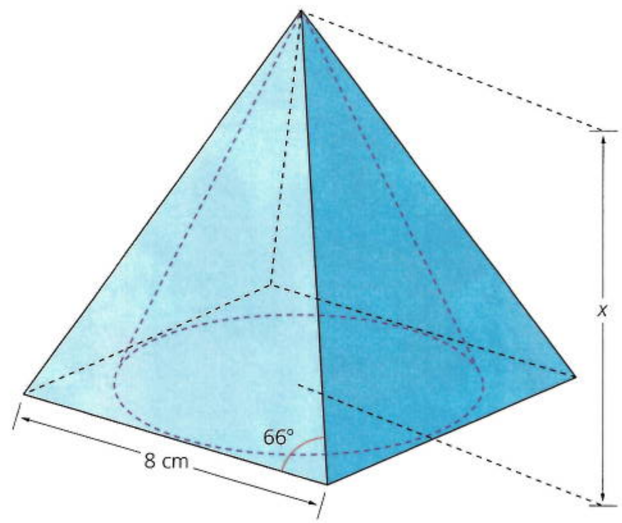


Figura 3.92

Razonamiento

11 Halla el área total y lateral de los prismas rectangulares cuyas dimensiones se indican en la Tabla 3.8.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Largo (m)	Alto (m)	Ancho (cm)
13	22	20
20	34	38
55	16	45

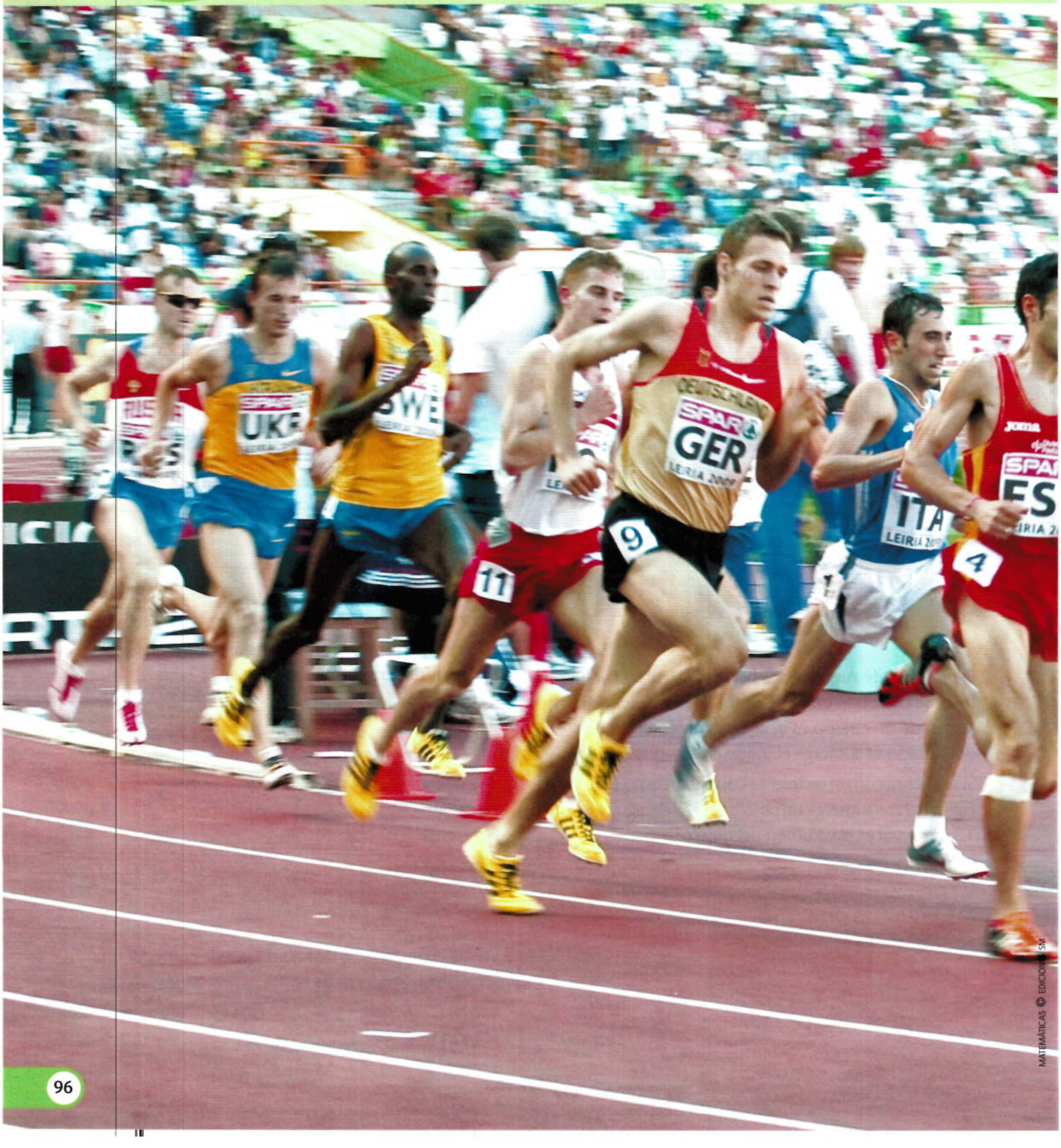
Tabla 3.8

12 Señala cuántos litros de líquido puede contener una semiesfera de 5,5 cm de radio.

SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. 0,04 L
b. 0,09 L
c. 47,51 L
d. 95 L

4 Estadística y probabilidad



Ya sabemos

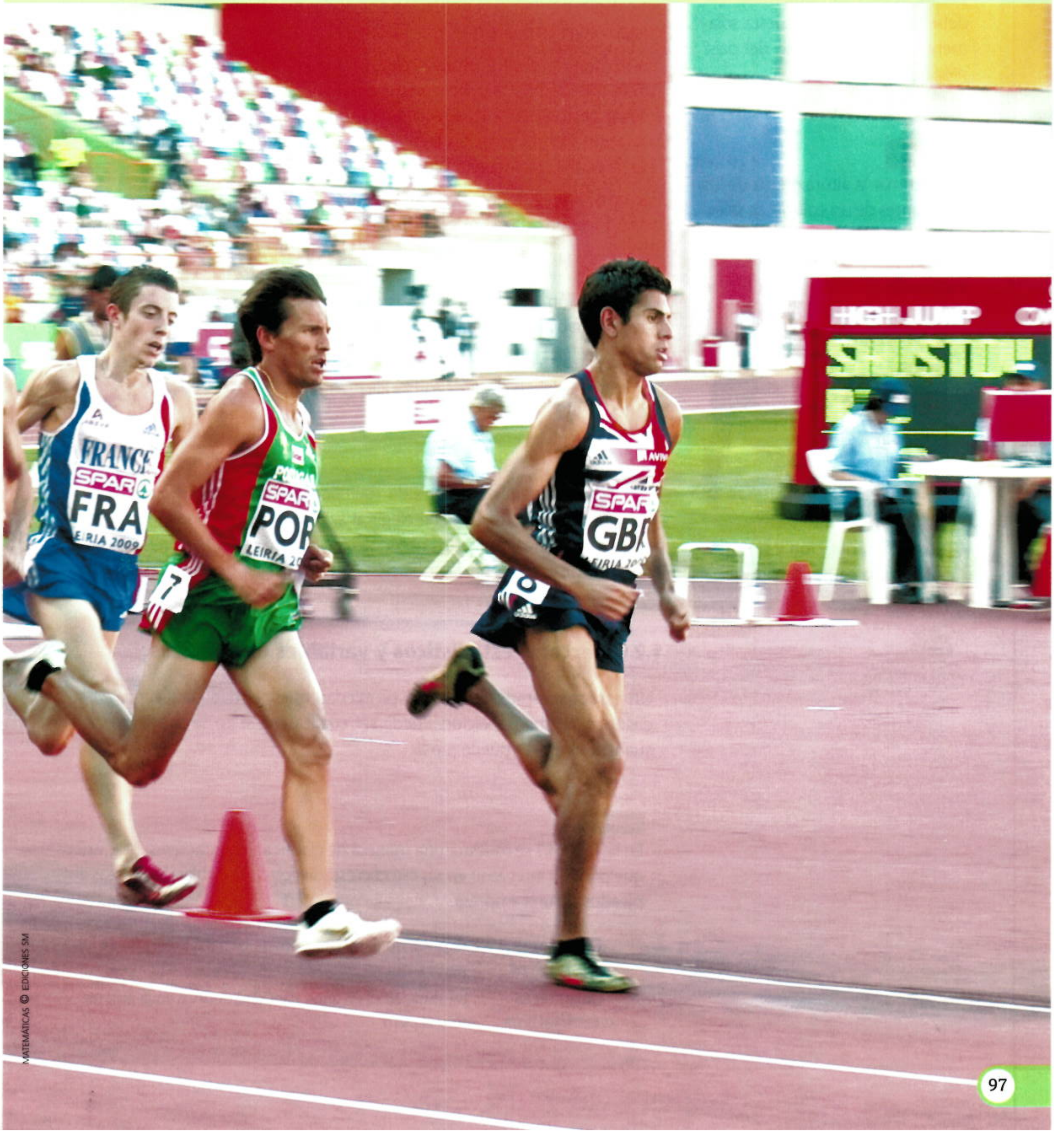
- Hallar medidas de tendencia central y de dispersión.
- Realizar gráficas estadísticas convencionales.

Vamos a aprender

- A usar de manera significativa las medidas de tendencia central y de dispersión.

Nos sirve para

- Comprender algunas situaciones en las que un dato o una tendencia puede representar al resto de datos.



1 Terminología estadística

Saberes previos

Si se desea saber la intención de voto en las próximas elecciones presidenciales de Colombia, ¿se debería aplicar una encuesta solamente en un municipio del país? ¿Por qué?

Analiza

Para estimar la altura media de los estudiantes de un colegio, se selecciona al primer estudiante de la lista de cada uno de los cursos de la institución, se miden y se obtiene el promedio de estas medidas.

- ¿Cuál es la población y la muestra? ¿Está la muestra bien seleccionada?

Conoce

1.1 Población y muestra

En esta situación se pretende estimar la altura promedio de los estudiantes de un colegio; por tanto, la **población** son todos los estudiantes que están matriculados en la institución.

No siempre es posible estudiar todos los elementos de la población, ya que habría que dedicar mucho tiempo en el análisis de la información y podría resultar costoso. Por ello, se elige una **muestra**, es decir, un subconjunto de la población. En esta situación, la muestra corresponde a los estudiantes que en la lista de cada curso ocupan la primera posición.

Por otro lado, la muestra no está bien seleccionada, ya que los estudiantes no se eligieron al azar. Además, puede ser que la muestra así elegida no sea significativa.

La **población** es el conjunto de todos los elementos que cumplen una determinada característica.

La **muestra** es cualquier subconjunto de la población. Los elementos de la muestra se deben elegir de forma aleatoria.

Ejemplo 1

Si se desea elegir una muestra de 1000 personas de una población en la que el 60% son mujeres, se debe elegir al azar 600 mujeres y 400 hombres. De esta manera, los resultados obtenidos en esta muestra permitirán determinar conclusiones sobre la población con un margen de error mínimo.

1.2 Caracteres estadísticos y variables estadísticas

Un **carácter estadístico** es una propiedad que permite clasificar a los individuos de una población. Puede ser **cualitativo**, si no se puede medir, o **cuantitativo**, si se puede medir.

Ejemplo 2

En la Tabla 4.1 se muestra una manera de clasificar los caracteres estadísticos que pueden intervenir en un estudio estadístico cuya población son los empleados de una empresa.

Caracteres cualitativos	deporte que practica, comida favorita, profesión de los padres.
Caracteres cuantitativos	estatura, edad en años, cantidad de años en la empresa, y el peso

Tabla 4.1

Los caracteres estadísticos pueden tomar distintos valores. El conjunto de todos estos valores se denomina *variable estadística*. Las variables estadísticas pueden ser **discretas** o **continuas**.

Una **variable** es **discreta** cuando toma solamente valores aislados que se expresan mediante números naturales; y **continua**, cuando toma todos los valores posibles dentro de un intervalo.

Ejemplo 3

La edad en años es una variable estadística discreta, puesto que solo puede tomar valores como 12, 13, 14, etc., mientras que la estatura es una variable estadística continua porque puede tomar valores como 1,28 cm, 1,56 cm, 1,36 cm, etc.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 En un colegio hay 1250 estudiantes, de los cuales 610 son hombres. Si se elige una muestra de 100 personas, ¿cómo se deberá elegir la muestra para que sea representativa de la población? ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres deberán haber en la muestra elegida?

2 Considera la población formada por tus compañeros de clase. Para esta población, determina:

a. Dos caracteres estadísticos cualitativos.

b. Dos caracteres estadísticos cuantitativos de variable discreta y dos de variable continua.

Resolución de problemas

3 En una empresa de transporte público se quiere saber la opinión de los ciudadanos acerca del servicio que ofrece. Para ello, unos encuestadores entrevistan a los viajeros que acceden a este servicio en tres estaciones.

a. ¿Cuál es la población? ¿Cuál es la muestra?

b. Describe la variable estudiada.

Evaluación del aprendizaje

En la década de 1930, en una ciudad se hizo una encuesta telefónica para pronosticar el ganador de las siguientes elecciones presidenciales. El pronóstico fue que ganaría el candidato *A*, pero en realidad ganó el candidato *B*.

a. ¿Cuál es la población?

b. ¿Cuál es el carácter estudiado?

c. ¿Crees que la muestra elegida fue representativa? ¿Por qué?

d. ¿Cómo se debió seleccionar la muestra de manera que los datos fueran confiables?

Estilos de vida saludable

Un estudio realizado en Colombia sobre el consumo de cigarrillo muestra que el 42,1% de los 32605 colombianos encuestados entre los 12 y 65 años han fumado alguna vez en su vida. Identifica la muestra y la población de este estudio.

- ¿Por qué fumar no hace parte de un estilo de vida saludable?

2 Gráficas estadísticas

Saberes previos

Recorta y pega una gráfica estadística en tu cuaderno y escribe algunas conclusiones del estudio realizado.

Analiza

La Tabla 4.2 muestra las cifras de donaciones a diferentes fundaciones de un país durante el periodo 2007 – 2012. Representa estos datos gráficamente.

Año	Donaciones (miles de pesos)
2007	45 000
2008	42 800
2009	55 000
2010	56 900
2011	50 000
2012	47 400

Tabla 4.2

Conoce

Se puede representar la información de la Tabla 4.2 con un diagrama de barras. Para ello, se representan sobre el eje X los años y se construyen rectángulos de alturas proporcionales a la cantidad de dinero donado. Observa la Figura 4.1.

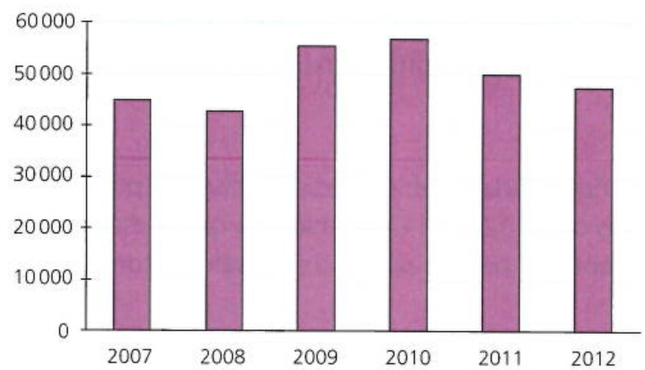


Figura 4.1

2.1 Diagramas de barras

Los **diagramas de barras** se utilizan para comparar datos cualitativos o cuantitativos discretos.

2.2 Diagramas de puntos y de líneas

Los **diagramas de puntos y de líneas** permiten representar las frecuencias absolutas de los datos para observar su variación con respecto al tiempo.

Ejemplo 1

En la Figura 4.2 se observa la variación (en millones de pesos) en los ingresos de una aerolínea en cinco meses.

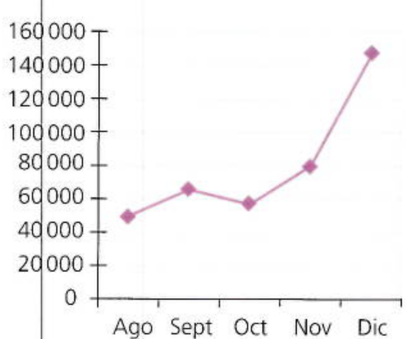


Figura 4.2

2.3 Diagramas circulares

Los **diagramas circulares** se utilizan para comparar los distintos valores que toma un carácter estadístico. Son recomendables cuando no existen muchos valores y para mostrar cómo se relacionan las partes con el todo.

Ejemplo 2

De un grupo de 80 personas encuestadas, 32 prefieren fútbol; 18, billar; 16, tenis; 10, natación, y 4, ciclismo. Las medidas de los ángulos centrales se calculan con la fórmula $a° = \frac{f_{absoluta}}{N} 360°$, donde N es el total de datos. Observa la Tabla 4.3 y la Figura 4.3.

Deporte	Fútbol	Billar	Tenis	Natación	Ciclismo
$f_{absoluta}$	32	18	16	10	4
$a°$	144°	81°	72°	45°	18°

Tabla 4.3

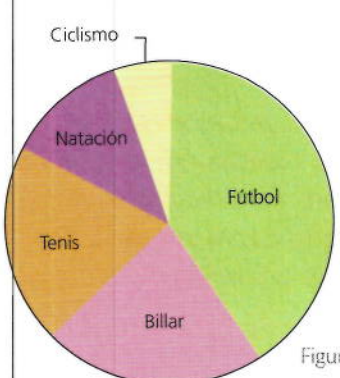


Figura 4.3

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

2.4 Pictogramas

Los **pictogramas** permiten sintetizar información estadística mediante símbolos que expresan cantidades específicas.

Ejemplo 3

En la Figura 4.4 se representan las cifras de reciclaje de una ciudad en el último año mediante un pictograma. De ella, se puede deducir que se han reciclado 48 000 toneladas de vidrio, 96 000 toneladas de papel y 120 000 toneladas de plástico.

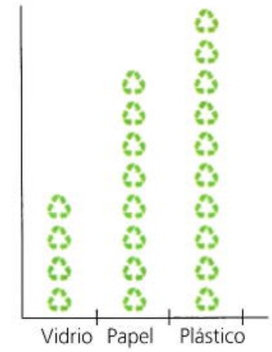


Figura 4.4

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. La Tabla 4.4 recoge los ingresos mensuales (miles de pesos) de una empresa en los primeros cuatro meses del año.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Ingresos	78 000	82 000	80 000	79 000

Tabla 4.4

Elabora con estos datos un diagrama de barras. ¿Qué escala utilizaste?

2. El consumo de minutos a celular de una persona en los últimos cuatro años fue de 48 500, 36 200, 15 700 y 36 400, respectivamente.

Representa con un diagrama de puntos y de líneas esta información.

Comunicación

3. Durante el año 2015 se registraron en las cinco principales actividades primarias del país las cifras de producción de la Tabla 4.5.

Actividad	Porcentaje de producción
Agricultura	36,1%
Ganadería	32,1%
Pesca	5,4%
Minería	20,3%
Explotación forestal	6,1%

Tabla 4.5

Representa con un diagrama circular esta información y compara los resultados.

4. Consulta las cifras de tala de árboles en Colombia durante el último año. Dibuja un pictograma que represente esta información.

Evaluación del aprendizaje

El número de habitantes de diferentes pueblos, se muestra en la Tabla 4.6.

Pueblo	Frecuencia
A	72 000
B	216 000
C	144 000
D	96 000
E	48 000
F	24 000

Tabla 4.6

Representa la información en un diagrama de barras y en un pictograma. Utiliza una escala adecuada.

Estilos de vida saludable

Diseña una encuesta sobre el consumo de sustancias psicoactivas y aplícala de forma anónima a 20 personas. Organiza los datos en una tabla de frecuencias y representa los resultados. Luego, determina a qué edad inicia el consumo de estas sustancias. Consulta las consecuencias que esto trae para la salud.

3 Histogramas

Saberes previos

¿Qué diferencia hay entre los intervalos [0, 3) y (0, 3]?

Analiza

En la Tabla 4.7 se registró el tiempo, en minutos, que tardan unos estudiantes en llegar a sus respectivos colegios.

Tiempo (min)	Número de estudiantes
[5, 10)	50
[10, 15)	100
[15, 20)	500
[20, 25)	300
[25, 30)	150
[30, 35)	100

Tabla 4.7

- ¿Cómo representarías estos datos que están agrupados?

Conoce

Los datos presentados en la distribución de frecuencias se pueden representar mediante un **histograma**. Para ello, se dibujan sobre el eje de las abscisas los extremos de las clases que tienen amplitud 5. Luego, se construyen rectángulos cuya base sea la amplitud del intervalo, y la altura, su frecuencia absoluta.

El histograma se observa en la Figura 4.5.

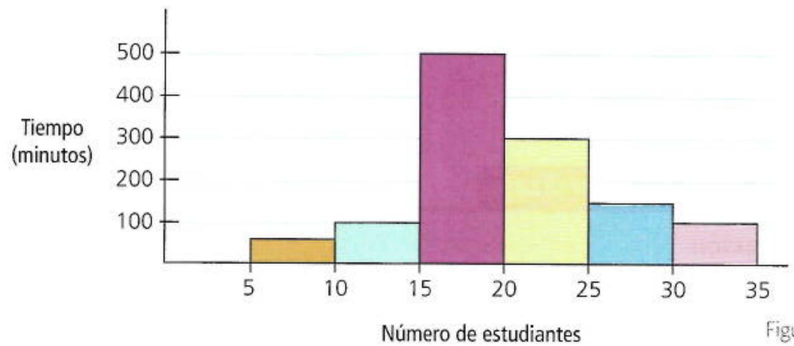


Figura 4.5

Los **histogramas** permiten representar de manera gráfica las clases o intervalos de una distribución de frecuencias y las correspondientes frecuencias absolutas o relativas.

Ejemplo 1

En la Tabla 4.8 se registraron las masas de 5 000 pacientes de un hospital y en la Figura 4.6 el histograma correspondiente.

Masa (kg)	Número de pacientes
[0, 12)	100
[12, 24)	800
[24, 36)	1 400
[36, 48)	1 000
[48, 60)	700
[60, 72)	600
[72, 84)	400

Tabla 4.8

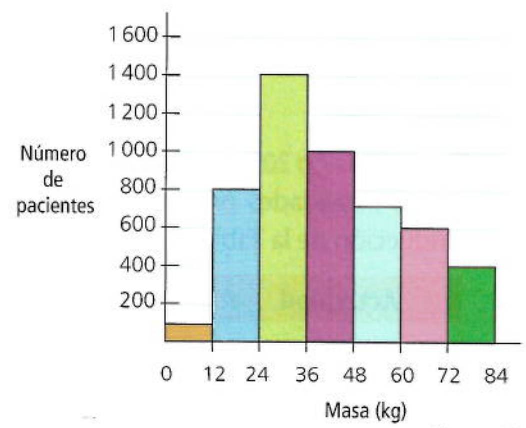


Figura 4.6

En el histograma se puede evidenciar que la mayor cantidad de pacientes entrevistados tiene una masa entre 24 kg y 36 kg.

También se observa que de las 5 000 personas estudiadas, solo 100 tienen una masa entre 0 kg y 12 kg.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 En un país se registró lo que han pesado los bebés al nacer (Tabla 4.9).

Masa (kg)	Niños	Niñas
[2; 2,5)	450	750
[2,5; 3)	1050	900
[3; 3,5)	2250	1950
[3,5; 4)	600	450
[4; 4,5)	300	150

Tabla 4.9

a. ¿Cuántos niños y niñas se pesaron?

b. Representa mediante un histograma las masas de los niños, y mediante otro, las de las niñas.

c. ¿Cuál fue la masa más usual que se registró en la sala de recién nacidos?

2 En el histograma de la Figura 4.7 se registraron los ingresos mensuales que tienen 3000 restaurantes de una ciudad.

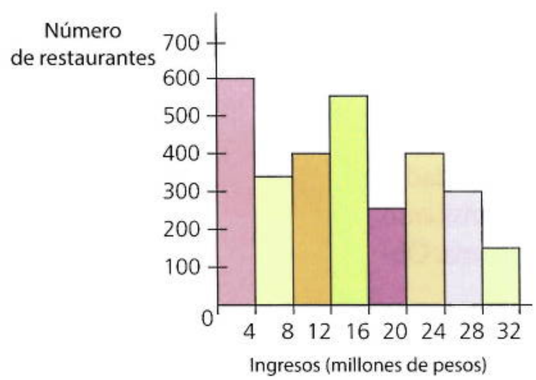


Figura 4.7

Responde las preguntas.

a. ¿Cuántos restaurantes tienen ingresos entre los 20 y 24 millones?

b. ¿Qué porcentaje de restaurantes tiene ingresos entre los 12 y 16 millones de pesos?

c. ¿Qué porcentaje de restaurantes tiene ingresos inferiores a los 20 millones de pesos?

Evaluación del aprendizaje

Se realizó un estudio sobre los meses de edad que tenían unos bebés en el momento que comenzaron a caminar. Los resultados se expresaron mediante el histograma de la Figura 4.8.

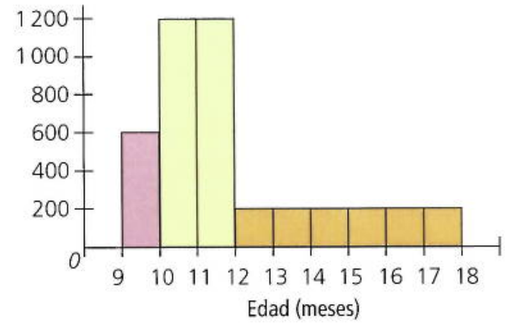


Figura 4.8

Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos bebés se observaron para realizar el estudio?

b. ¿Cuántos bebés comenzaron a caminar entre los 10 y los 12 meses?

c. ¿Cuántos bebés comenzaron a caminar entre los 12 y los 18 meses?

d. ¿Cuántos bebés comenzaron a caminar entre los 9 y los 12 meses?

Educación ambiental

Pregunta a tus compañeros de clase cuál ha sido el consumo de agua en sus hogares en el último periodo de facturación. Elabora un histograma con los datos y explica los resultados. .

- ¿Cómo puedes hacer uso eficiente del agua? ¿Qué consejos le darías a aquellas personas que no hacen uso responsable de este recurso?

4 Medidas de tendencia central

Saberes previos

Un vendedor de jugos de naranja vende en promedio 50 vasos de jugo al día. ¿Qué significado tiene el término "promedio" en la expresión anterior?

Analiza

En la Tabla 4.10, se registró el número de llamadas diarias recibidas en cierta estación de bomberos durante la primera semana del año.

Día	Número de llamadas (x_i)
Lunes	12
Martes	16
Miércoles	31
Jueves	25
Viernes	34
Sábado	21
Domingo	19
	158

Tabla 4.10

- ¿Cuál fue el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana en la estación?

Velocidad (km/h)	Marca de clase (x_i)	Número de vehículos (f_i)
[100, 110)	105	15
[110, 120)	115	35
[120, 130)	125	25
[130, 140)	135	10

Tabla 4.12

Conoce

4.1 Media aritmética

Para calcular el promedio o la media aritmética, de las llamadas recibidas en la estación de bomberos durante esa semana, se suman los datos y el resultado se divide por la cantidad total de datos. Es decir:

$$\overline{x} = \frac{158}{7} = 22{,}6$$

Por lo tanto, el promedio de llamadas diarias recibidas durante esa semana fue, aproximadamente, de 23 llamadas.

La **media aritmética** (denotada $\overline{x}$) de una variable, es el cociente entre la suma de todos los valores x_i de la misma y la cantidad total N de estos.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{N} = \frac{\sum x_i}{N}$$

4.2 Media aritmética para datos agrupados

Para calcular la media aritmética de un conjunto de datos agrupados en clases, se determina el cociente de la suma de los productos de cada marca de clase x_i y su correspondiente frecuencia f_i dividido entre el total de los datos, N.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

Ejemplo 1

En un puesto de control de una autopista, se registraron las velocidades de algunos vehículos que transitaron durante cierto día de la semana. Observa la Tabla 4.11.

Para determinar el promedio de las velocidades:

Velocidad (km/h)	Número de vehículos (f_i)
[100, 110)	15
[110, 120)	35
[120, 130)	25
[130, 140)	10

Tabla 4.11

- Primero, se calculan las marcas de clase o los puntos medios de los intervalos de clase, es decir, x_i en la Tabla 4.12.
- Luego, se multiplican por su respectiva frecuencia y se divide la suma de estos resultados entre el total de los datos.

$$\overline{x} = \frac{105 \cdot 15 + 115 \cdot 35 + 125 \cdot 25 + 135 \cdot 10}{15 + 35 + 25 + 10} = \frac{10\,075}{85} = 118{,}5 \text{ km/h}$$

La velocidad promedio a la que transitaron ese día los 5 vehículos que se registraron fue de 118,5 km/h.

4.3 Moda y clase modal

La **moda** (Mo) de una variable estadística es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

Si los datos están agrupados en clases, se toma como valor aproximado de la moda, la **marca de la clase modal**.

Una distribución puede tener una moda (**unimodal**), dos modas (**bimodal**), tres modas (**trimodal**), etc. Si todos los valores se repiten el mismo número de veces, se considera que la distribución no tiene moda.

Ejemplo 2

Tomás encuestó a sus compañeros de clase para determinar el tiempo, en minutos, que dedican a estudiar en casa y registró los datos en la Tabla 4.13.

Se observa que la clase con mayor frecuencia es [35, 45). Esta se denomina **clase modal**, y significa que entre los compañeros de Tomás son más los que dedican entre 35 y 45 minutos a estudiar en casa.

Tiempo (min)	Número de estudiantes
[15, 25)	3
[25, 35)	8
[35, 45)	10
[45, 55)	8
[55, 65)	8
[65, 75)	3

Tabla 4.13

4.4 Mediana y clase mediana

La **mediana** (Me) de una variable estadística es el valor de la variable tal que el número de valores menores que él es igual al número de valores mayores que él.

La mediana depende del orden de los datos y no de su valor.

Ejemplo 3

Para calcular la mediana de la distribución de velocidades de la Tabla 4.14, se agrega una columna F_i con las frecuencias absolutas acumuladas (Tabla 4.15) y se calcula la mitad de los datos. Así: $\frac{101}{2} = 50{,}5$ vehículos.

Velocidades de los vehículos que transitan en una autopista		
Velocidad (km/h)	x_i	Número de vehículos f_i
[90, 100)	95	16
[100, 110)	105	15
[110, 120)	115	35
[120, 130)	125	25
[130, 140)	135	10
		101

Tabla 4.14

Velocidad (km/h)	x_i	f_i	F_i
[90, 100)	95	16	16
[100, 110)	105	15	31
[110, 120)	115	35	66
[120, 130)	125	25	91
[130, 140)	135	10	101
		101	

Tabla 4.15

La clase mediana es [110, 120), porque allí $F_i > 50{,}5$. El valor aproximado de la mediana es la marca de clase del intervalo de la mediana. Es decir, $Me \approx \frac{110 + 120}{2}$. Por lo tanto, $Me \approx 115$ km/h.

4.5 Relación entre media, mediana y moda en una distribución de frecuencias

La **relación entre las medidas de tendencia central**, en una distribución de frecuencias, se puede observar trazando una curva suavizada. A esta relación se le denomina **sesgo**.

Dependiendo de los valores de la moda, la mediana y la media, se tienen las siguientes relaciones:

- Moda < Mediana < Media, es un **sesgo a derecha** y equivale a una **distribución positiva** (Figura 4.9).

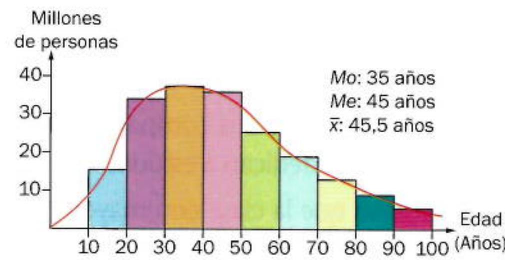


Figura 4.9

- Moda > Mediana > Media, es un **sesgo a izquierda** y corresponde a una **distribución negativa** (Figura 4.10).

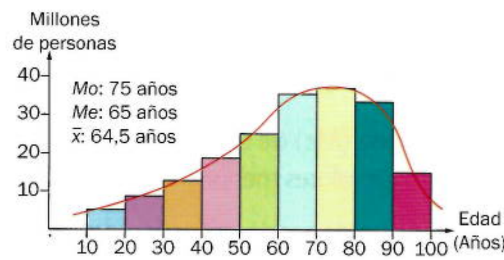


Figura 4.10

- Moda = Mediana = Media, es una **distribución normal**. La curva es simétrica (Figura 4.11).

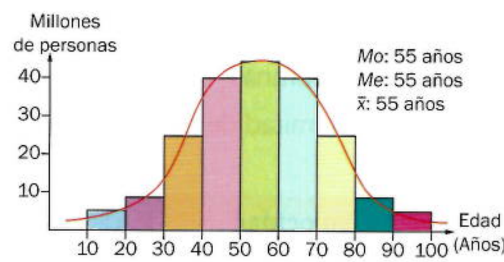


Figura 4.11

Ejemplo 4

La relación entre la moda, la media y la mediana de la distribución de la Figura 4.12 que determina la variación de la población de un virus, es un sesgo a derecha. Entonces, la distribución es positiva.

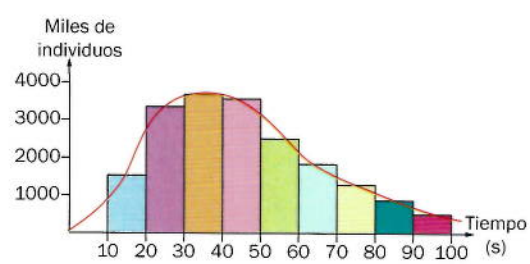


Figura 4.12

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla la media aritmética de los resultados registrados en la Tabla 4.16 referentes a la longitud de salto de un grupo de atletas.

Salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)
Número de atletas	6	12	15	4

Tabla 4.16

Razonamiento

2 Averigua el dato que falta en la siguiente distribución para que la media sea 18.

7 12 15 22 23 28 32

3 Responde estas preguntas.

a. ¿Es posible que la media no coincida con ningún valor de la variable? ¿Esto es posible con la moda?

b. ¿Por qué en la Tabla 4.17 la mediana resulta poco significativa?

x_i	3	12	2 000
f_i	50	1	50

Tabla 4.17

Resolución de problemas

4 Al lanzar un dado 60 veces se registraron los siguientes resultados de menor a mayor.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

a. ¿Cuál es el resultado obtenido con mayor frecuencia?

b. ¿Cuál es el promedio de los resultados?

c. Si se lanza una vez más el dado, ¿cuál es el resultado más probable?

5 Halla las medidas de tendencia central de la distribución de la Figura 4.13 y describe la relación que hay entre ellas.

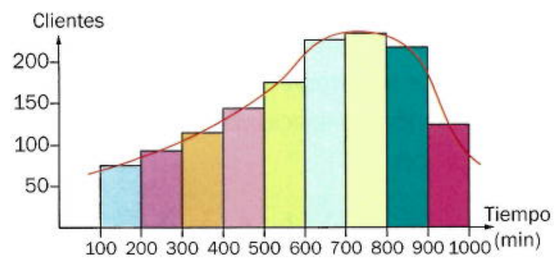


Figura 4.13

6 En una encuesta sobre movilidad, se preguntó a 1 000 conductores acerca del número de multas recibidas que ha sido mayor o igual que 0 y menor o igual que 5.

Número de conductores	210	260	150	190	100	90
Número de multas	0	1	2	3	4	5

Tabla 4.18

a. ¿Cuál es el dato central de la distribución?

b. ¿Cuál es la moda de los datos?

c. ¿Cuál es el promedio de multas recibidas por los conductores encuestados?

Evaluación del aprendizaje

Se registró el número de horas que 20 trabajadores dejaron de asistir a la oficina por problemas de salud el año pasado. Los datos obtenidos fueron estos:

0	3	4	8	10
12	12	15	15	17
19	21	21	23	25
26	32	33	40	60

a. ¿Cuál es el número de horas de absentismo laboral que ocurrió con mayor frecuencia?

b. ¿Cuál fue el promedio de horas no trabajadas en este grupo de personas?

5 Medidas de posición no central

Pensamiento aleatorio

Saberes previos

Halla el 25%, el 50% y el 75% de 100, 350 y 40.

Analiza

Las notas de la evaluación final de matemáticas que ha sacado un grupo de 50 estudiantes de una institución, se relacionan a continuación.

6	4	3	7	9	5	6	8	5	4
8	2	5	4	6	3	1	6	5	9
10	4	3	5	4	7	5	4	5	8
6	4	5	6	2	5	6	7	5	10
3	7	4	5	8	7	4	9	6	2

- ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que obtuvieron una calificación menor o igual que 5?

Conoce

Para calcular el porcentaje de estudiantes que obtuvieron una calificación de 5 o menos, primero se debe organizar la información de menor a mayor. Luego, se calculan las frecuencias absolutas y acumuladas, tal como se representa en la Tabla 4.19.

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	1	3	4	9	11	8	5	4	3	2
F_i	1	4	8	17	28	36	41	45	48	50

Tabla 4.19

Finalmente, se hace la medición mediante cuantiles.

5.1 Los cuantiles

Los **cuantiles** son medidas que dividen el conjunto de datos en grupos con la misma frecuencia.

Los principales cuantiles son:

- Los **percentiles**: dividen los datos en cien grupos de la misma cantidad. Esta medida da los valores correspondientes al 1%, 2%, 3%, hasta el 99% de los datos.
- Los **deciles**: dividen los datos en diez grupos con la misma cantidad de datos. Ellos indican el 10%, el 20%, el 30%, hasta el 90% de los datos.
- Los **cuartiles**: dividen el conjunto de datos en cuatro grupos iguales. Indican el 25%, el 50% y el 75%. Este es uno de los tipos de cuantiles que más se utiliza.

5.2 Los cuartiles

Los **cuartiles** son los valores que dividen el grupo de datos, ordenado de menor a mayor, en cuatro partes iguales.

Hay tres cuartiles, que se pueden definir así:

- **Cuartil 1** (Q_1): primer valor que supera o iguala una cuarta parte de los datos.
- **Cuartil 2** (Q_2): primer valor que supera o iguala la mitad de los datos. Coincide con la mediana del conjunto de datos.
- **Cuartil 3** (Q_3): primer valor que supera o iguala las tres cuartas partes de los datos.

Para determinar los cuartiles de la Tabla 4.19, se calcula la cuarta parte de los datos, es decir, $50 \div 4 = 12{,}5$.

Q_1 es 4, pues su frecuencia acumulada es mayor o igual que 12,5.

Q_2 es 5, pues su frecuencia acumulada es mayor o igual que 25.

Q_3 es 7, pues su frecuencia acumulada supera o iguala a 37,5.

Esto indica que de los 50 estudiantes: el 25% sacó 4 o una nota inferior a 4, el 50% sacó 5 o una nota inferior a 5 y el 75% sacó 7 o una nota inferior a 7.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula la media, la mediana, la moda y los cuartiles de los datos de cada estudio estadístico.

Construye tablas de frecuencias y escribe una conclusión para cada uno.

a. Se les preguntó a 40 personas cuántas horas dedican a chatear y se obtuvieron estas respuestas.

7	6	4	8	3	2	5	3	9	2
2	1	4	7	12	5	9	6	3	5
3	2	4	7	11	8	5	4	6	7
8	5	2	1	6	2	4	5	11	4

b. Se les preguntó a 36 estudiantes cuántos minutos tardan en ir de su casa al colegio y estas fueron las respuestas.

10	12	10	15	10	12	15	15	15
20	15	10	12	8	20	25	25	10
15	12	10	15	12	20	20	25	15
10	20	20	15	12	12	15	25	20

Razonamiento

2 La Tabla 4.20 muestra los salarios anuales de los trabajadores de una empresa. Calcula en qué intervalos se encuentran los cuartiles y analiza el significado de los porcentajes correspondientes.

Valores (en millones pesos)	f_i	F_i
Menos de 15	2	2
[15, 30)	18	20
[30, 45)	56	76
[45, 60)	72	148
[60, 75)	42	190
[75, 100)	35	225
[100, 115)	24	249
[115, 130)	15	264
[130, 145)	12	276
[145, 160)	8	284

Tabla 4.20

3 A 1 000 personas de una ciudad se les preguntó cuál es la superficie de la casa o apartamento donde viven. La Tabla 4.21 muestra los resultados.

Superficie (m^2)	f_i	F_i
[50, 65)	155	
[65, 80)	262	
[80, 95)	293	
[95, 110)	142	
[110, 125)	104	
[125, 140)	36	
[140, 155)	8	

Tabla 4.21

a. Calcula la frecuencia acumulada en cada caso.

b. Calcula en qué intervalos se encuentran los cuartiles.

Comunicación

4 ¿Puede coincidir el cuartil medio de un grupo de datos con la media aritmética? ¿Por qué? Comenta tu respuesta con algunos de tus compañeros y escriban una conclusión general del tema.

Evaluación del aprendizaje

Este es el dinero (en pesos) que acumuló una máquina de dulces en 30 días.

136 640	122 088	88 320	108 320	0
126 720	0	144 480	576 800	115 680
134 720	152 160	0	0	116 080
123 200	102 880	87 840	106 080	0
0	125 440	115 680	134 560	106 080
93 440	0	0	107 870	138 080

a. Calcula la media, la mediana y los cuartiles. ¿Tiene sentido incluir los días en los que no hay consumo?

b. En uno de los días se observa un aumento notable del consumo. Si se elimina ese día, ¿la media se ve afectada?, ¿los cuartiles cambian? Explica por qué.

6 Diagramas de caja y bigotes

Saberes previos

Las edades de 25 estudiantes de noveno grado son:

15	15	14	16	16
16	15	15	17	18
15	16	17	17	17
16	17	16	16	15
16	17	15	15	15

Halla el menor y el mayor dato y los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3.

Analiza

El número de pulsaciones por minuto de 50 estudiantes se registró en la Tabla 4.22.

Número de pulsaciones por minuto	f_i	F_i
62	6	6
65	5	11
68	4	15
69	11	26
72	12	38
74	12	50

Tabla 4.22

- Representa los datos en un diagrama de caja, y estudia la simetría y concentración de los mismos.

Conoce

Para representar los datos en un diagrama de caja, se calculan los siguientes parámetros: límite inferior (L_i), Q_1, Me, Q_3 y el límite superior (L_s).

$L_i = 62$ $\quad Q_1 = 68$ $\quad Me = Q_2 = 69$ $\quad Q_3 = 72$ $\quad L_s = 74$

Luego, se dibuja un segmento que tiene como extremos L_i y L_s. Sobre él se marcan Q_1, $Q_2 = Me$ y Q_3. Finalmente, se construye una **caja** (rectángulo) que va de Q_1 hasta Q_3. Las líneas que sobresalen de la caja se llaman **bigotes**.

El diagrama de caja y bigotes se muestra en la Figura 4.14.

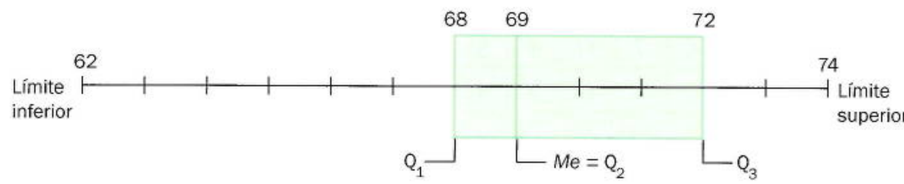


Figura 4.14

Al observar el diagrama se puede concluir que:

- El bigote de la derecha (Q_3, L_s) es más corto que el de la izquierda (L_i, Q_1), lo que indica que las pulsaciones se encuentran más concentradas en la cuarta parte más alta de los datos.
- Las pulsaciones que se hallan entre el 50% y el 75% de los datos (Q_2, Q_3) están más dispersas que las que están entre el 25% y el 50% (Q_1, Q_2).

Un **diagrama de caja y bigotes** es una representación gráfica que permite estudiar la **simetría** o **asimetría** de una distribución. En estos diagramas se reflejan cinco parámetros: los límites inferior y superior, y los cuartiles.

Ejemplo 1

Para determinar si una distribución de frecuencias es simétrica o asimétrica es necesario calcular su media. La media de la distribución de la Tabla 4.22 es 69,6. Como el valor de la media no está en el centro de la caja se puede concluir que la distribución no es simétrica.

El diagrama de cajas da información sobre cómo se encuentran concentrados los datos. Para saber si hay algún valor más alejado o valor atípico que distorsione el estudio de los diferentes parámetros existe el siguiente criterio:

$$x \text{ es un valor atípico si } \begin{cases} x > Q_3 + 1{,}5[Q_3 - Q_1] \\ \text{o} \\ x < Q_1 - 1{,}5[Q_3 - Q_1] \end{cases}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Los siguientes datos corresponden al número de fallas de asistencia al colegio de 30 estudiantes durante un mes.

1	1	3	2	4	1	8	1	3	2	2	3	1	3	1
5	2	6	2	1	2	1	2	4	3	6	1	4	1	3

$L_i = 1$ $\quad Q_1 = 1$ $\quad Me = Q_2 = 2$ $\quad Q_3 = 3$ $\quad L_s = 8$

Los valores atípicos son:

$x < Q_1 - 1{,}5[Q_3 - Q_1]$ $\qquad x > Q_3 + 1{,}5[Q_3 - Q_1]$

$x < 1 - 1{,}5(2)$ $\qquad x > 3 + 1{,}5(2)$

$x < -2$ $\qquad x > 6$

Por lo tanto, 8 es el único valor atípico. En el diagrama de caja de la Figura 4.15 se ubicó un asterisco que señala la ubicación del dato atípico.

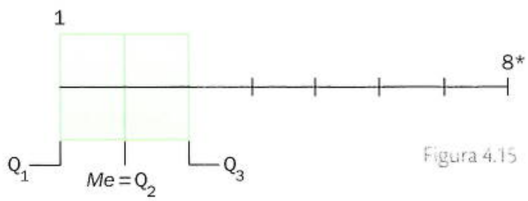


Figura 4.15

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1 Representa el diagrama de caja y bigotes de cada distribución. Ten en cuenta que para datos agrupados los límites inferior y superior corresponden a las marcas de clase del primer y último intervalo.

a. Edades de los estudiantes que acuden a una biblioteca en un día.

Edad (años)	[6, 8)	[8, 10)	[10, 12)	[12, 14)
Número de estudiantes	5	12	14	13

Tabla 4.23

b. Resultados de unos estudiantes en la prueba de salto de longitud.

Salto (m)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[12, 14)
Número de estudiantes	10	9	11	7

Tabla 4.24

Evaluación del aprendizaje

En las figuras 4.16 a 4.18 se observan los diagramas de caja y bigotes de tres variables.

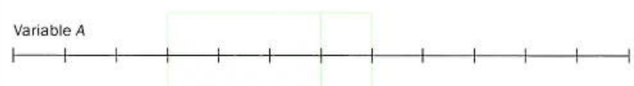


Figura 4.16

Figura 4.17

Figura 4.18

Determina qué se puede decir de cada uno de ellos en cuanto a los siguientes aspectos.

a. Concentración de los datos.

b. Dispersión de los datos.

c. Simetría.

7 Medidas de dispersión

Saberes previos

Halla el promedio de estatura de tus compañeros que tienen menos de 15 años y el promedio de los que tienen 15 años o más. Luego, determina en cuál grupo están más cercanos los datos a la media.

Analiza

Las calificaciones de un grupo de diez estudiantes en un examen de estadística son las siguientes:

56	58	67	69	75
77	77	82	84	95

- ¿Entre qué valores varían los datos?

Número de libros (x_i)	f_i
12	5
17	3
21	6
27	8
35	4
37	3
49	1

Tabla 4.25

Conoce

Los datos varían entre 56 y 95, la menor y la mayor de las calificaciones, respectivamente, obtenidas por los estudiantes. A la diferencia entre estos valores se le llama **rango**.

Para comprender el comportamiento de los datos de un conjunto, se puede determinar su **dispersión** o **variabilidad** a través del rango, la varianza y la desviación típica.

7.1 Rango

El **rango** de una distribución es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de la variable estadística. También se llama **recorrido**.

7.2 Varianza

Antes de estudiar el concepto de varianza, es necesario definir la **desviación respecto a la media**.

Se conoce como **desviación respecto a la media, d_i**, a la diferencia entre cada valor de la variable estadística, x_i, y la media aritmética, $\overline{x}$. Es decir:

$$d_i = x_i - \overline{x}$$

Ejemplo 1

La media aritmética de los datos de la Tabla 4.25 es $\overline{x} = 25{,}1$ y las desviaciones respecto a la media se muestran en la Tabla 4.26.

Número de libros (x_i)	12	17	21	27	35	37	49
$d_i = x_i - \overline{x}$	$-13{,}1$	$-8{,}1$	$-4{,}1$	1,9	9,9	11,9	23,9

Tabla 4.26

La **varianza s^2** de una variable estadística x es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. Para datos agrupados es:

$$s^2 = \frac{f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n(x_n - \overline{x})^2}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{x})^2}{N}$$

7.3 Desviación típica

La **desviación típica s** es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Ejemplo 2

La varianza y la desviación típica de los datos de la Tabla 4.25, son:

$$= \frac{(-13{,}1)^2 \cdot 5 + (-8{,}1)^2 \cdot 3 + (-4{,}1)^2 \cdot 6 + (1{,}9)^2 \cdot 8 + (9{,}9)^2 \cdot 4 + (11{,}9)^2 \cdot 3 + (23{,}9)^2 \cdot 1}{5 + 3 + 6 + 8 + 4 + 3 + 1}$$

$$s^2 = \frac{2\,572}{30} = 85{,}76 \rightarrow s = 9{,}26$$

7.4 Coeficiente de variación

El **coeficiente de variación *CV*** sirve para comparar la dispersión de distribuciones que tienen diferentes medias y distintas desviaciones típicas.

$$CV = \frac{s}{\overline{x}}$$

	$\overline{x}$	s
Sara	8,5	1,3
Lucía	7,5	1,2

Tabla 4.27

Ejemplo 3

En la Tabla 4.27, se muestran la media y la desviación típica de las notas de Sara y Lucía. El coeficiente de variación de cada una es:

$$CV_{\text{Sara}} = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{1,3}{8,5} = 0,15 \qquad CV_{\text{Lucía}} = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{1,2}{7,5} = 0,16$$

Aunque la desviación típica de Sara es mayor, las calificaciones de Lucía son más dispersas porque es mayor el coeficiente de variación.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Los porcentajes de uso del cinturón de seguridad en dos ciudades *A* y *B* durante cuatro días se muestran en la Tabla 4.28.

A	87	78	67	82
B	60	95	92	47

Tabla 4.28

Calcula el coeficiente de variación en cada ciudad e interpreta el resultado.

Resolución de problemas

2 En un colegio hay matriculados la siguiente cantidad de estudiantes:

- En grado sexto hay 112 estudiantes.
- En grado séptimo hay 123 estudiantes.
- En grado octavo hay 130 estudiantes.
- En grado noveno hay 110 estudiantes.
- En grado décimo hay 150 estudiantes.
- En grado once hay 146 estudiantes.

a. Elabora una tabla que contenga los anteriores datos.

b. Halla el rango.

c. Calcula la varianza y la desviación típica.

Evaluación del aprendizaje

i Las figuras 4.19 y 4.20 muestran los puntos anotados por dos jugadores de baloncesto.

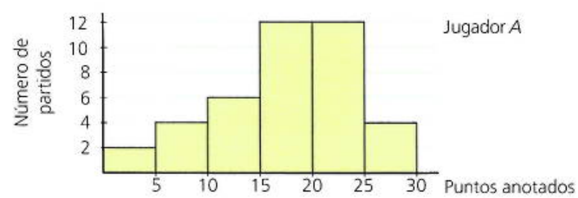


Figura 4.19

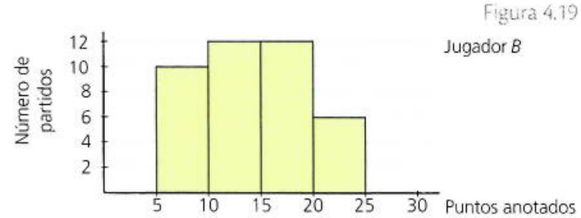


Figura 4.20

¿Cuál de ellos alcanza la mejor media anotadora? ¿Quién es más regular en su posición?

ii En la Tabla 4.29, se registró el número de goles que hicieron dos equipos de fútbol *A* y *B*.

A	25	24	27	24	26	25	27	24
B	28	30	21	22	27	20	28	30

Tabla 4.29

Calcula el promedio de goles de cada equipo. ¿Cuál de ellos es más regular en su desempeño?

8 Inferencias de poblaciones. Estimadores puntuales

Saberes previos

Si se realiza un estudio estadístico a una muestra no representativa, ¿se podrían generalizar las conclusiones a toda la población? Explica.

Analiza

Si en una ciudad que tiene 5 000 000 de habitantes, se selecciona una muestra aleatoria de 2 000 personas, de las cuales 560 utilizan internet, ¿cuál es la estimación puntual del número de ciudadanos que utilizan este servicio?

Conoce

8.1 Estimador y estimación puntual

En esta situación se debe calcular la proporción de ciudadanos que utilizan internet sobre una muestra de 2 000 personas; a esa proporción se le denomina **estimador** o **estimador puntual**.

El porcentaje x de entrevistados que utilizan internet se calcula así:

Personas que utilizan internet

$$x = \frac{\boxed{560} \cdot 100}{\boxed{2\,000}} = 28\%$$

Personas encuestadas

Luego, 0,28 es la estimación puntual requerida.

Si la muestra está bien elegida, se puede **inferir** ese **resultado sobre la población** de todos los habitantes de la ciudad; es decir, se podría concluir, de forma un tanto superficial, que el 28% de la totalidad de habitantes utilizan internet.

Este es un ejemplo de lo que se denomina **estimación puntual**, la cual consiste en asignar un valor muestral concreto al parámetro poblacional que se desea estimar.

- **Parámetro:** es un valor numérico que describe una característica de una población.
- **Estadístico**: es un valor numérico que describe la característica de la muestra.
- **Estimador puntual:** es un estadístico que se usa para estimar un parámetro poblacional.
- **Estimación puntual:** es el valor numérico que toma el estimador puntual para una muestra determinada.

8.2 Propiedades de un estimador

En los estudios estadísticos se pueden utilizar diferentes estimadores; por ello es importante reconocer algunas características de los estimadores como el **sesgo** y la **eficiencia**.

Un estimador es **centrado** o **insesgado** si su media coincide con el valor del parámetro que se va a estimar. La diferencia entre el verdadero valor del parámetro que se estima y la media del estimador, mide el error cometido al utilizar el estimador, y se denomina sesgo. Si el **sesgo** es cero, entonces el estimador es centrado.

Un estimador es **eficiente** cuando su varianza es mínima o cuando presenta menor varianza que otro.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

Cuatro tiradores efectuaron diez disparos sobre una diana con el objetivo de alcanzar el centro de la misma. Los disparos han quedado reflejados en la Figura 4.21.

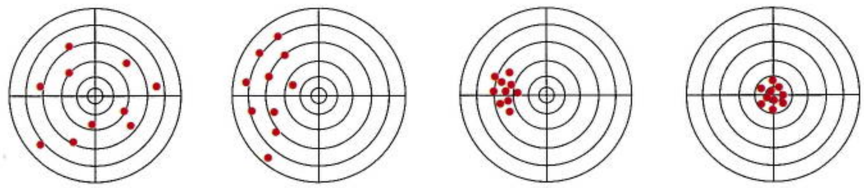


Figura 4.21

Entre los tiradores se pueden hacer las siguientes distinciones:

- Los disparos del tirador A no se desvían en ninguna dirección (ni arriba, ni abajo, ni a izquierda ni a derecha) por tanto, no tiene ningún tipo de sesgo hacia ninguna de esas direcciones.
- Los disparos del tirador B se desvían hacia la izquierda; por tanto, se dice que están sesgados.
- Los disparos del tirador C se desvían hacia la izquierda; por tanto, están sesgados.
- Los disparos del tirador D no tienen ningún tipo de desviación hacia ninguna de las direcciones; por tanto, se dice que están insesgados.

Los disparos de los tiradores A y B están muy dispersos o poco concentrados, mientras que los de los tiradores C y D están muy concentrados.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Si se traduce la situación del Ejemplo 1 en términos de la teoría de la estimación, cada disparo puede corresponder a una estimación efectuada por un determinado estimador sobre una muestra.

Completa cada enunciado.

a. La diana del tirador A representa un estimador .... y ....

b. La diana del tirador B representa un estimador .... y ....

c. La diana del tirador C representa un estimador .... y ....

d. La diana del tirador D representa un estimador .... y ....

Evaluación del aprendizaje

En una ciudad hay 2 000 000 de estudiantes, algunos de los cuales juegan baloncesto.

a. ¿Cuál es la estimación puntual del número de estudiantes, que juegan baloncesto, si se selecciona una muestra de 500, y entre estos, 350 estudiantes practican este deporte?

b. ¿Cuál debe ser el tamaño de una muestra y cuántos de los estudiantes de esta deben practicar baloncesto para obtener una estimación puntual de 0,52? ¿y una estimación puntual de 0,31?

9 Variables estadísticas bidimensionales. Dependencia

Saberes previos

Pregunta a siete de tus compañeros las notas y el número de ausencias que registraron en el último periodo en Matemáticas. Luego, construye una tabla en la que organices los datos. ¿Cómo podrías representar la información gráficamente?

Analiza

Se preguntó a 50 personas acerca del uso del transporte público a lo largo de un mismo día y se registraron los datos en la Tabla 4.30.

Autobús (Y) \ Taxi (X)	0	1	2	Total
0	2	2	10	14
1	4	8	8	20
2	8	6	2	16
Total	14	16	20	50

Tabla 4.30

- ¿Cuántas personas toman taxi dos veces?, ¿cuántas viajan en autobús en dos ocasiones?, ¿cuántas usan taxi y autobús dos veces al día?

Conoce

9.1 Variables estadísticas bidimensionales

Si se tiene en cuenta que en la primera fila están ubicados los valores de la variable X: "número de veces que se usa taxi" y en la primera columna los de la variable Y: "número de veces que se usa autobús", puede decirse que:

- Hay 20 personas que toman taxi dos veces.
- Hay 16 personas que viajan en autobús en dos ocasiones.
- Hay dos personas que usan taxi y autobús dos veces al día.

Las variables que se obtienen al observar simultáneamente dos características de un mismo elemento de una población estadística se llaman **variables estadísticas bidimensionales**. Estas se representan mediante el par (X, Y) y toman los valores (x_1, y_1); (x_2, y_2) ;... (x_n, y_n).

9.2 Tabla de doble entrada

La **tabla de doble entrada** se utiliza cuando el número de valores observados de una variable bidimensional es bastante grande y se repiten muchos de ellos.

Ejemplo 1

La Tabla 4.31 es una tabla de doble entrada en la que figuran los resultados de una encuesta hecha a los empleados de una empresa para estudiar la incidencia del tabaquismo en la gravedad de los accidentes laborales.

	Muy grave	Grave	Lesiones medianas	Leves
Muy fumador	20	10	10	30
Fumador	30	40	20	50
Fumador esporádico	10	60	80	60
No fumador	5	20	30	50

Tabla 4.31

Con base en los resultados, se puede afirmar que de los trabajadores muy fumadores solo diez han sufrido accidentes laborales graves; en cambio, de los fumadores esporádicos, 60 se han lesionado gravemente.

9.3 Dependencia aleatoria y funcional

La **relación entre dos variables unidimensionales** puede ser:

- De **dependencia funcional**, si sus valores se ajustan a la gráfica de una función.
- De **dependencia aleatoria o correlación**, si sus valores no se ajustan a la gráfica de una función, pero guardan cierta relación.

El **diagrama de dispersión** o la **nube de puntos** se utiliza para tener una idea intuitiva de la relación que existe entre dos variables.

Ejemplo 2

Observa las figuras 4.22 a 4.24.

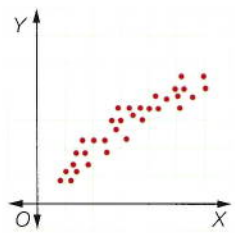


Figura 4.22

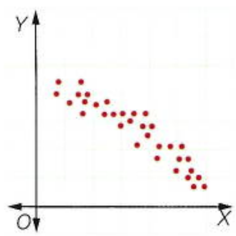


Figura 4.23

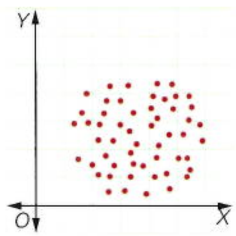


Figura 4.24

- La nube de puntos de la Figura 4.22 es muy estrecha; por tanto, hay una dependencia significativa y al aumentar una variable, aumenta la otra, es decir, presentan una **dependencia** o una **correlación positiva o directa**.
- La nube de puntos de la Figura 4.23 es muy estrecha; por consiguiente, también hay una dependencia significativa y al aumentar una variable, la otra disminuye; esto es, presentan una **dependencia** o una **correlación negativa o inversa**.
- En la Figura 4.24 no se observa ninguna dependencia entre las variables; por ello, se dice que su **correlación es nula**.

Ejemplo 3

En la Tabla 4.32, se muestran la estatura, en centímetros, de diez personas y el número de calzado que usan.

Estatura (cm)	154	156	157	158	160	163	165	170	171	172
Número de calzado	35	36	36	36	37	38	38	40	41	41

Tabla 4.32

Al representar los pares de valores de la variable estadística bidimensional (Estatura, Número de calzado), se obtiene un conjunto de puntos que representan una correlación positiva, como se observa en la Figura 4.25.

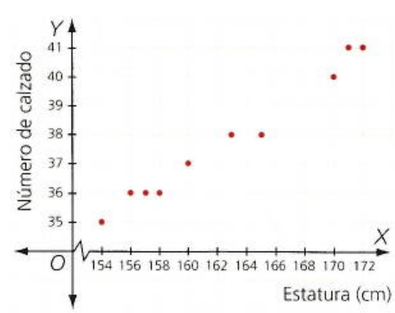


Figura 4.25

9.4 Covarianza

Al estudiar una variable bidimensional, es necesario estudiar también las variables unidimensionales que la forman, caracterizándolas por su media y su desviación típica. Este proceso se llama estudio de las **distribuciones marginales** asociadas a la variable bidimensional.

$$\text{Variable bidimensional: } (X, Y) \rightarrow \begin{cases} X, (\overline{x}, s_x) & \text{distribuciones} \\ Y, (\overline{y}, s_y) & \text{marginales} \end{cases}$$

Al punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se le llama **centro de gravedad** o **de masas** de la variable bidimensional (X, Y).

Además de los parámetros unidimensionales dados por las distribuciones marginales, es necesario introducir un nuevo parámetro que tenga en cuenta la posible relación entre las variables marginales. Este nuevo parámetro, se llama **covarianza** o **varianza conjunta** de las variables X y Y.

La **covarianza** de una variable bidimensional (X, Y) que toma los valores $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$s_{xy} = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{N} \quad \text{o} \quad s_{xy} = \frac{\sum f_i x_i y_i}{N} - \overline{x}\ \overline{y}$$

Ejemplo 4

En la Tabla 4.33, se representan los días transcurridos desde que se plantó cierta planta y la altura, en centímetros, que creció.

Observa cómo se calculan los parámetros de las distribuciones marginales de X y Y y la covarianza de la variable (X, Y).

Número de días x_i	Altura en cm y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
10	6	100	36	60
12	7	144	49	84
15	9	225	81	135
18	9	324	81	162
25	12	625	144	300
32	13	1 024	169	416
36	15	1 296	225	540
38	17	1 444	289	646
186	88	5 182	1 074	2 343

Tabla 4.33

Las distribuciones marginales de las variables X y Y, respectivamente, son:

$$\overline{x} = \frac{186}{8} = 23{,}25 \text{ días} \qquad s_X = \sqrt{\frac{5182}{8} - 23{,}25^2} = 10{,}35$$

$$\overline{y} = \frac{88}{8} = 11 \text{ cm} \qquad s_Y = \sqrt{\frac{1074}{8} - 11^2} = 3{,}64$$

$$\text{Covarianza: } s_{XY} = \frac{2\,343}{8} - 23{,}25 \cdot 11 = 37{,}13$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Completa la Tabla 4.34.

Y \ X	A	B	C	Total
a	2		1	4
b		2	2	5
c			0	7
Total	7	6		

Tabla 4.34

Comunicación

2 Indica qué tipo de relación tienen las variables bidimensionales (x, y_1), (x, y_2) y (x, y_3) de la Tabla 4.35.

X	23	21	2	4	5	7
y_1	9	5	21	25	27	211
y_2	4	3	2	1	0	21
y_3	22	2	21	1	5	3

Tabla 4.35

3 Observa la variable bidimensional registrada en la Tabla 4.36 y realiza lo que se pide.

Número de cigarrillos consumidos al día	3	6	8	20	25
Índice de mortalidad %	0,2	0,4	0,5	1,2	1,7

Tabla 4.36

a. Representa la nube de puntos.

b. Indica el tipo de correlación.

4 Estudia la variable bidimensional de la Tabla 4.37. Luego, calcula las medias y las desviaciones típicas de las variables X y Y.

X	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	4	9	16	24	30	34	38	42

Tabla 4.37

5 Calcula las medias y las desviaciones típicas de las variables X y Y, y la covarianza de la variable (X, Y) con ayuda de los datos registrados en la Tabla 4.38.

X	3	6	8	20	25
Y	0,2	0,4	0,5	1,2	1,7

Tabla 4.38

Resolución de problemas

6 Ten en cuenta los datos de la Tabla 4.39. Luego, completa las proposiciones y responde las preguntas.

Y \ X	2	3	5	7	Total
4	3	1	4	1	9
7	1	3	1	1	6
11	1	1	3	5	10
13	1	3	1	2	7
Total	6	8	9	9	32

Tabla 4.39

a. La frecuencia absoluta de (5, 11) es...

b. El número de puntos del tipo $(3, y)$ es...

c. El número de puntos del tipo $(x, 13)$ es...

d. ¿Qué porcentaje de datos presenta la característica 3 en la variable unidimensional X?

e. ¿Qué porcentaje de datos presenta la característica (5,11) en la variable bidimensional (X, Y)?

Evaluación del aprendizaje

i Los valores de una variable bidimensional (x, y) son los siguientes: (2, 2), (4, 2), (4, 4), (4, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 6), (5, 6), (5, 5), (5, 4), (8, 6) y (9, 7).

a. Dibuja el diagrama de dispersión.

b. Indica el tipo de dependencia entre ambas variables.

ii Durante su primer año de vida, han pesado a Miranda cada mes. En la Tabla 4.40, aparecen sus pesos. X representa la edad (meses) y Y, el peso (kilogramos).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	3,2	3,7	4,2	5,3	5,7	6,5	6,8	7,2	7,9	7,7	8	8,5

Tabla 4.40

a. Representa el diagrama de dispersión.

b. Calcula la covarianza.

10 Correlación lineal

Saberes previos

¿Qué son magnitudes correlacionadas? Da un ejemplo de magnitudes directamente correlacionadas y uno de inversamente correlacionadas.

Analiza

En la Figura 4.26, se representan dos variables correlacionadas.

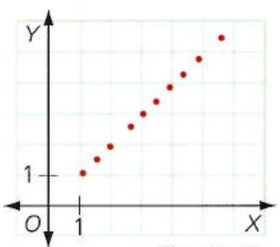


Figura 4.26

- ¿Qué tipo de correlación hay entre las variables representadas?

Conoce

10.1 Coeficiente de correlación lineal

Las variables representadas en la Figura 4.26 evidencian una correlación lineal perfecta, ya que todos los puntos están alineados sobre una recta.

Si la representación de la relación entre dos variables es una nube de puntos que se condensa en torno a una recta, entonces existe una **correlación lineal** entre las variables. El **coeficiente de correlación lineal** se define como

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \text{ y está comprendido entre } -1 \text{ y } 1.$$

Ejemplo 1

Observa la relación que hay entre el diagrama de dispersión y el coeficiente de correlación lineal en los casos que se muestran en las figuras 4.27 a 4.31.

$r = -1$

Correlación negativa y perfecta. Los puntos están alineados. Dependencia funcional.

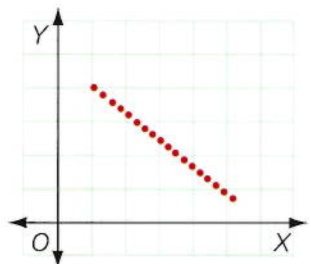


Figura 4.27

$-1 < r < 0$

Correlación negativa, más fuerte cuanto más se aproxima r a -1, y más débil cuanto más se aproxima a 0. Dependencia aleatoria.

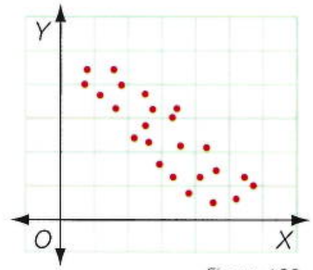


Figura 4.28

$0 < r < 1$

Correlación positiva, más fuerte cuanto más se aproxima r a 1 y más débil cuanto más se aproxima a 0. Dependencia aleatoria.

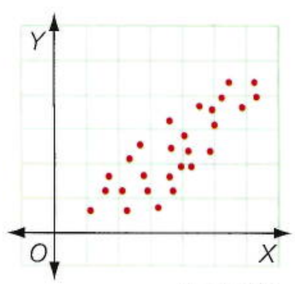


Figura 4.29

$r = 1$

Correlación positiva y perfecta. Los puntos de la nube están alineados. Dependencia funcional.

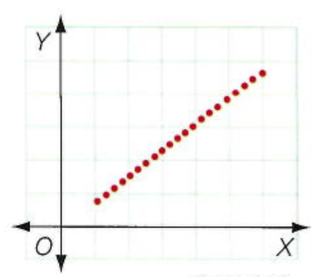


Figura 4.30

Si $r = 0$ las variables no tienen correlación; es decir, hay una independencia aleatoria (Figura 4.31).

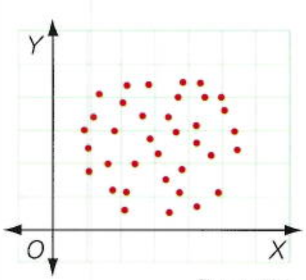


Figura 4.31

10.2 Recta de regresión

La **recta de regresión de Y sobre X** pasa por el centro de gravedad o de masas $(\overline{x}, \overline{y})$ y viene dada por la siguiente expresión:

$$y - \overline{y} = m(x - \overline{x}), \text{ donde } m = \frac{S_{xy}}{S_x^{\,2}}.$$

Una vez comprobada la existencia de una fuerte correlación entre las variables X y Y, que componen una variable bidimensional, es interesante encontrar la recta que mejor se ajuste a la nube de puntos.

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1 Observa el diagrama de dispersión y luego, resuelve.

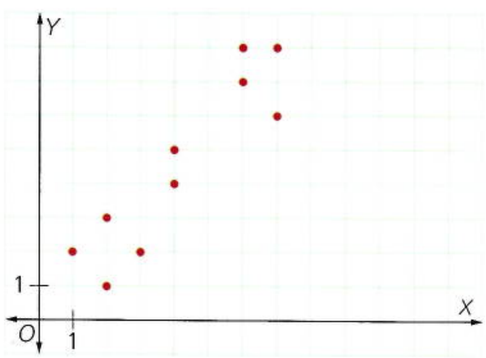


Figura 4.32

a. Elabora una tabla de doble entrada para registrar los datos de las variables X y Y.

b. ¿Qué tipo de correlación tienen las dos variables? ¿Fuerte o débil?, ¿positiva o negativa?

c. ¿Qué coeficiente de correlación se ajustaría mejor a la nube de puntos, $r = -0{,}91$, $r = 0{,}35$ o $r = 0{,}92$?

2 Considera la información de la Tabla 4.41 y resuelve.

X	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7
Y	1	1	2	4	4	6	7	6	7	7

Tabla 4.41

a. Calcula el coeficiente de correlación lineal.

b. Halla la recta de regresión. Si $x = 8$, ¿cuánto valdrá y?

c. ¿Es fiable esta predicción? Justifícalo.

Evaluación del aprendizaje

En la Tabla 4.42 se muestra el crecimiento de los beneficios obtenidos por una empresa en cada uno de los ocho trimestres de los últimos dos años.

Primer año				
Trimestre	1	2	3	4
Beneficios (%)	7	6	7	5
Segundo año				
Trimestre	1	2	3	4
Beneficios (%)	6	4	3	2

Tabla 4.42

Calcula y dibuja la recta de regresión considerando los ocho pares de datos. ¿Cuál es el crecimiento que se estima para el primer trimestre del tercer año?

Educación ambiental

La deforestación es una de las principales causas de la pérdida de los recursos hídricos. Si la tasa de deforestación y la densidad poblacional tienen un coeficiente de correlación lineal r de 0,626, ¿qué tipo de correlación tienen estas variables?

11 Diagrama de árbol

Saberes previos

¿Cuántas posibilidades hay de armar una clave de tres cifras con los números 1, 2 y 3? Escríbelas.

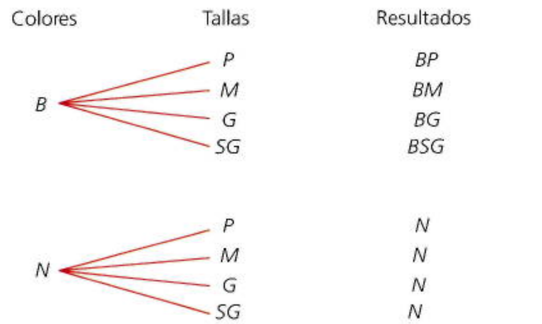
Analiza

La dueña de un almacén de ropa deportiva encargó sudaderas de color blanco y negro en tallas pequeña, mediana, grande y extragrande.

- ¿Cuántos modelos de sudaderas recibirá cuando llegue el pedido?

Conoce

Para determinar cuántos modelos de sudaderas recibirá la dueña del almacén, se representan los colores por B y N y las tallas por P, M, G y SG, y se construye un **diagrama de árbol** como el de la Figura 4.33.



Hay $2 \cdot 4 = 8$ modelos de sudaderas. Cada uno de los modelos corresponde a una rama del árbol.

Figura 4.33

El **diagrama de árbol**, conocido también como el *principio general de recuento*, consiste en que si un primer experimento puede hacerse de m formas diferentes y un segundo experimento puede hacerse de n formas diferentes, entonces los dos experimentos juntos pueden hacerse de $m \cdot n$ formas diferentes.

Ejemplo 1

Un determinado automóvil se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina, en cinco colores: blanco, rojo, azul, verde y negro, y con tres acabados: básico, semilujo y lujo. Para determinar cuántos modelos diferentes se construyen, se representan los motores por D y G; los colores por B, R, A, V y N, y los acabados por Ba, SL y L.

Se forma el diagrama de árbol de la Figura 4.34 y se observa que se construyen $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ modelos diferentes.

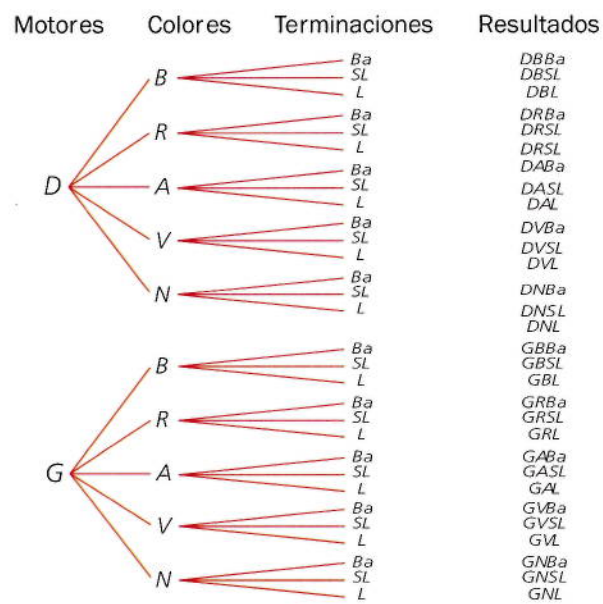


Figura 4.34

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Elabora un diagrama de árbol para determinar lo que se indica en cada caso.
   a. El número de maneras de combinar tres colores de medias con dos colores de zapatos.
   b. Formas de seleccionar un menú, teniendo cuatro opciones de ensalada, tres de carnes, cinco de jugos y dos de postre.
   c. Opciones para formar parejas de baile con cinco hombres y siete mujeres.
   d. Formas de mezclar tres frutas con dos tipos de líquidos distintos.

Resolución de problemas

2. En una heladería se venden conos de un sabor a elegir entre vainilla, fresa y arequipe, y se les pueden adicionar una salsa a elegir entre mora, crema de leche y leche condensada.

   a. Dibuja un diagrama de árbol.
   b. ¿Cuántos productos diferentes pueden escogerse en la tienda?

3. Se lanzan al aire dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el resultado de las caras superiores. Forma un diagrama de árbol. ¿Cuántos resultados diferentes pueden obtenerse?

4. El código de un candado consta de dos letras (A y B) y de dos números (1 y 2). Realiza el diagrama de árbol y calcula el número de códigos posibles.

5. Con las letras de la palabra "ROMA" se forman todas las palabras posibles de cuatro letras, tengan o no tengan sentido, sin repetir ninguna. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse?

6. Los partidos de semifinales de una competencia de baloncesto son entre el equipo A, el equipo B, el equipo C y el equipo D.

Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a las posibles finales.

7. En una organización se quiere elegir una nueva junta directiva. Para presidente hay tres candidatos: Julián, Gloria y Pablo; para secretario hay dos: Sara y Andrés, y para tesorero hay dos: Marco y Sofía. Representa en un diagrama de árbol todas las posibilidades de elección.

8. Una caja contiene tres balotas: una roja, una azul y una blanca. Dos de ellas se extraen con reemplazamiento, es decir, una vez se ha elegido una balota, se anota su color y luego vuelve a introducirse en la caja. Las balotas se revuelven antes de extraer una segunda balota y observar su color. ¿Cuáles son los posibles resultados?

Evaluación del aprendizaje

i. Se lanzan un dado y una moneda, uno a la vez, y se observa el número en el dado y la cara de la moneda que se obtiene en cada lanzamiento. Elabora un diagrama de árbol donde se muestren las distintas combinaciones que pueden obtenerse.

ii. Considera números de cinco cifras y responde las siguientes preguntas.
   a. ¿Cuántos son capicúas, es decir que se leen igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha?
   b. ¿Cuántos son impares?
   c. ¿Cuántos tienen las cinco cifras distintas?
   d. ¿Cuántos son pares, capicúas y mayores que 50 000?

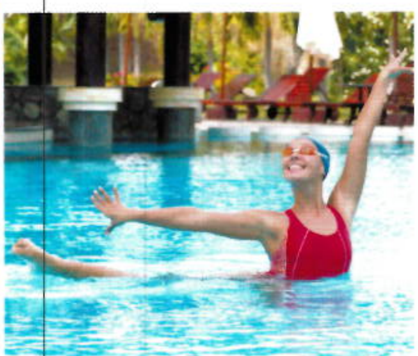
12 Permutaciones

Saberes previos

Para un menú se tiene gaseosa, jugo, té, papas fritas, chitos, galletas, manzana y durazno. Escribe todos los menús que se pueden armar con una bebida, un paquete y una fruta.

Analiza

Juliana, Andrea y Sofía participan en una competencia de nado sincronizado en la categoría individual.



- ¿De cuántas maneras pueden clasificarse para recibir las medallas de oro, plata y bronce?

Conoce

Para determinar de cuántas formas pueden clasificarse las tres participantes se representa a cada una con una letra y se forma el diagrama de árbol de la Figura 4.35.

- Para el 1.^{er} puesto, hay tres nadadoras.
- Para el 2.° puesto, restan dos opciones.
- Para la última medalla, solo queda una candidata posible.

Así pues, el número de clasificaciones diferentes es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

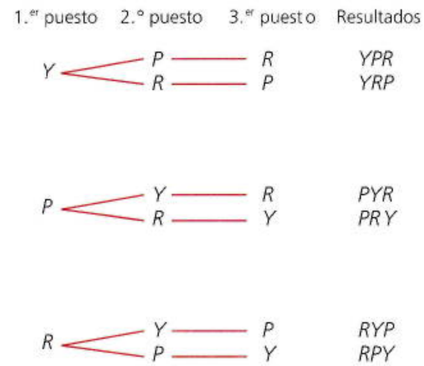


Figura 4.35

A cada una de las ordenaciones dadas por las ramas del diagrama de árbol se les llama *permutaciones de tres elementos*.

Las ordenaciones en las que intervienen a la vez todos los elementos y solo varía el orden de la colocación, se llaman **permutaciones**.

12.1 Permutaciones sin repetición

El número de **permutaciones sin repetición** de n elementos se representa por P_n y es igual a $P_n = n(n-1)(n-2)... 3 \cdot 2 \cdot 1$.

El número $n(n-1)(n-2) ... 3 \cdot 2 \cdot 1$ se llama **factorial de *n*** y se simboliza por ***n*!**, siendo n un número natural.

Los factoriales de 0 y de 1 se definen así: $0! = 1! = 1$.

12.2 Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de n elementos, donde el primer elemento se repite n_1 veces; el segundo, n_2 veces; ... , el último, n_k veces (donde $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$), son los distintos grupos que se pueden formar, de manera que:

- En cada grupo de n elementos, el primer elemento está n_1 veces; el segundo, n_2 veces, y así sucesivamente.
- Un grupo se diferencia de otro únicamente por el orden de colocación de sus elementos.

El número de **permutaciones con repetición** de n elementos, donde el primer elemento se repite n_1 veces; el segundo, n_2..., y el último, n_k veces, se representa por $P_n^{n_1, n_2 ... n_k}$. Su valor es:

$$P_n^{n_1, n_2 ... n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! ... n_k!}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 1

Con las letras de la palabra TELÉFONO, se puede formar una permutación de ocho elementos, donde dos de ellos se repiten una vez cada uno, y los cuatro elementos restantes son diferentes entre sí.

Luego, hay $P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!2!1!1!1!1!} = 10080$ ordenaciones diferentes.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Analiza y responde.

a. Con las letras de la palabra "PERA", ¿cuántos grupos diferentes de cuatro letras puedes escribir sin que se repita ninguna? ¿Y cuántos si la primera es la letra P?

b. Con las letras a, b, c, d, e y f, ¿cuántos grupos diferentes de seis letras pueden formarse sin que se repitan?

c. Con las letras de la palabra "COLOMBIA", ¿cuántos grupos diferentes de ocho letras pueden formarse?

d. En un juego de azar se eligen seis números del 1 al 49, incluyendo estos dos. ¿Cuántas jugadas distintas pueden efectuarse?

e. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse las letras de la palabra LIBRO?

Resolución de problemas

2 En una partida de cartas se reparten inicialmente cuatro a cada jugador. ¿De cuántas formas puede uno de ellos organizar sus cuatro cartas?

3 Sandra pone, cada día, libros de consulta en su estantería al llegar a casa. Allí están los seis libros que utiliza con mayor frecuencia. ¿Cuántas ordenaciones distintas puede realizar?

4 Para acceder a una caja fuerte se tiene que introducir un número de diez cifras. Se sabe que dicho número está formado por cinco doses, tres cincos y dos seises. ¿Cuántas claves diferentes se pueden formar?

5 Un equipo de baloncesto ha ganado un campeonato ganando diez partidos, empatando dos y perdiendo cuatro. ¿De cuántas formas diferentes ha podido obtener este resultado?

6 ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta los competidores de una carrera, si cinco tienen camiseta de color blanco, tres de color azul y seis de color rojo?

7 Si un equipo de fútbol participa en doce juegos, ¿cuántas maneras hay de que el equipo obtenga siete juegos ganados, tres empatados y dos perdidos?

8 En un banquete de bodas, hay mesas redondas con capacidad para ocho personas.

a. ¿De cuántas formas podrán sentarse en una de las mesas?

b. ¿Cuántas distribuciones diferentes habrá en una mesa en la que dos personas quieren estar juntas?

Evaluación del aprendizaje

A una reunión de alcaldes menores, acudieron doce mandatarios locales.

a. A la hora de tomar una foto conmemorativa se ubicaron en fila. ¿De cuántas formas distintas pudieron ubicarse?

b. A la hora de comer se sentaron en una mesa circular. ¿De cuántas maneras distintas pudieron ubicarse?

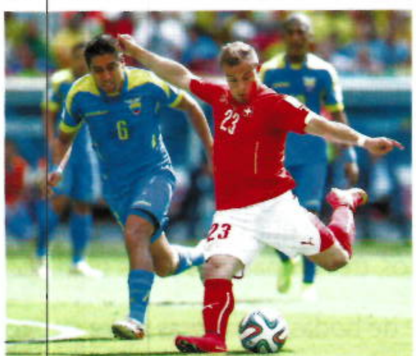
13 Variaciones y combinaciones

Saberes previos

Determina si es verdadera la igualdad $12! - 3! = (12 - 3)!$ Justifica.

Analiza

Se organizó un torneo benéfico con cuatro equipos profesionales de fútbol.



- Calcula de cuántas formas distintas pueden otorgarse los títulos de campeón y subcampeón.

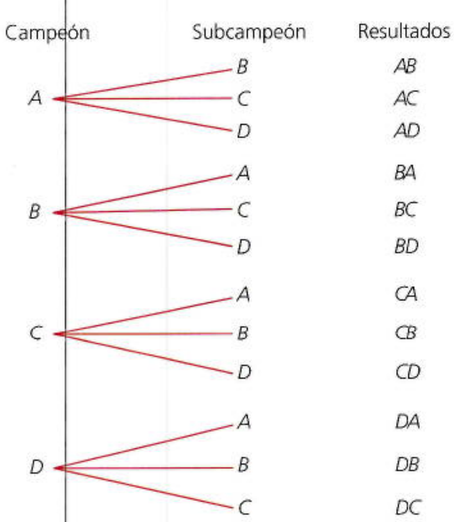


Figura 4.36

Conoce

Para calcular de cuántas formas distintas pueden otorgarse los títulos de campeón y subcampeón en este torneo, se representa a cada equipo con una letra: (*A*, *B*, *C* y *D*); y se elabora el diagrama de árbol de la Figura 4.36.

Por lo tanto, hay $4 \cdot 3 = 12$ formas diferentes de adjudicar los títulos.

13.1 Variaciones sin repetición

El número de variaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $V_{m,n}$ y es igual a:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

13.2 Variaciones con repetición

El número de **variaciones con repetición de *m* elementos tomados de *n* en *n*** se representa por $\boldsymbol{VR_{m,n}}$ y es igual a:

$$VR_{m,n} = m^n.$$

13.3 Combinaciones sin repetición

Las **combinaciones sin repetición** de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$) son los distintos grupos que pueden formarse con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos diferentes.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento pero no en el orden de colocación.

El número de **combinaciones sin repetición** de m elementos tomados de n en n se representa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

13.4 Combinaciones con repetición

Combinaciones con repetición de m **elementos** tomados de n en n son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento, pero no en el orden de colocación.

El número de **combinaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n se representa por $CR_{m,n}$ o $C'_{m,n}$ y se calcula mediante la expresión:

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} = C_{m+n-1,n}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Resolución de problemas

1 En una carrera participan 16 caballos y solo se adjudican tres premios.

Suponiendo que no pueden llegar a la meta al mismo tiempo, ¿de cuántas maneras pueden otorgarse los diferentes premios?

2 Una asociación ecológica está conformada por 30 socios fundadores. Si tienen que elegir presidente, vicepresidente, secretario y tesorero, ¿de cuántas formas diferentes pueden cubrirse esos cargos?

3 En un curso de 22 estudiantes, todos quieren sentarse en los cinco asientos de la primera fila. ¿De cuántas formas puede asignar el profesor esos asientos?

4 ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los dígitos impares? ¿Y con los pares?

5 Una ruta de bus intermunicipal recorre diez poblaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendrán que imprimirse teniendo en cuenta que en cada billete figura, en primer lugar, la localidad de origen, seguida de la localidad de destino y, por último, dice si el billete es solo de ida o de ida y vuelta?

6 En una revista, cada semana tienen una sección donde se analizan los signos del zodiaco. A cada uno de los doce signos se le asigna un número entero entre 0 y 5 en las categorías de salud, dinero, amor, amistades y familia. ¿Cuántos horóscopos distintos puede hacer la revista cada semana?

7 En un restaurante de comida rápida se puede elegir entre hamburguesa con queso, sándwich vegetal, sándwich mixto, ensalada y perro caliente. ¿Cuántos pedidos diferentes puede hacer un grupo de seis amigos?

8 Se tienen seis pelotas de golf que se colorean con tres colores diferentes. ¿De cuántas formas se pueden colorear?

9 Al girar una ruleta puede salir como resultado cualquier número natural comprendido entre 0 y 36, incluidos estos dos números.

Si se gira la ruleta tres veces, ¿cuántos resultados pueden obtenerse?

Evaluación del aprendizaje

i Con diez puntos del espacio, de los que tres no están nunca alineados, ¿cuántos triángulos distintos pueden formarse?

ii Una empresa ofrece cinco plazas vacantes. Tres de ellas corresponden a mujeres y dos, a hombres. Se presentaron quince hombres y doce mujeres.

a. ¿De cuántas formas distintas podrán cubrirse las vacantes, considerando que todas tienen igual salario?

b. ¿De cuántas formas distintas podrán cubrirse las vacantes si las plazas de las mujeres tienen todas distinto salario?

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Al graduarte del colegio puedes realizar alguno de estos estudios: técnico, tecnológico y profesional. Al concluir una carrera profesional puedes optar por hacer una especialización o una maestría. Escribe todas las opciones que tiene una persona al finalizar estudios de educación superior. ¿Consideras importante para tu proyecto de vida tener estos estudios?

14 Probabilidad frecuencial

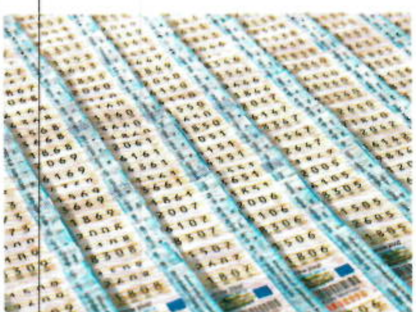
Saberes previos

Clasifica las siguientes situaciones según dependan o no del azar:

- Lanzar una moneda.
- Después del día viene la noche.
- Alimentarse todos los días.
- Ganarse la lotería.
- Marzo tiene 31 días.
- Escoger una carta de una baraja sin mirar.

Analiza

En un sorteo se vendieron 2 000 boletas numeradas del 1 al 2 000. Susana compró diez de ellas.



- ¿Qué probabilidad tiene Susana de ganar el sorteo?

Conoce

De acuerdo con la información, Susana tiene diez posibilidades de haber adquirido la boleta ganadora entre las 2000 del sorteo.

Si se denomina *A* al suceso "Ganar el sorteo", entonces la probabilidad que tiene Susana de ganar es: $\frac{10}{2000} = 0{,}005 = 0{,}5\%$.

14.1 Experimentos aleatorios

Un **experimento aleatorio** es cualquier situación que se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones, pero de la que se desconoce cuál será su resultado. Por el contrario, cuando el resultado es predecible, se denomina **experimento determinista**.

Si el experimento se repite gran número de veces entonces aparece algún modelo de regularidad estadística en los resultados obtenidos, de tal forma que se puede prever el resultado sin necesidad de volver a realizar el experimento.

14.2 Espacio muestral

Un **espacio muestral** (denotado E, S, Ω o U) consiste en el conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio.

Ejemplo 1

Para el experimento aleatorio de lanzar un dado, hay 6 posibles resultados que corresponden al número de puntos que hay en cada cara. Así, el espacio muestral para ese experimento es el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

14.3 Regla de Laplace

La **probabilidad frecuencial** es una medida obtenida de la experiencia de algún fenómeno o experimento aleatorio que permite estimar a futuro un comportamiento; sin embargo, no es definitiva, por lo que es importante saber interpretar los resultados que se obtienen.

La probabilidad frecuencial de un evento *A*, que se denota $P(A)$ y se conoce como **Regla de Laplace**, se obtiene dividiendo el número de veces que ocurre el evento entre el número total de veces que se realizó el experimento.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

Ejemplo 2

La probabilidad de que al lanzar un dado la cara superior muestre un número par de puntos es: $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$, pues existen seis casos posibles que corresponden al espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y de estos, tres son casos favorables, es decir, son números pares: $\{2, 4, 6\}$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Ten en cuenta el experimento aleatorio "Sacar una carta al azar de una baraja española". Luego, halla la probabilidad de cada suceso.

a. "Salir un caballo".

b. "Salir un oro".

c. "Salir un número menor que seis".

d. "Salir un número mayor que seis".

2 Halla las probabilidades que se indican en la siguiente situación.

En un intercambio cultural participan 17 estudiantes colombianos, 8 brasileros, 4 argentinos y 2 holandeses. Entre los participantes se elige uno al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea colombiano?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea brasilero?

3 Copia en tu cuaderno la Tabla 4.43, en la que se muestra la distribución de tres cursos de un colegio, y complétala.

	Niños	Niñas	
901	30		
902		60	100
903			78
	100		232

Tabla 4.43

Se escoge un estudiante al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a 901?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña y esté en 902?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niña y esté en 903?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niño y esté en 901?

4 Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que la última cifra de su cédula sea:

a. el número 8.

b. un número par.

c. un múltiplo de 4.

Resolución de problemas

5 Se gira la flecha de la ruleta de la Figura 4.37.

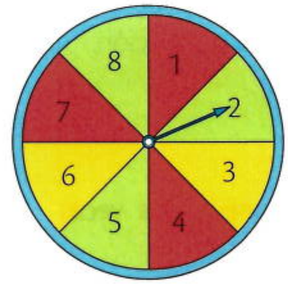


Figura 4.37

Calcula la probabilidad de cada suceso.

a. Salir un número par.

b. Salir un número impar y el color rojo.

c. Salir un número impar o el color amarillo.

d. Salir un número par o el color verde.

e. No salir el color rojo.

6 Se elige al azar una carta de una baraja francesa formada por 54 cartas (con dos comodines).

Calcula la probabilidad de cada suceso.

a. Sacar una pica o una figura.

b. Sacar una carta de palo rojo.

c. Sacar una carta de palo negro o una figura.

d. Sacar una carta de palo rojo y menor que 5.

e. No sacar un comodín.

7 La probabilidad del suceso contrario de A está dado por la fórmula $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Si A es el evento "lanzar un dado y obtener un número menor que 3", determina el suceso contrario de A.

Evaluación del aprendizaje

Calcula la probabilidad de que la última cifra de un número telefónico sea:

a. un 7.

b. un múltiplo de 3.

c. mayor que 5.

d. menor que 2.

15 Clases de eventos

Saberes previos

Hay una urna con 20 balotas numeradas del 1 al 20. Escribe cinco eventos asociados a la situación.

Analiza

Se lanza una moneda dos veces consecutivas.

- Si en el primer lanzamiento sale cara, ¿es más probable, menos probable o igualmente probable que salga cara en el segundo lanzamiento?

Conoce

Existen experimentos en los que un resultado no afecta a otro.
Si se lanza una moneda varias veces, el resultado que se obtenga al hacerlo la primera vez no afecta el resultado del siguiente lanzamiento.

15.1 Sucesos aleatorios

Un **suceso** o **evento aleatorio** es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo 1

El espacio muestral de lanzar un dado es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ahora bien, los posibles resultados para el evento "Lanzar un dado y que caiga en un número impar" son $A = \{1, 3, 5\}$. Se puede observar que los resultados del suceso están contenidos en el espacio muestral, es decir, $A \subseteq \Omega$

15.2 Clases de eventos

Dos eventos pueden ser **independientes**, **dependientes**, **mutuamente excluyentes**, **compatibles** e **incompatibles**.

- Dos eventos son **independientes** si el resultado del segundo evento no es afectado por el resultado del primero. Si A y B son eventos independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Dos eventos son **dependientes** si el resultado del primer evento afecta el resultado del segundo evento. Se escribe $P(B/A) = P(A \text{ y } B)/P(A)$.
- Dos eventos contrarios son **mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir al mismo tiempo. Si A y B son mutuamente excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Dos eventos son **compatibles** cuando tienen algún suceso elemental común. Si A y B son compatibles, entonces $A \cap B \neq \varnothing$.
- Dos eventos son incompatibles si no se pueden verificar simultáneamente. Si A y B son **incompatibles**, entonces $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 2

- Lanzar al aire dos veces una moneda: eventos **independientes**.
- Sacar una carta después de sacar una carta sin regresarla al mazo: eventos **dependientes** (el resultado de la segunda extracción depende de la primera carta extraída).
- Sacar una carta que sea un as y un rey: eventos **incompatibles** (ya que no pueden verificarse simultáneamente).
- Sacar puntuación par al tirar un dado y obtener múltiplo de 3: eventos **compatibles** (porque el 6 es un suceso elemental común).
- Sacar un número par al tirar un dado y sacar un número impar: eventos **mutuamente excluyentes** (porque $\{2, 4, 6\} \cap \{1, 3, 5\} = \varnothing$).

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Una caja contiene cuatro fichas rojas, tres verdes y dos azules. Se saca una ficha de la caja, luego se devuelve y se saca otra ficha. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera ficha sea azul y la segunda sea verde?

2 Una caja contiene cuatro fichas rojas, tres verdes y dos azules. Se saca una ficha de la caja y no se devuelve. Si se saca otra ficha de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera ficha sea azul y la segunda sea verde?

Razonamiento

3 Se efectúa una encuesta telefónica a 1000 personas para saber si creen necesario que se racione la energía eléctrica una hora diaria.

De los 390 hombres que contestaron, 215 respondieron que sí, y el resto que no. De las 610 mujeres que contestaron, 351 estuvieron de acuerdo, mientras que las demás no lo estuvieron.

Sean los sucesos *A*: "Estar de acuerdo con el racionamiento" y *B*: "Que haya respondido un hombre", ¿son *A* y *B* independientes? Justifica.

4 Al lanzar un dado se consideran los sucesos:

A: "Caer en número par", *B*: "Caer en un número mayor que 3" y *C*: "Caer en un número impar". De los tres pares de sucesos posibles (*A* y *B*, *A* y *C* y *B* y *C*), indica cuáles son compatibles y cuáles son mutuamente excluyentes.

Modelación

5 El 40% de un grupo juega baloncesto y el 60%, fútbol. Si el 85%, practica alguno de los dos deportes, ¿qué porcentaje juega a los dos?

6 Se lanza un dado, y si no sale 6, se lanza de nuevo. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un 6 en el segundo lanzamiento?

7 Se saca una ficha de una bolsa donde hay dos canicas rojas, dos blancas y una verde. Se observa el color, se devuelve a la bolsa y se saca otra ficha. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha roja en las dos extracciones?

8 Jorge tiene diez cartas numeradas del 1 al 10 y las pone boca abajo. Él escoge una carta al azar y la voltea. Si la carta tiene un número mayor que 5, la pone en una pila. Si la carta tiene el número 5 o un número menor, la pone en una segunda pila. Él gana el juego si logra juntar tres cartas en la primera pila antes de juntar tres cartas en la segunda pila.

Elige el enunciado que mejor describe la situación.

a. Los eventos son independientes, porque en el juego no se devuelve ninguna carta.

b. Los eventos son independientes, porque en cada ronda se puede sacar una carta con un número mayor que 5 o uno igual o menor que 5.

c. Los eventos no son independientes, porque un resultado es eliminado en cada turno y no es reemplazado.

Resolución de problemas

9 Se lanza un dado de seis caras y se anotan cuántos puntos se ven en su cara superior. Se consideran los sucesos $A = \{2,3\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{5\}$.

a. ¿Cómo son los sucesos *A* y *B*?

b. ¿Cómo son los sucesos *B* y *C*?

10 Si *A* y *B* son dos sucesos mutuamente excluyentes, y la probabilidad de *A* es 0,3 y la de *B* es 0,6, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran ambos sucesos?

11 En una clase hay diez niños y doce niñas. De ellos, cinco niños y ocho niñas tocan algún instrumento musical. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea niña y toque un instrumento?

Evaluación del aprendizaje

✓ Luis tiene ocho pares de medias: dos negros, dos cafés, dos blancos, uno rojo y uno azul. Quiere ponerse un par de medias blancas, pero tiene prisa para llegar al trabajo, por lo que agarra un par al azar. Si no es blanco, lo devolverá al cajón. Si continúa agarrando pares aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de sacar un par blanco en su tercer intento?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Medidas de tendencia central

Ejercitación

1 Halla la media, la mediana, la moda y los cuartiles del conjunto de datos presentados en la Tabla 4.44.

Tiempo de duración	Número de personas
[0, 7]	35
[7, 14]	23
[14, 21]	15
[21, 28]	10
[28, 32]	9

Tabla 4.44

Medidas de dispersión

Ejercitación

2 Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de los datos presentados en la Tabla 4.45.

Puntaje	Número de personas
[5, 9]	6
[9, 13]	9
[13, 17]	7
[17, 21]	15
[21, 25]	12

Tabla 4.45

3 Observa los datos de la Tabla 4,46. Luego, halla el coeficiente de variación. Interpreta los resultados.

X	41	29	35	24	25	19
Y	41	45	56	49	38	48

Tabla 4.46

4 De un estudio hecho a 124 personas sobre la edad a la que comenzaron a hablar, se obtuvo el histograma de la Figura 4.38. Halla las medidas de tendencia central y de dispersión.

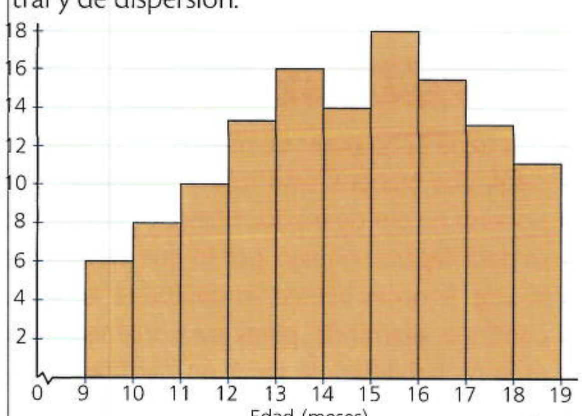


Figura 4.38

Variables estadísticas bidimensionales

Resolución de problemas

5 Lee y resuelve.

En la Tabla 4.47 se muestra el peso de Ana a medida que aumentaba su estatura.

Estatura (cm)	100	115	120	130	140	160
Peso (kg)	35	40	38	42	45	56

Tabla 4.47

a. Calcula el coeficiente de correlación que hay entre las dos variables.

b. Halla la recta de regresión.

c. Si la estatura es 165 cm, ¿cuál será su peso?

d. ¿Es fiable la anterior predicción? ¿Por qué?

Permutaciones y combinaciones

Resolución de problemas

6 Se quiere crear una clave telefónica con seis dígitos. Si la condición es que los dígitos no deben repetirse, ¿cuántas claves diferentes pueden obtenerse?

7 Un equipo de fútbol tiene tres estilos diferentes de camisetas, dos de pantalonetas y tres de medias. ¿De cuántas maneras diferentes pueden uniformarse para un partido?

8 Si las matrículas para motos se representan con tres letras y dos números, ¿cuántas motos pueden matricularse en este sistema?

9 Se tienen ocho regalos distintos para premiar a los mejores cuatro estudiantes del salón. A cada uno se le darán dos regalos. ¿De cuántas formas diferentes podrán entregarse los regalos?

Experimentos aleatorios y probabilidad

Resolución de problemas

10 Para una rifa, se vendieron 1000 boletas con cuatro números cada una. Alba compró tres boletas. ¿Qué probabilidad tiene de ganar con una boleta? ¿Y con las tres boletas?

11 Se lanzan dos dados, uno numerado con números pares y otro con números impares. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea un número primo?

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Descomponer el problema en partes

Problema

Doce personas viajan en tres automóviles, cada uno con cuatro personas, y cada vehículo es conducido por su dueño. ¿De cuántas maneras pueden repartirse en los vehículos las nueve personas restantes si la disposición de las personas dentro de cada uno no es relevante?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información puedes obtener del enunciado?

  R: El número de personas que viajan en tres vehículos.

- ¿Qué te piden encontrar?

  R: El número de maneras en que pueden acomodarse.

2. Crea un plan

- Identifica el tipo de ordenación que puede hacerse en el 1.° vehículo, luego en el 2.° y finalmente en el 3.°.

3. Ejecuta el plan

- Debe determinarse de cuántas maneras pueden acomodarse tres de los nueve pasajeros dentro del primer vehículo. Es decir:

$$C_{9,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ maneras}$$

- Se calcula el número de formas en que otros tres pasajeros ocuparán el segundo vehículo. Esto es:

$$C_{6,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \text{ maneras}$$

- Como las tres personas restantes ocuparán el tercer vehículo, entonces el número de maneras distintas es:

$$84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680 \text{ maneras}$$

R: Las nueve personas restantes pueden acomodarse en los tres vehículos de 1680 maneras distintas.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el número de maneras distintas en que pueden acomodarse los pasajeros en los tres vehículos, si se tiene en cuenta su posición dentro de cada uno, sea:

  362 880

Aplica la estrategia

1. El registro de inventario que realiza una empresa interventora utiliza series con una letra inicial seguida de tres números que pueden repetirse. ¿Cuántas series de registro pueden obtenerse si el número cero no puede incluirse?

   a. Comprende el problema

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

Resuelve otros problemas

2. Cuatro amigos se encuentran después de muchos años y deciden ir a almorzar para celebrar. El restaurante les ofrece una mesa para cuatro. ¿De cuántas formas diferentes pueden acomodarse en la mesa?

Formula problemas

3. Inventa un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

   "Para ir de Bogotá a Santa Marta, Andrés debe pasar por Medellín. A Medellín puede ir en avión, en carro particular o en transporte público, y de Medellín a Santa Marta solo puede ir en avión o en transporte público".

Enriquece tu vocabulario

- Completa el siguiente organizador gráfico.

Técnicas de conteo

Evaluación del aprendizaje

Variables estadísticas

Comunicación

1 Clasifica los siguientes caracteres estadísticos en cualitativos y cuantitativos. En caso de que sean cuantitativos determina si son discretos o continuos. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Coeficiente intelectual

b. Número de libros en una biblioteca

c. Medalla ganada en una competencia deportiva

d. Número de mascotas

e. Distancia recorrida por un automóvil

Gráficas estadísticas. Inferencias de poblaciones

Comunicación

2 En la Tabla 4.48 se registra el número de habitantes por vivienda en cierta ciudad. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Número de habitantes	Viviendas
1	20 000
2	100 000
3	275 000
4	150 000
5	75 000
Más de 5	25 000

Tabla 4.48

a. ¿Cuántas viviendas se observaron?

b. Escribe dos conclusiones relacionadas con la información.

c. Representa la información en un diagrama de barras, un diagrama circular y un pictograma.

3 En la Tabla 4.49 se registra el número de celulares vendidos en una ciudad en los últimos 5 años. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Año	Número de celulares
2012	50 000
2013	65 000
2014	76 000
2015	72 000
2016	84 000

Tabla 4.49

a. Representa la información en un diagrama de puntos.

b. Escribe dos conclusiones relacionadas con la variación en el número de celulares vendidos.

Ejercitación

4 Observa el histograma de la Figura 4.39. PREGUNTA ABIERTA

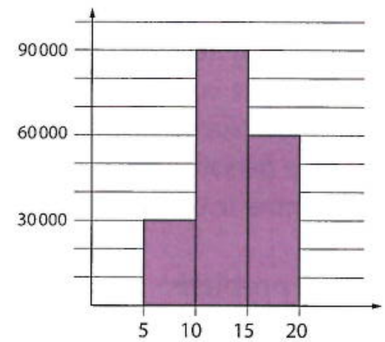


Figura 4.39

a. Construye una distribución de frecuencias.

b. Escribe una situación que pueda representarse con el histograma.

5 Observa el diagrama de caja y bigotes de la Figura 4.40 y calcula L_i, Q_1, Q_2, Q_3 y L_s. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

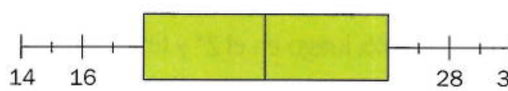


Figura 4.40

Resolución de problemas

6 En una empresa en la que se fabrican azulejos se quiere llevar a cabo un control de calidad de sus productos. Los responsables del estudio piden a un empleado que seleccione las muestras de azulejos, quien, al hacerlo, no elige los esperados. En el control de calidad no se detectan piezas imperfectas y, sin embargo, la fábrica recibe más devoluciones de las esperadas. ¿Por qué crees que sucedió esto? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Medidas de tendencia central, de posición no central y de dispersión

Resolución de problemas

7 Observa la Figura 4.41. Determina las variables que intervienen en el problema y halla las medidas de tendencia central de la distribución, y describe la relación que hay entre ellas. PREGUNTA ABIERTA

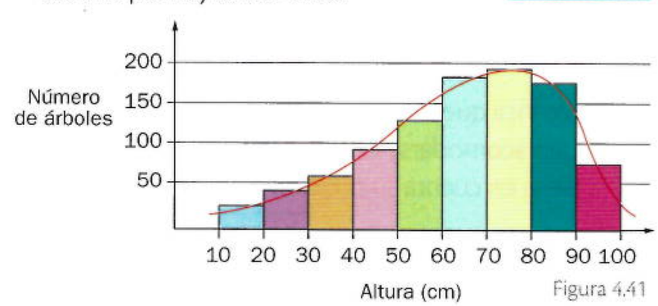


Figura 4.41

Comunicación

8 Una panadería identificó el número de clientes que tuvo en los primeros nueve días en que estuvo abierta al público; el número de clientes fue

ACTIVIDAD DE REFUERZO

200	295	250	75	351
235	257	267	400	

Determina los cuartiles y plantea algunas conclusiones.

9 En la Tabla 4.50, se muestra el número de ausencias de los estudiantes de noveno a una clase a lo largo de un mes.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

Número de estudiantes	10	7	6	2	1	4
Número de ausencias	0	1	2	3	4	5

Tabla 4.50

a. ¿Cuál es el rango de los datos?

b. ¿Cuáles son la varianza y la desviación típica?

Correlación lineal

Resolución de problemas

10 A partir de una encuesta a 30 jóvenes sobre el número de libros que leen al cabo de un año, se obtuvieron los datos de la Tabla 4.51.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

x	0	1	2	3	4	5	6	$\geqslant 7$
f_i	5	6	8	3	3	2	2	1

Tabla 4.51

Sobre el número de películas vistas en un año, se obtuvieron los datos de la Tabla 4.52.

y	3	5	7	9	12	15	18	$\geqslant 20$
f_i	5	6	8	3	3	2	2	1

Tabla 4.52

a. ¿Está relacionado el número de libros que leen los jóvenes con las películas que ven? Considera para ello la variable bidimensional (x, y) construida a través de los pares (x_i, y_i) y elabora una tabla de doble entrada.

b. Dibuja el diagrama de dispersión. Indica qué tipo de correlación tienen.

Permutaciones y combinaciones

Resolución de problemas

11 Seis amigos van al cine y compran seis entradas con asientos consecutivos. ¿De cuántas maneras pueden sentarse?

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

12 En un colegio, las seis aulas de un pasillo están destinadas a los seis grupos de noveno grado.

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

¿De cuántas formas pueden distribuirse esos seis grupos en este pasillo?

13 Se puede entrar y salir de un polideportivo por cinco puertas diferentes. ¿De cuántas maneras puede una sola persona acceder y salir del mismo?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Probabilidad y clases de eventos

Resolución de problemas

14 En una urna hay 30 balotas numeradas del 1 al 30. Se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de que la balota extraída:

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Sea número par.

b. Sea un número que termina en 0.

c. Sea múltiplo de 5.

15 Relaciona cada evento con el tipo de suceso correspondiente al trabajar con una baraja de póker.

ACTIVIDAD DE REFUERZO

a. Sacar el rey de corazones.	Seguro
b. Sacar una carta de espadas.	Compuesto
c. Sacar una carta de la baraja.	Elemental
d. Sacar una carta de picas.	Aleatorio
e. Sacar varias cartas de la baraja.	Imposible

16 Escribe dos ejemplos de eventos independientes, dos de eventos dependientes y dos de eventos mutuamente excluyentes.

RESPUESTA ABIERTA

5 Función lineal. Sistemas de ecuaciones

Ya sabemos

- Ubicar puntos en el plano de coordenadas.
- Solucionar ecuaciones de primer grado.

Vamos a aprender

- A identificar y reconocer las características de una función.
- A resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Nos sirve para

- Interpretar problemas mediante el uso de funciones.
- Modelar problemas mediante sistemas de ecuaciones 2 · 2.

1 Concepto de función

Saberes previos

¿Qué es un par ordenado? ¿Cómo se ubica en el plano cartesiano una pareja ordenada?

Analiza

Considera estos conjuntos A y B:

$A = \{2, 3, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 4, 9, 10\}$

- Si x es un elemento de A y y, un elemento de B, puede definirse una relación R de A en B mediante el enunciado: "y es múltiplo de x". ¿Cuáles son los elementos de R?

Conoce

De acuerdo con su definición, la relación R hace corresponder a x, de A, algún elemento y, de B, siempre y cuando y sea múltiplo de x.

Por lo tanto, la relación está conformada por todas las **parejas ordenadas** de la forma (x, y) que cumplan la condición que define a R, así:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (3, 9), (5, 10)\}.$$

Una **función** f es una relación definida de un conjunto A en un conjunto B, tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B mediante f.

Ejemplo 1

Sean $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7\}$, y R_1 una relación definida mediante el enunciado: "x es el siguiente de y" siempre que x sea un elemento del conjunto A y y, un elemento del conjunto B.

Se observa que la relación R_1 está dada por:

$$R_1 = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$$

De acuerdo con lo anterior, se concluye que esta relación es una función, pues no existen pares ordenados que tengan el mismo primer elemento, y cada elemento del conjunto A está asociado a un único elemento del conjunto B.

1.1 Dominio y recorrido de una función

El **dominio de una función** f, denotado por $D(f)$, es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente x. **El rango o recorrido de una función** f, denotado por $R(f)$, es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y.

Ejemplo 2

La función $y = \dfrac{2}{x-1}$ está definida para todo número real, excepto para aquel que anula el denominador. En este caso, el valor que anula el denominador es $x = 1$; por lo tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Para determinar el recorrido de la función, se despeja la variable x en términos de la variable y. Luego se intercambian los nombres de las variables, con lo cual se obtiene la expresión $y = \dfrac{2+x}{x}$, que estará definida para todo número real, excepto para $x = 0$; es decir, $R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

1.2 Representación gráfica de una función

La **representación gráfica de una función** $y = f(x)$ en el plano cartesiano consta de todos los puntos cuyas coordenadas se expresan mediante parejas ordenadas de la forma (x, y) que pertenecen a dicha función.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Modelación

1 Escribe la función que representa cada enunciado. En cada caso, determina la variable independiente y la variable dependiente.

a. El costo mensual del servicio de telefonía celular (C) es de \$ 200 por minuto más \$ 5 800 de cuota fija.

b. El salario neto (G) de una persona que gana \$ 20 000 por hora.

Comunicación

2 Completa la Tabla 5.1. Observa el ejemplo.

Función expresada mediante un enunciado	**Función expresada mediante su expresión algebraica**
Función que a cada número le asocia su triple.	$y = 3x$
Función que a cada número le asocia su doble menos 3.	
Función que a cada número le asocia su mitad.	
	$y = x^2$

Tabla 5.1

3 Halla el dominio y el rango de cada función.

a. $f(x) = 5x - 7$

b. $f(x) = |x|$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d. $f(x) = -2x^3 + 8x + 3$

e. $f(x) = \dfrac{12}{x-5}$

f. $f(x) = \sqrt{x+1}$

Razonamiento

4 Indica cuál de las siguientes gráficas no corresponden a una función. Justifica tu respuesta.

a.

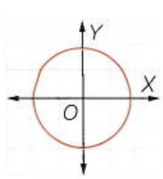


Figura 5.1

b.

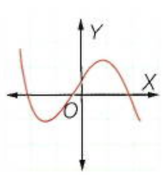


Figura 5.2

Resolución de problemas

5 Si una roca cae al piso libremente desde una altura de 50 m, la altura h, en metros, al transcurrir x segundos es aproximadamente:

$$h(x) = 50 - 4{,}9x^2$$

¿A qué altura está la roca cuando transcurre un segundo? ¿Y cuándo transcurren dos segundos?

Evaluación del aprendizaje

Observa el ortoedro de la Figura 5.3 y resuelve.

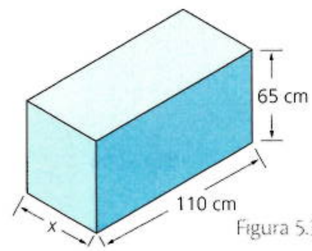


Figura 5.3

a. Escribe una función que relacione el volumen del ortoedro $V(x)$ con la medida de su ancho x.

b. Determina el volumen del ortoedro para las medidas de x dadas en la Tabla 5.2.

x	$V(x)$
15 cm	
20 cm	
25 cm	
30 cm	

Tabla 5.2

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Las mujeres cuello de jirafa usan anillos de metal que se incrementan uno cada año desde los 5 hasta los 12 años. A partir de esta edad, se añaden los máximos posibles hasta que el cuello llegue a su tope. ¿Esta situación es una función? Explica.

- ¿Por qué es importante el respeto a la diferencia cultural?

2 Funciones crecientes y funciones decrecientes

Saberes previos

Dada la función $f(x) = 5x + 3$, calcula $f(0)$, $f(-2)$, $f(-\frac{3}{5})$ y $f(-\frac{1}{5})$. ¿Para qué valores de x la función f es 0?

Analiza

Observa la gráfica de la función f representada en la Figura 5.4.

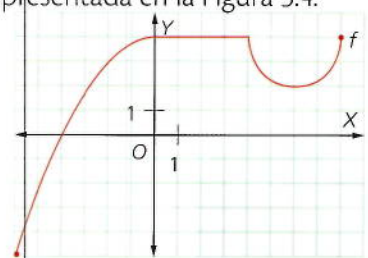


Figura 5.4

- ¿En qué intervalos crece la gráfica de f? ¿En cuáles decrece?

Conoce

En la gráfica de la función se observa que:

- f es creciente en los intervalos $[-6, 0]$ y $[6, 8]$, pues los valores de y crecen en estos intervalos.
- f es decreciente en $[4, 6]$, ya que los valores de y decrecen en este intervalo.

Una función f es **creciente** en un intervalo I si para todo $a \in I$ y $b \in I$ con $a < b$, se cumple que $f(a) < f(b)$.

Una función f es **decreciente** en un intervalo I si para todo $a \in I$ y $b \in I$ con $a < b$, se cumple que $f(a) > f(b)$.

2.1 Tasa de variación

La **tasa de variación** de una función f, al pasar de un punto a a un punto b, está dada por la expresión: $TV\,[a, b] = f(b) - f(a)$.

Ejemplo 1

En la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$, cuando el valor de x pasa de 1 a 2, la tasa de variación se halla de la siguiente manera:

$$TV[1, 2] = f(2) - f(1) \Rightarrow TV[1, 2] = 1 - 2 = -1.$$

Por tanto, la tasa de variación de $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$ es -1.

2.2 Crecimiento y decrecimiento

Una función es **creciente** en un intervalo si para un par de valores a y b en el intervalo, con $a < b$, su **tasa de variación es positiva**; esto es, $TV > 0$.

Una función es **decreciente** en un intervalo si para un par de valores a y b en el intervalo, con $a < b$, su **tasa de variación es negativa**; esto es, $TV < 0$.

Ejemplo 2

- La función $h(x) = 3x^2 - 1$ es **decreciente** en el intervalo $[-5, -2]$ porque la tasa de variación $TV[-5, -2] = -63$ y $-63 < 0$.
- La función $g(x) = x^5 + 2$ es **creciente** en el intervalo $[-4, -1]$ porque la tasa de variación $TV[-4, -1] = 1\,023$ y $1\,023 > 0$.

Ejemplo 3

La función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ es creciente en el intervalo $[0, 1]$, pues

$$TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 2 - (-3) = 5.$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Observa las gráficas de las figuras 5.5 a 5.8. Luego, indica si son crecientes o decrecientes.

a.

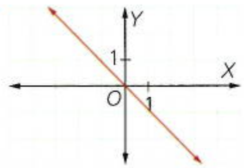


Figura 5.5

b.

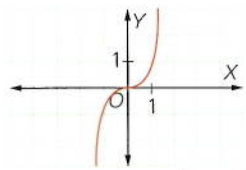


Figura 5.6

c.

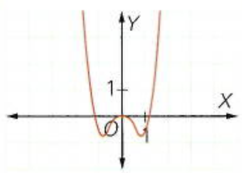


Figura 5.7

d.

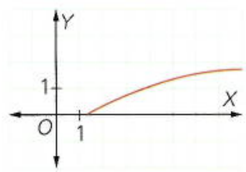


Figura 5.8

2 Calcula la tasa de variación de cada función en los intervalos dados.

a. $f(x) = 2x^2$

$TV[-3, 0]$ y $TV[1, 2]$

b. $g(x) = -9x^2 + 7x - 5$

$TV[2, 4]$ y $TV[-3, 0]$

c. $i(x) = 7$

$TV[-3, 5]$ y $TV[8, 15]$

Razonamiento

3 Clasifica las siguientes funciones en crecientes o decrecientes, según corresponda.

a. $g(x) = -5$

b. $h(x) = 2x + 4$

c. $j(x) = 2x$

d. $p(x) = -2^{x+1}$

e. $l(x) = 3$

f. $f(x) = -4x + 5$

g. $k(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

h. $k(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

4 Indica si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.

a. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ es creciente en el intervalo $[0, 2]$.

b. La función $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$ es creciente en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

c. La función $f(x) = x + \dfrac{x}{4}$ es decreciente en el intervalo $[2, 6]$.

Resolución de problemas

5 En la gráfica de la Figura 5.9 se muestra la variación de la estatura de una persona cada cinco años. ¿Entre qué edades la estatura fue creciente?

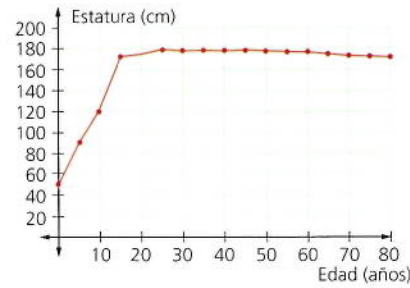


Figura 5.9

Evaluación del aprendizaje

Describe los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones.

a.

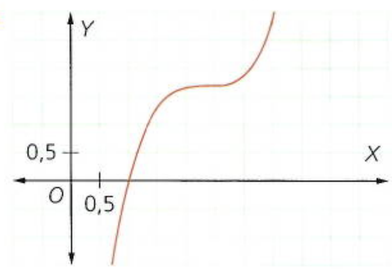


Figura 5.10

b.

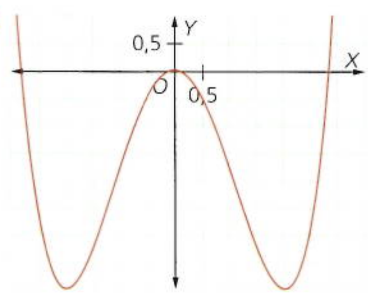


Figura 5.11

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Averigua cuántos casos de violencia física se han presentado durante este año en tu colegio y cuántos se presentaron el año pasado en el mismo periodo. De mantenerse la variación, ¿qué podrá suceder el próximo año?

- ¿Por qué es importante el respeto a la diferencia para la solución de conflictos?

3 Funciones lineal y afín. Representación gráfica

Saberes previos

Ubica en el plano cartesiano los puntos (1, 1) y (−5, −5). Luego, traza una línea recta que pase por esos puntos. ¿Qué característica tiene la gráfica de la recta que trazaste?

Analiza

La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de 540 cm^3 y la velocidad de caída es de 9 cm^3 por minuto.

- ¿Cuánto tiempo transcurre para que haya la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj?
- Elabora una gráfica que represente la situación.

Conoce

Para analizar la situación, puede completarse una tabla que muestre la relación entre el tiempo transcurrido t, en minutos, y el volumen de la arena V, en centímetros cúbicos, que queda en la parte superior del reloj. Observa la Tabla 5.3.

t	1	10	20	30	40	50	60
$V(t)$	531 cm^3	450 cm^3	360 cm^3	270 cm^3	180 cm^3	90 cm^3	0 cm^3

Tabla 5.3

La relación entre t y V corresponde a una función. El tiempo transcurrido hasta el momento en el que la cantidad de arena es la misma en ambos lados del reloj es de 30 minutos.

La gráfica que representa la relación entre t y V puede observarse en la Figura 5.12, y corresponde a un segmento de recta cuya expresión algebraica está dada por: $V(t) = 540 - 9t$.

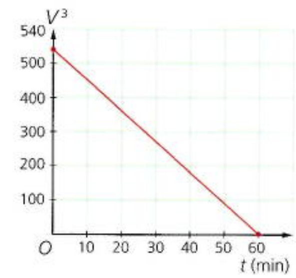


Figura 5.12

3.1 Función lineal

Una **función lineal** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{f(x) = mx}$, siendo m un número real diferente de 0.

Algunas características de la función lineal $f(x) = mx$ son las siguientes:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen.
- El valor de $\boldsymbol{m}$ se llama **constante de proporcionalidad**. Si $m > 0$ la función es creciente y si $m < 0$ la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.
- Es una función **continua**.

Ejemplo 1

El ICE (*Inter city Express*) es un tren que conecta todas las ciudades principales de Alemania. Alcanza una velocidad media de 270 km/h. En la Tabla 5.4 se muestra la distancia D que recorre en función del tiempo t.

t **(Tiempo en horas)**	1	2	3	4	5	...
$D(t)$ **(Distancia recorrida en km)**	270	540	810	1 080	1 350	...

Tabla 5.4

Esta situación puede modelarse por medio de la función $D(t) = 270t$, cuya gráfica es una línea recta que pasa por (0, 0), como se observa en la Figura 5.13. En este caso, la constante de proporcionalidad es 270.

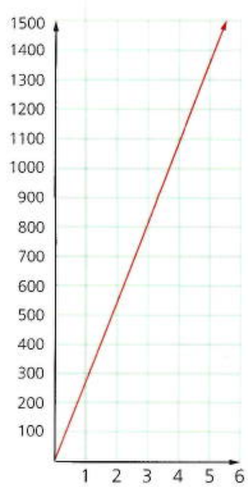


Figura 5.13

3.2 Función afín

Una **función afín** es aquella cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$, siendo m y b números reales distintos de 0.

Las principales características de la función afín $f(x) = mx + b$ son:

- Su gráfica es una **línea recta** que pasa por el punto $(0, b)$. Este se denomina **punto de corte** con el eje de ordenadas.
- El número $\boldsymbol{m}$ se llama **constante de proporcionalidad**. Si $m > 0$ la función es creciente y si $m < 0$ la función es decreciente.
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.
- Es una función **continua**.

3.3 Gráfica de una función afín

La **gráfica de la función afín** $f(x) = mx + b$ se obtiene al desplazar verticalmente la gráfica de la función $f(x) = mx$.

En la Figura 5.14 se observa que:

- Si $b > 0$, el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $b < 0$, el desplazamiento es hacia abajo.

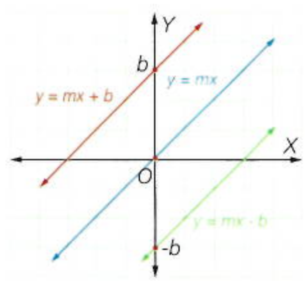


Figura 5.14

Ejemplo 2

En cierto experimento se midió la temperatura de un líquido sometido a un aumento gradual de temperatura. Los datos se muestran en la Tabla 5.5.

Tiempo en minutos (x)	0	1	2	3	4	5	...
Temperatura en ºC (y)	12	24	36	48	60	72	...

Tabla 5.5

Al graficar la relación dada entre el tiempo que transcurre y la temperatura del líquido, se obtiene una línea recta que no pasa por el origen (Figura 5.15). Esto significa que dicha relación es una función afín cuya constante de proporcionalidad es 12 y corta el eje X en el punto $(0, 12)$.

Del razonamiento anterior se tiene que $m = 12$ y $b = 12$, con lo cual puede deducirse que la expresión algebraica de la función es $y = 12x + 12$.

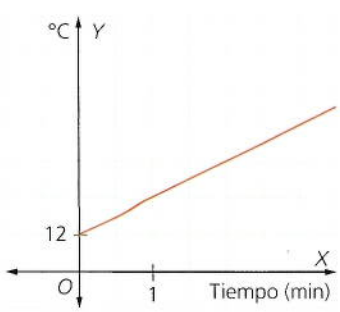


Figura 5.15

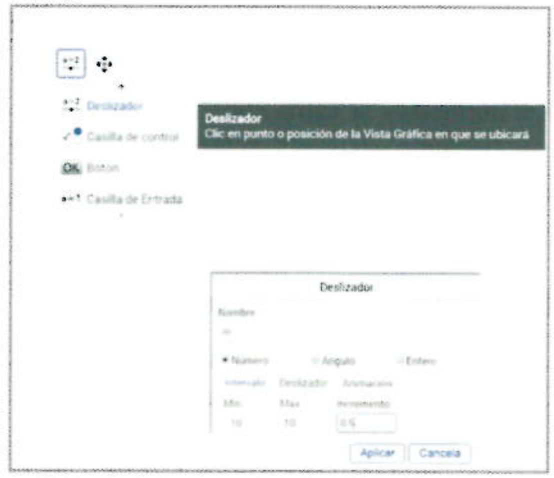
MatemaTICS

Representa funciones lineales y afines con GeoGebra

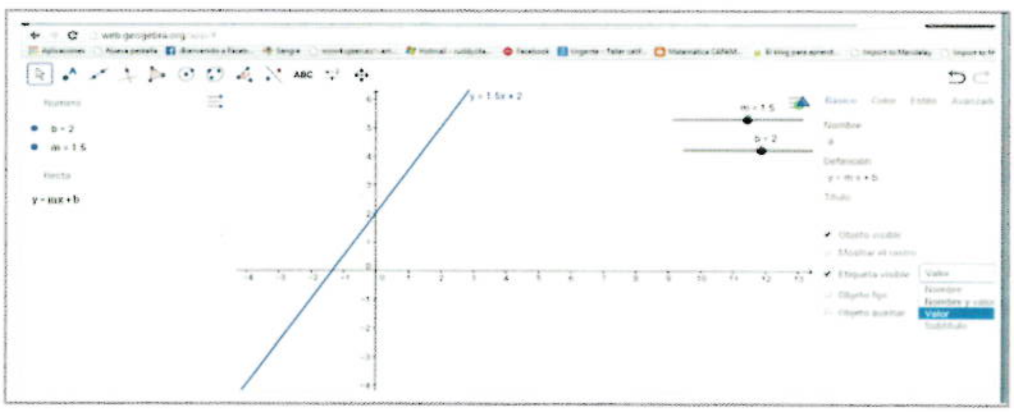
Para representar diversas funciones lineales o afines con GeoGebra se puede ingresar a la página y descargar el programa o trabajar directamente desde la página. En esta ocasión se trabajará directamente desde la página (www.geogebra.org).

- Selecciona la opción *Comienza a crear.*

- Señala la opción *Álgebra.*
- En la barra de herramientas selecciona *Deslizador* y sobre la zona gráfica o el área de trabajo da clic en el punto donde quieres que se ubique el deslizador. Se abrirá una ventana en donde debe digitarse el *Nombre* m, Intervalo *Min*: −10 *Máx*: 10 e *Incremento*: 0.5. Luego, se ubica un segundo deslizador con *Nombre* b, Intervalo *Min*: −10 *Máx*: 10 e *Incremento*: 0.5.



- Cuando se digita (en minúsculas), $f(x)=mx+b$ en el campo de *Entrada*, el programa muestra la gráfica. En el área de trabajo da clic izquierdo sobre la gráfica y luego señala *Propiedades*; en la parte izquierda de la pantalla aparecerán las opciones para editar el color de la gráfica. En *Básico* selecciona la opción *Etiqueta visible*, despliega las opciones y selecciona *Valor*; de esta forma se observará la función que se está graficando a medida que mueves los deslizadores.



Utiliza esta creación para realizar lo siguiente:

- Sitúa el deslizador en $m = 0$ y mueve el deslizador b. Responde: ¿cómo son las gráficas?
  Ahora fija el valor del deslizador en $b = 5$. La recta que se dibuja es de la función $y = 5$. Escribe las coordenadas de tres puntos de esta función.
- Sitúa el deslizador en $b = 0$ y mueve el deslizador m. Responde: ¿todas las gráficas pasan por un mismo punto?, ¿cuál es ese punto?
- Mueve el deslizador m para que tome valores positivos únicamente. Responde: cuando m es positivo, ¿son las gráficas, crecientes o decrecientes? Por último, mueve el deslizador m para que tome valores negativos únicamente. Responde: cuando m es negativo, ¿son las gráficas crecientes o decrecientes?

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Determina, en cada caso, cuál es la constante de proporcionalidad de la función.

a. $j(x) = 7x$ b. $k(x) = \frac{1}{2}x$
c. $l(x) = -3x$ d. $g(x) = -5x$

2 Indica si las siguientes funciones son lineales, afines o ninguna de las dos.

a. $g(x) = 25x^2 - 13$ b. $h(x) = 2x + 4$
c. $j(x) = 15^x$ d. $k(x) = \frac{4}{3}x$
e. $l(x) = 3$ f. $f(x) = -4x + 5$

3 Identifica la constante de proporcionalidad y el punto de corte con el eje de ordenadas de cada función.

a. $j(x) = -2x + 1$ b. $f(x) = -3(x + 5)$
c. $m(x) = 4 - 7x$ d. $g(x) = -x + 10$

4 Representa en un mismo plano cada función afín con su respectiva función lineal asociada.

a. $f(x) = -2x + 7$ b. $g(x) = 9x - 3$
c. $t(x) = 5 - 3x$ d. $j(x) = 3 - 9x$

5 Representa en un plano los valores de cada tabla. Luego, determina si corresponden a una función lineal, afín o no lineal.

a.

x	$y = f(x)$
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

Tabla 5.6

b.

x	$y = f(x)$
−2	−8
−1	−4
0	0
1	4
2	8

Tabla 5.7

c.

x	$y = f(x)$
−2	−8
−1	−3
0	2
1	7
2	12

Tabla 5.8

d.

x	$y = f(x)$
−2	−8
−1	1
0	0
1	−8
2	1

Tabla 5.9

Resolución de problemas

6 Observa y responde.

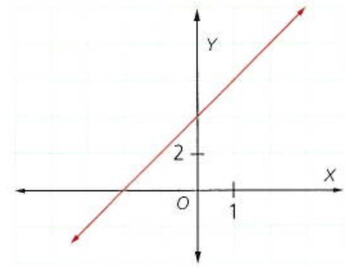


Figura 5.16

¿A cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la Figura 5.16?

a. $g(x) = -3x + 3$ b. $h(x) = 2x + 4$
c. $j(x) = -8x - 3$ d. $k(x) = -\frac{4}{3}x + 5$
e. $l(x) = 9$ f. $f(x) = 4x - 50$
g. $p(x) = x - 1$ h. $r(x) = 1 - x$

7 Por el alquiler de un auto Chevrolet Spark GTI, sin conductor, se cobra \$ 70 000 diarios más \$ 50 por kilómetro recorrido.

a. Halla la función lineal que relaciona el costo diario del alquiler con el número de kilómetros y represéntala.

b. Si en un día se recorren 300 km, ¿cuánto debe pagarse por el alquiler?

Evaluación del aprendizaje

Una empresa que transporta maletas establece sus tarifas de la siguiente manera: \$ 10 por kilómetro recorrido y \$ 15 por cada maleta transportada.

a. ¿Cuánto costará trasladarse 100 km con una maleta? ¿Cuánto costará trasladarse 200 km con una maleta?

b. Completa la Tabla 5.10 considerando que se lleva una sola maleta.

Distancia en km (x)	100	150	250	300
Precio en pesos (y)				

Tabla 5.10

c. Expresa la fórmula de la función que relaciona la distancia en kilómetros y el valor del traslado de una sola maleta.

4 Pendiente de una recta

Saberes previos

¿Qué tipo de función es $f(x) = -2x + 3$? Escribe dos puntos que pertenezcan a ella.

Analiza

En la Tabla 5.11 se muestra el número máximo de latidos del corazón de una persona sana mientras hace actividad física en un intervalo de 30 segundos.

Edad en años x	Número máximo de latidos y
20	100
30	95
40	90

Tabla 5.11

- ¿Cuál es la variación de la cantidad máxima de latidos cada 10 años?

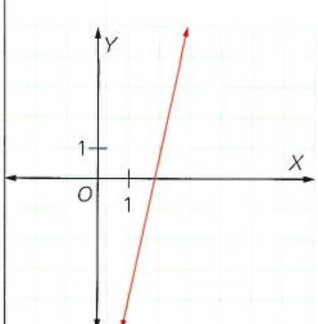


Figura 5.17

Conoce

En la Tabla 5.11 se observa que el número de latidos del corazón disminuye a medida que aumenta la edad, pero también se infiere que el cambio sobre el número de los latidos del corazón es **constante**.

Este valor constante indica el cambio de una variable por unidad de cambio de la otra, y es llamado **tasa de cambio**. Gráficamente, en el plano cartesiano, correspondería a la **pendiente** de la recta que modela la situación.

En general, en una relación funcional $y = f(x)$, la razón de cambio de la variable dependiente y con respecto a la variable independiente x se calcula mediante la expresión:

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos pares de valores de la función.

En la Tabla 5.12 se muestra que la tasa de cambio de los datos sobre los latidos del corazón es constante. Es decir, su pendiente es $-0{,}5$.

Solo las funciones lineales o afines tienen una tasa de cambio promedio constante.

Edad en años x	Número máximo de latidos	
20	100	
30	95	$\frac{95-100}{30-20} = -0{,}5$
40	90	$\frac{90-95}{40-30} = -0{,}5$

Tabla 5.12

En una función lineal $y = mx$ o en una función afín $y = mx + b$, la **constante de proporcionalidad** m corresponde a la **pendiente** de la recta mediante la cual se representa la función.

De acuerdo con lo anterior, tanto las funciones lineales como las funciones afines son **crecientes** en su dominio si su pendiente es positiva y son **decrecientes** en su dominio si su pendiente es negativa. Además, una función afín es **constante** si su pendiente es cero y corresponde a una recta paralela al eje X.

Ejemplo 1

Para hallar la pendiente de la recta de la Figura 5.17, se consideran dos puntos que pertenezcan a ella; por ejemplo, $(x_1, y_1) = (1, -4)$ y $(x_2, y_2) = (2, 1)$. Luego, se reemplazan los valores correspondientes en la expresión general de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-4)}{2-1} = 5$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta dada es 5.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos dados.

a. $(-1, 0)$ y $(0, 1)$

b. $(0, 1)$ y $(1, 0)$

c. $(-1, 4)$ y $(2, 4)$

d. $(-6, 4)$ y $(5, -2)$

Comunicación

2 Lee y resuelve.

Cuando la pendiente de una recta es indeterminada, dicha recta es vertical (paralela al eje Y). Por ejemplo, $x = 3$ es la ecuación de una recta cuya pendiente no puede determinarse. Su gráfica se muestra en la Figura 5.18.

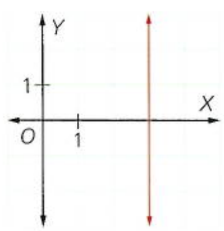


Figura 5.18

Traza la gráfica de las siguientes rectas.

a. $x = -3$

b. $x = 4$

3 Calcula la pendiente de las rectas que se muestran en las figuras 5.19 a 5.22.

a.

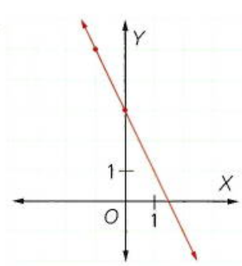


Figura 5.19

b.

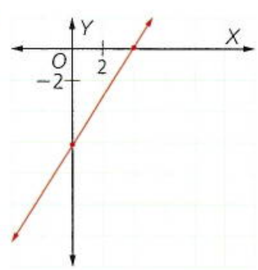


Figura 5.20

c.

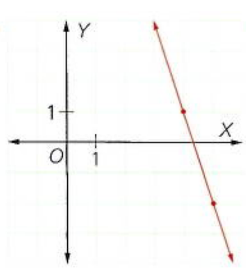


Figura 5.21

d.

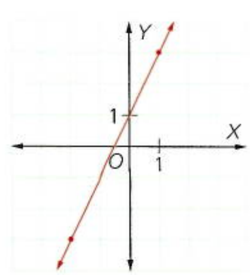


Figura 5.22

Resolución de problemas

4 El encargado de pruebas de velocidad de una empresa aeronáutica desea conocer la velocidad de un avión en cierto lapso de tiempo. Para ello, midió el tiempo en minutos junto con la distancia recorrida en kilómetros (Tabla 5.13).

Tiempo (m) x	**Distancia recorrida (km)** y
20	100
30	125
40	150

Tabla 5.13

a. Analiza los datos y decide si el avión tiene una tasa de variación de cambio constante o no, a partir de la relación entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida.

b. Halla una función lineal que modele la situación.

Evaluación del aprendizaje

Estudia las tablas de valores. Luego, clasifícalas, según corresponda, en funciones crecientes, decrecientes o constantes.

a.

x	$y = f(x)$
-2	7
-1	7
0	7
1	7
2	7

Tabla 5.14

b.

x	$y = f(x)$
-2	5,5
-1	5,25
0	5
1	4,75
2	4,5

Tabla 5.15

c.

x	$y = f(x)$
-2	9
-1	11
0	13
1	15
2	17

Tabla 5.16

d.

x	$y = f(x)$
-2	-12
-1	-10
0	-8
1	-6
2	-4

Tabla 5.17

5 Ecuación de la recta

Pensamiento variacional

Saberes previos

Representa gráficamente la recta que tiene pendiente $m = -\frac{2}{5}$ y pasa por el punto (0, 3).

Analiza

La recta de la Figura 5.23 pasa por el punto (1, 3) y tiene como pendiente el valor $-\frac{1}{4}$.

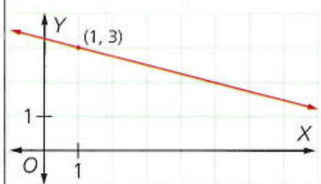


Figura 5.23

- ¿Cuál es la ecuación de la recta?

Conoce

5.1 Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto

A la expresión $(y - y_1) = m(x - x_1)$ se le conoce como **ecuación punto-pendiente**.

Para el caso de la recta que pasa por el punto (1, 3) y tiene pendiente $-\frac{1}{4}$, se reemplazan estos valores en la expresión general de ecuación punto-pendiente y se obtiene:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \longleftarrow \text{Ecuación de la recta}$$

La ecuación de una recta dados la pendiente m y un punto (x_1, y_1) es:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

A esta ecuación se le denomina **ecuación punto-pendiente**.

Ejemplo 1

La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -1)$ y cuya pendiente es -1 es:

$$[y - (-1)] = -1[x - (-2)]$$
$$y + 1 = -x - 2$$
$$y = -x - 2 - 1$$
$$y = -x - 3 \text{ (Figura 5.24)}$$

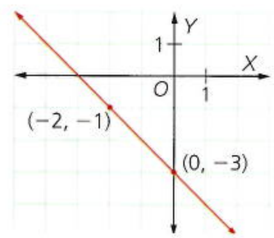


Figura 5.24

5.2 Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Para determinar la ecuación de la recta dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se debe:

1. Calcular la pendiente por medio de la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Usar la pendiente m calculada y uno de los puntos (x_1, y_1) o (x_2, y_2) para reemplazar en la ecuación punto-pendiente $(y - y_1) = m(x - x_1)$.

Ejemplo 2

Observa cómo se halla la ecuación de la recta correspondiente a los valores que se registran en la Tabla 5.18.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	−14	−11	−8	−5	−2	1

Tabla 5.18

Sean $(x_1, y_1) = (-1, -8)$ y $(x_2, y_2) = (2, 1)$, primero se calcula la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-8)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3.$$

Se reemplaza en la **ecuación punto-pendiente** y se obtiene, luego de simplificar: $y = 3x - 5$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Encuentra, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

a. $P(-7, 4)$ y $m = 5$
b. $P(-1, 7)$ y $m = -2$

2 Halla la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos.

a. $(1, -5)$ y $(-2, 1)$
b. $(2, 14)$ y $(-1, -7)$
c. $(-2, -2)$ y $(0, 10)$
d. $(-3, 5)$ y $(-4, -1)$

Razonamiento

3 Indica cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $y = 7x - 33$ y cuáles no. Justifica en cada caso tu respuesta.

a. $(5, -2)$
b. $(5, 2)$
c. $(2, 5)$
d. $(2, -5)$

4 Determina el valor de verdad de cada afirmación.

a. La recta que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(4, 0)$ tiene por ecuación $y = -2x + 8$.

b. La ecuación de la recta que pasa por $(-5, 1)$ y $(-6, 3)$ es $y = 2x + 9$.

c. La recta cuya ecuación es $y = -6$ pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $(-2, 6)$.

d. La ecuación de la recta que pasa por $(-7, 8)$ y por $(-6, 11)$ es $y = 3x + 29$.

e. La ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y $(4, -1)$ es $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Comunicación

5 Calcula la pendiente de cada recta. Luego, encuentra su ecuación considerando los puntos que pertenecen a ella.

a.

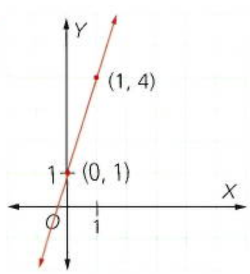


Figura 5.25

b.

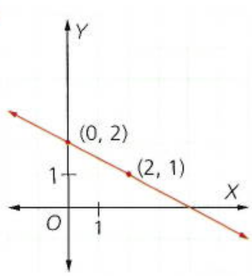


Figura 5.26

Resolución de problemas

6 Analiza la información de la Figura 5.27. Luego, responde la pregunta.

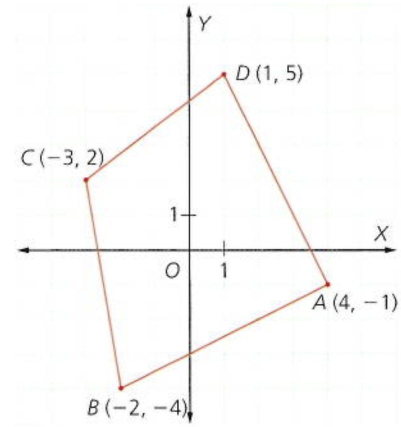


Figura 5.27

¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen los lados del cuadrilátero *ABCD*?

Evaluación del aprendizaje

Una empresa de turismo ha observado que cuando el precio de un viaje es de \$ 15 000 se venden 40 asientos, pero si el precio sube a \$ 18 000 las ventas bajan a 30 asientos.

a. Encuentra la ecuación de la recta que representa la situación y dibuja su gráfica.

b. Realiza la gráfica de la función.

c. Determina el precio del pasaje si la venta sube a 56 asientos.

Educación ambiental

Un estudio revela que una parte de determinado páramo produjo en el primer año de observación 60 000 L de agua y a los cinco años la producción de agua se redujo a 15 000 L.

- Halla la ecuación de la recta que modela esta situación y grafícala. ¿Qué crees que ha pasado con el páramo?

6 Sistemas de ecuaciones lineales

Saberes previos

Plantea una ecuación que modele la siguiente situación y escribe un par de valores que haga cierta la igualdad: "Las edades de Fernanda y Camila suman 30".

Analiza

Para ingresar a una universidad se aplica una prueba de razonamiento que consta de 30 preguntas. Por cada respuesta correcta se asignan cinco puntos, pero por cada respuesta incorrecta (o que no se responda) se restan dos puntos.

- Si un aspirante obtuvo 94 puntos, ¿cuántas preguntas respondió bien?

Conoce

La situación planteada resulta interesante, pues es posible pensar en un método de tanteo para solucionarla. Si el aspirante respondió quince preguntas bien y quince mal, el siguiente sería el esquema para el razonamiento:

$$\underbrace{15 \text{ preguntas} \cdot 5 \text{ puntos}}_{\text{Preguntas correctas}} - \underbrace{15 \text{ preguntas} \cdot 2 \text{ puntos}}_{\text{Preguntas incorrectas}} = 45 \text{ puntos}$$

De esta manera puede razonarse hasta encontrar una solución. Sin embargo, si se analiza el problema desde el punto de vista del álgebra, puede plantearse la "m" como la cantidad de preguntas respondidas correctamente y la "r" como la cantidad de preguntas respondidas de forma incorrecta. Así, el problema puede expresarse como sigue:

$$5m - 2r = 94 \quad \text{y} \quad m + r = 30$$

Si se analizan simultáneamente las expresiones anteriores, teniendo en cuenta que son las condiciones del problema, se concluye que el aspirante respondió bien 22 preguntas.

Plantear y resolver un **sistema de ecuaciones** permite resolver situaciones en las cuales se involucran varias incógnitas que están relacionadas por condiciones específicas.

6.1 Generalidades de los sistemas de ecuaciones lineales

Para indicar un sistema de ecuaciones se utiliza el signo { y se escriben las ecuaciones una debajo de la otra, como se indica a continuación.

$$\begin{cases} 5m - 2r = 94 \\ m + r = 30 \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones puede ser $2 \cdot 2$ si involucra dos ecuaciones y dos incógnitas. Así mismo, puede ser $n \cdot n$ si involucra n ecuaciones y n incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales hace referencia a encontrar los valores de las incógnitas que verifican, simultáneamente, las ecuaciones. Teniendo en cuenta esto, los sistemas pueden clasificarse así:

- **Compatibles.** Aquellos que tienen solución. Estos a su vez pueden ser:
  Compatibles determinados. Aquellos para los cuales hay una única solución.
  Compatibles indeterminados. Aquellos que tienen infinitas soluciones.
- **Incompatibles.** Aquellos que carecen de solución.

Ejemplo 1

El sistema planteado para modelar la situación inicial es compatible determinado, pues para resolverlo solo se determina que $m = 22$ y $r = 8$. De la misma forma, y sin saber ningún método de solución, puede determinarse que el sistema conformado por las ecuaciones $m + n = 3$ y $2m + 2n = 3$ es incompatible, pues no hay valores que verifiquen simultáneamente las dos ecuaciones.

6.2 Resolución de un sistema de ecuaciones

Antes de hablar acerca de cómo solucionar un sistema de ecuaciones, es importante aclarar que solo puede determinarse que la solución de dicho sistema es correcta al evaluar las dos ecuaciones con los valores determinados para las incógnitas. Si las ecuaciones se verifican, la solución es correcta; de lo contrario, no lo es.

Para el problema planteado se encontró que $m = 22$ y $r = 8$. Al verificar los valores del sistema propuesto se tiene que:

$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 22 - 2 \cdot 8 = 94$

$m + r = 30 \Rightarrow 22 + 8 = 30$

Puede determinarse que $m = 15$ y $r = 15$ no es una solución para el sistema, pues para la primera ecuación se tiene que:

$$m + r = 30 \Rightarrow 15 + 15 = 30$$

Mientras que para la segunda ecuación se tiene que:

$$5m - 2r = 94 \Rightarrow 5 \cdot 15 - 2 \cdot 15 = 45$$

Aunque se verifica la ecuación $m + r = 30$, puede observarse que para la ecuación $5m - 2r = 94$ los valores no proporcionan una igualdad; por esta razón no son una solución del sistema planteado.

Existen varios métodos para solucionar un sistema de ecuaciones 2×2.

Tablas de valores

Gráficas de las ecuaciones lineales

Sustitución

Reducción

Igualación

Regla de Cramer

A continuación se presentan algunas particularidades de cada método.

- **Tablas de valores y gráficas:** en estos métodos tiene gran relevancia el análisis de cada una de las ecuaciones, razón por la cual es importante aplicar los conceptos y procedimientos presentados en temas anteriores.
- **Sustitución, reducción e igualación:** estos métodos tienen un componente algebraico importante; para usarlos, se interpreta cada expresión de forma similar a una ecuación, razón por la que se usa la propiedad uniforme de la igualdad y se respeta el orden en el que se despeja una incógnita en la ecuación.
- **Regla de Cramer:** on este método se solucionan sistemas de ecuaciones partiendo del uso de los coeficientes numéricos de cada incógnita. De esta manera, se "obvia" el proceso algebraico para usar un algoritmo aritmético en la solución.

Cada uno de los métodos se explicará con mayor detalle en los siguientes temas de la unidad.

6.3 Resolución de sistemas de ecuaciones por tablas

A continuación se detallan algunos pasos útiles para resolver un sistema de ecuaciones con este método:

1.° Se elige una de las ecuaciones del sistema.

2.° Se despeja una de las incógnitas de la ecuación elegida. En este caso es aconsejable despejar la que resulte más sencilla.

3.° Se asigna un valor a la incógnita independiente. Es importante anotar que aunque este valor es arbitrario, deben tenerse en cuenta las condiciones del sistema y estimar valores que, a criterio propio, podrían ser la solución.

4.° Se realizan las operaciones planteadas en la ecuación para determinar el valor de la incógnita dependiente.

5.° Se reemplaza, en la segunda ecuación, los valores hallados en los pasos anteriores.

6.° Se comprueba si dichos valores verifican la segunda ecuación.

El proceso termina cuando los valores dados para la primera ecuación verifican la segunda ecuación.

Los pasos anteriores se registran en una tabla en la que las dos primeras filas son las incógnitas y la tercera fila es la segunda ecuación.

Ejemplo 2

Para solucionar el sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$, pueden seguirse estos pasos:

1.° La ecuación elegida es $x + y = 3$.

2.° $y = 3 - x$

3.° $x = 3$

4.° Si $x = 3$, entonces $y = 0$

5.° En $-x + y = -1$ se tiene que: $-3 + 0 = -3$

6.° Los valores no verifican la ecuación $-x + y = -1$.

Ahora se repiten estos pasos y se completa una tabla hasta encontrar la solución del sistema. Los valores encontrados se muestran en la Tabla 5.19.

x	3	1	2
y	0	2	1
$-x + y$	-3	1	-1

Tabla 5.19

Los valores $x = 2$ y $y = 1$ verifican la segunda ecuación; de esta manera puede concluirse que son la solución del sistema.

Para algunos sistemas la solución no se encuentra de forma tan sencilla como en el ejemplo anterior.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 3

Resuelve el sistema $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+y=30 \end{cases}$.

x	-1	0	2	5	7	11
y	-4	-3	-1	2	4	8
$2x+y$	-6	-3	3	12	18	30

Tabla 5.20

En la Tabla 5.20 se encuentra que los valores $x = 11$ y $y = 8$ verifican la segunda ecuación; de esta manera puede concluirse que son la solución del sistema de ecuaciones dado.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Relaciona cada sistema de ecuaciones lineales con su respectiva solución.

Sistemas	Soluciones
a. $\begin{cases} 7m+9n=42 \\ 12m+10n=-4 \end{cases}$	$m = 3; n = 4$
b. $\begin{cases} m+6n=27 \\ 7m-3n=9 \end{cases}$	$m = -4; n = -5$
c. $\begin{cases} 3m+5n=7 \\ 2m-n=-4 \end{cases}$	$m = -1; n = 2$
d. $\begin{cases} 3m-2n=-2 \\ 5m+8n=-60 \end{cases}$	$m = -12; n = 14$

2 Explica por qué los valores dados no son una solución del sistema de ecuaciones lineales. Luego, escribe un párrafo en el que justifiques tu modelo de solución.

a. $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 4x-y=5 \end{cases}$

$x = 3; y = 7$

b. $\begin{cases} 7a+4b=13 \\ 5a-2b=19 \end{cases}$

$a = 0; b = \dfrac{13}{4}$

c. $\begin{cases} 5t+6s=20 \\ 4t-3s=-23 \end{cases}$

$t = -1; s = 3$

d. $\begin{cases} 2w+5z=-24 \\ 8w-3z=19 \end{cases}$

$w = 1; z = -\dfrac{2}{3}$

Resolución de problemas

3 La diferencia entre dos números es 5, y si se suman, el total es 29. Encuentra los dos números.

Evaluación del aprendizaje

i Soluciona los siguientes sistemas con tablas a partir de los valores propuestos.

a. $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x-4y=-26 \end{cases}$

x	0	8	1	4	3
y					
$2x-4y$					

Tabla 5.21

b. $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=2 \end{cases}$

x	21	0	3	7	6
y					
$x-y$					

Tabla 5.22

ii Soluciona los sistemas de ecuaciones con tablas.

a. $\begin{cases} a-5b=8 \\ -7a+8b=25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4m-5n=8 \\ 8m-9n=-77 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4z+5w=5 \\ -10w-4z=-7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x+5y=-24 \\ 8x-3y=19 \end{cases}$

7 Resolución de sistemas por el método gráfico

Saberes previos

Representa en un mismo plano cartesiano las funciones $y = 4x - 1$ y $y = -2x + 5$. ¿Tienen algún punto en común?

Analiza

Para llenar un tanque de 31 m^3 se abren dos llaves simultáneamente. Una de ellas se cierra siete horas después de abrirla y la otra, dos horas después. Luego, intenta llenarse un tanque de 27 m^3 con las mismas llaves, pero ahora la primera se cierra a las cuatro horas de abrirla y la segunda, a las tres horas.

- ¿Cuántos litros salen de cada llave en una hora?

Conoce

En la situación presentada puede observarse que los litros que salen de las dos llaves pueden representarse por dos incógnitas, por ejemplo, x y y.

Según las condiciones del problema, la relación entre x y y puede expresarse así:

Para el tanque de 31 m^3: $7x + 2y = 31$

Para el tanque de 27 m^3: $4x + 3y = 27$

Así, para responder la situación debe solucionarse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 31 \\ 4x + 3y = 27 \end{cases}$$

Es posible hallar la **solución del sistema** analizando cada ecuación como una recta y, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersecan en un solo punto. Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema de ecuaciones asociado a la situación inicial, cada una de las ecuaciones generales tiene que transformarse en ecuaciones punto-pendiente.

Las ecuaciones son:

$$y = \frac{31}{2} - \frac{7x}{2} \qquad y = -\frac{4x}{3} + 9$$

Ahora se grafican las ecuaciones, conservando una escala adecuada, y se busca el punto que las dos rectas tienen en común.

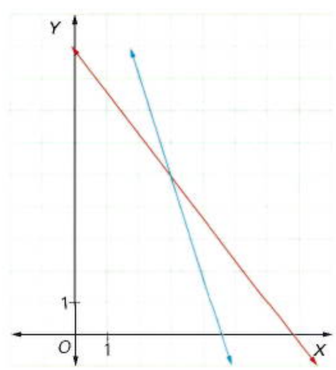


Figura 5.28

En la Figura 5.28 se observa que el punto en el cual se intersecan las dos rectas es (3, 5); es decir, la solución del sistema es $x = 3$; $y = 5$.

Por lo tanto, de la primera llave salen tres litros de agua en una hora y de la segunda salen cinco litros de agua en una hora.

7.1 Análisis de la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones

Gráficamente es posible identificar sistemas de ecuaciones compatibles determinados (las rectas se intersecan en un solo punto), compatibles indeterminados (las rectas coinciden) e incompatibles (las rectas no se intersecan).

A continuación se muestran gráficas de los diferentes tipos de sistemas:

Compatible determinado

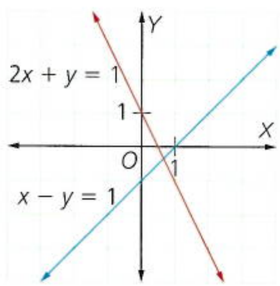


Figura 5.29

Compatible indeterminado

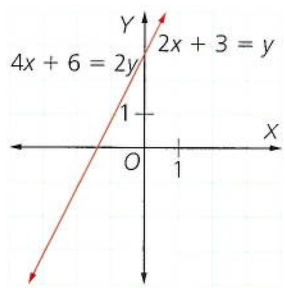


Figura 5.30

Incompatible

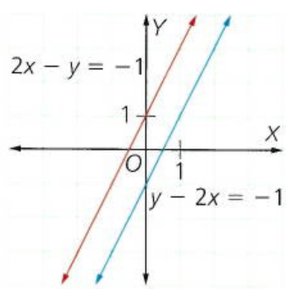


Figura 5.31

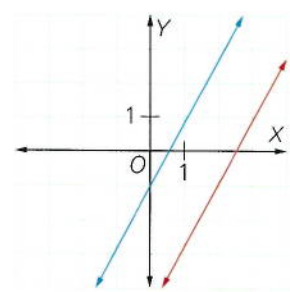


Figura 5.32

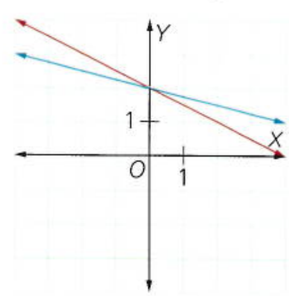


Figura 5.33

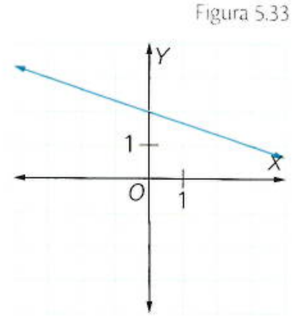


Figura 5.34

Ejemplo 2

Los siguientes sistemas muestran la clasificación de las posibles soluciones de un sistema. Las gráficas correspondientes aparecen en las figuras 5.32 a 5.34, respectivamente.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x - 5 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 15y = 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ 5x + 15y = 30 \end{cases}$$

Incompatible — Compatible determinado — Compatible indeterminado

El primer sistema es incompatible porque las rectas tienen la misma pendiente, es decir, las rectas son paralelas. El segundo sistema es compatible determinado porque las rectas se intersecan en (0, 2).

El tercer sistema es compatible indeterminado porque las ecuaciones que conforman el sistema son equivalentes.

7 Resolución de sistemas por el método gráfico

MatemaTICS

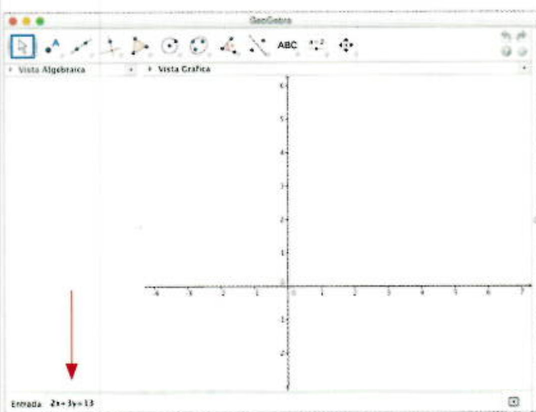
Grafica sistemas de ecuaciones con GeoGebra

A continuación se presenta el procedimiento para graficar el sistema de ecuaciones con este *software.*

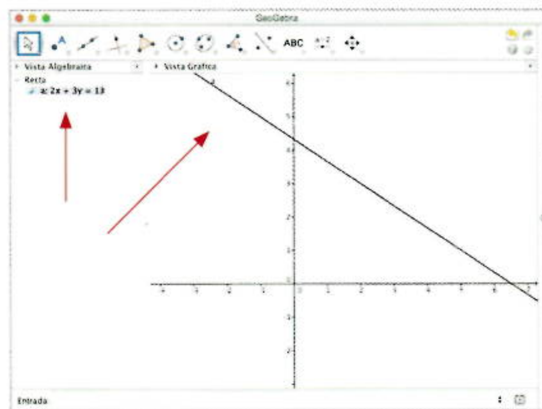
$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

- Primero, en el menú *Apariencias*, selecciona la opción *Álgebra y Gráficos.*

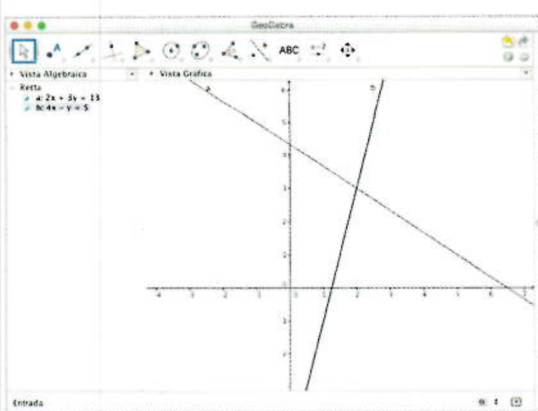
- Luego, en la parte inferior de la ventana encontrarás una barra llamada *Entrada.* En este lugar se digita la ecuación de la función que vas a graficar.



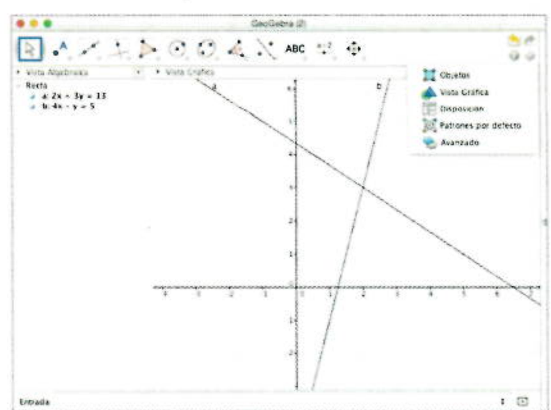
- Al presionar la tecla *Enter,* aparece la gráfica en el plano y la ecuación correspondiente en la ventana al margen izquierdo.



- Repite el procedimiento para la segunda ecuación.



Para determinar las coordenadas del punto de intersección, pon una cuadrícula a la ventana de las gráficas. Para ello, selecciona en la parte superior derecha el menú *Preferencias.* Allí, elige *Vista gráfica,* y luego activa la *Cuadrícula* dando clic en la opción *Mostrar cuadrícula.*



Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Grafica y soluciona cada sistema.

a. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 0{,}1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = -1 + y \\ x + y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Razonamiento

2 Determina la solución de cada sistema de ecuaciones. Verifícala, reemplazándola en las ecuaciones.

a.

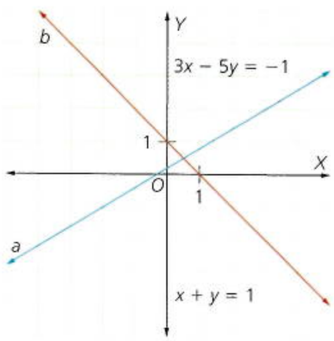


Figura 5.35

b.

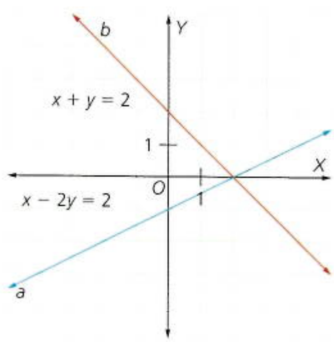


Figura 5.36

c.

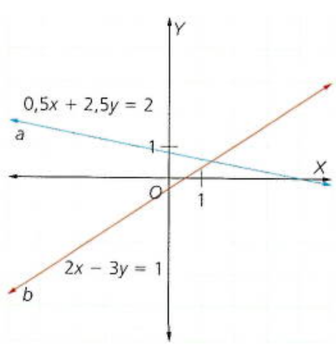


Figura 5.37

Resolución de problemas

3 Plantea un sistema de ecuaciones que tenga la solución dada. Ubica dicho punto en el plano y grafica las rectas que forman el sistema que propusiste.

a. $x = 2 \quad y = 21$ b. $(4{,}5, 2)$ c. $(-2, -0{,}5)$

Evaluación del aprendizaje

i Propón una ecuación que forme un sistema de ecuaciones lineales con $6x - 2y = -3$, de tal forma que sea:

a. Determinado

b. Indeterminado

c. Incompatible

Luego, representa la solución gráfica de cada uno de los sistemas que planteaste. Finalmente, explica las diferencias, tanto en las gráficas como en las ecuaciones, de los tres sistemas.

ii Determina la ecuación de las rectas del sistema dado. Luego, los valores aproximados para su solución.

a.

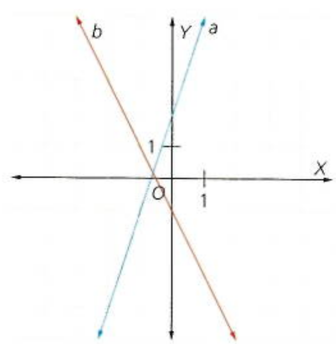


Figura 5.38

b.

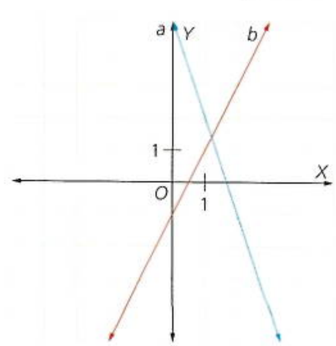


Figura 5.39

8 Resolución de sistemas por el método de sustitución

Saberes previos

Despeja la variable y de la ecuación $3y + 4x - 12 = 0$ y describe el procedimiento que realizas.

Analiza

En una granja hay patos y cerdos. Al contar las cabezas hay 50 y al contar las patas hay 134.

- ¿Cuántos animales hay de cada especie?

Conoce

El sistema de ecuaciones que representa la situación puede resolverse con el **método de sustitución**. Si se tiene en cuenta que los cerdos tienen cuatro patas y los patos, dos, las condiciones pueden representarse así:

m: cantidad de patos n: cantidad de cerdos

Total de cabezas entre todos los animales: $m + n = 50$

Total de patas entre todos los animales: $2m + 4n = 134$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ 2m + 4n = 134 \end{cases}$$

Otra manera de solucionar un sistema de ecuaciones se basa en el principio lógico de la **sustitución**, en el cual se propone escribir una incógnita en términos de la otra para una de las ecuaciones y, después, sustituir esta expresión en la otra ecuación.

Para esta situación, el principio de sustitución se aplica como sigue:

$m = 50 - n$ ← Se despeja m en la primera ecuación del sistema.

$2(50 - n) + 4n = 134$ ← Se sustituye $m = 50 - n$ en la segunda ecuación.

$100 - 2n + 4n = 134$ ← Se aplica la propiedad distributiva del producto.

$100 + 2n = 134$ ← Se despeja n.

$2n = 134 - 100 \Rightarrow n = \dfrac{34}{2} \Rightarrow n = 17$

Por tanto, la cantidad de cerdos es 17. Ahora, para averiguar la cantidad de patos, se reemplaza este valor en la expresión $m = 50 - n$, así:

$$m = 50 - 17 = 33.$$

De esta manera, en la granja hay 17 cerdos y 33 patos.

Ejemplo 1

Para resolver el sistema de ecuaciones se realiza el procedimiento descrito.

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$$

Se elige la primera ecuación y se despeja x.

$$x = -3 - 2y$$

Este valor se sustituye en la segunda ecuación.

$$3(-3 - 2y) + 6y = -9 \Rightarrow -9 - 6y + 6y = -9 \Rightarrow -9 = -9$$

Como esta igualdad siempre es cierta, se deduce que el sistema tiene infinitas soluciones; así que es compatible indeterminado. Gráficamente se interpreta que las dos ecuaciones generan la misma recta, como se observa en la Figura 5.40.

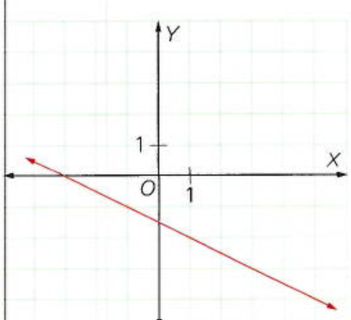


Figura 5.40

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de sustitución.

a. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5m - 2n = 13 \\ m + 3n = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2w + 5z = -24 \\ 8w - 3z = 19 \end{cases}$

2 Resuelve cada sistema de ecuaciones con el método de sustitución.

Luego, reemplaza la letra correspondiente al sistema y completa la frase. Para ello, utiliza solo el valor de la solución en la incógnita y.

a. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + y = 2 \\ 1 - \dfrac{1+x}{2} = y - 1 \end{cases}$ Letra N

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{7} - \dfrac{3y}{4} = 7 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{8} = 0 \end{cases}$ Letra I

c. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x}{3} - 1 = \dfrac{y}{3} \end{cases}$ Letra L

d. $\begin{cases} \dfrac{y}{8} - \dfrac{5x}{6} = 2 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y}{4} = 1 \end{cases}$ Letra A

e. $\begin{cases} 12x + 5y = -6 \\ \dfrac{5x}{3} - \dfrac{7y}{6} = -12 \end{cases}$ Letra S

Para solucionar problemas de matemáticas es necesario desarrollar la capacidad de

___	___	___	___	___	___	___	___
-4	3	-4	12	-8	6	-8	6

Resolución de problemas

3 Analiza el sistema y determina el valor que debe tomar a para que el sistema cumpla cada condición dada.

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - ay = 4 \end{cases}$ Compatible determinado / Incompatible

Evaluación del aprendizaje

Identifica las ecuaciones de las rectas para cada sistema y determina, con el método de sustitución, los valores exactos de la solución.

a.

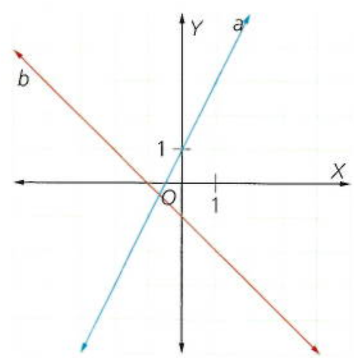


Figura 5.41

b.

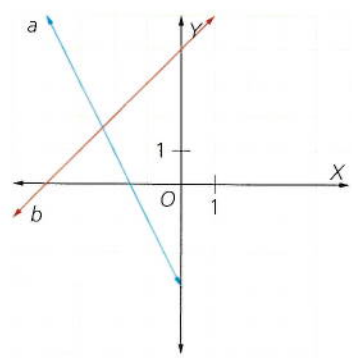


Figura 5.42

c.

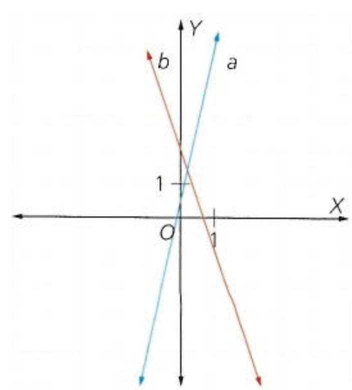


Figura 5.43

9 Resolución de sistemas por el método de reducción

Saberes previos

¿Por cuál número entero debes multiplicar todos los términos de la ecuación $3x + 2y = 5$, para que al sumarlos con los términos de la ecuación $6x + y = 8$, se obtenga $-3y = -2$?

Analiza

Un ama de casa va al supermercado y compra 6 kg de café y 3 kg de azúcar por \$ 15 300. Días después nota que no fue suficiente, así que vuelve al supermercado a comprar 1 kg de café y 10 kg de azúcar por \$ 8 250.

- ¿Cuánto cuesta 1 kg de cada producto?

Analiza y conoce

Como se ha estudiado en temas anteriores, algunas situaciones en las que se observa una relación entre dos datos pueden resolverse al plantear y resolver un sistema de ecuaciones.

En este caso, las iniciales de cada producto serán las incógnitas al momento de plantear el sistema correspondiente a la situación.

Sean C: un kilogramo de café y A: un kilogramo de azúcar.

Según los datos del problema, se tienen las ecuaciones: $6C + 3A = 15\,300$ y $C + 10A = 8\,250$. Así, puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15\,300 \\ C + 10A = 8\,250 \end{cases}$$

Al solucionar un sistema de ecuaciones por el **método de reducción,** se elimina una de las incógnitas en el sistema de ecuaciones para resolver inicialmente una ecuación de primer grado. Con esta solución, se despeja el valor faltante en una de las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Para solucionar el sistema de la situación inicial por el método de reducción, pueden seguirse los pasos que se describen a continuación.

1.° Se determina la incógnita que va a eliminarse; en este caso será C.

2.° Se multiplica convenientemente, incluso por un número negativo, una o las dos ecuaciones para poder **reducirlas**. Para el caso, se multiplica la segunda ecuación por -6, con lo cual el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 6C + 3A = 15\,300 \\ -6C - 60A = -49\,500 \end{cases}$$

3.° Se reducen las ecuaciones sumando entre sí los términos semejantes y los valores numéricos de esta manera:

$$\begin{array}{rcr} 6C + 3A & = & 15\,300 \\ -6C - 60A & = & -49\,500 \\ \hline 0C - 57A & = & -34\,200 \end{array}$$

En este caso, la incógnita C se eliminó de la expresión y el resultado de la reducción es una ecuación con una sola incógnita, que es A.

4.° Se soluciona la ecuación así: $-57A = -34\,200$, y se obtiene que $A = 600$.

5.° Se reemplaza el valor $A = 600$ en una de las ecuaciones:

$$C + 10A = 8\,250 \Rightarrow C = 8\,250 - 6\,000 \Rightarrow C = 2\,250.$$

Por lo tanto, un kilogramo de azúcar cuesta \$ 600 y un kilogramo de café cuesta \$ 2 250.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Grafica, en el plano cartesiano, las ecuaciones de cada sistema. Luego, determina su solución.

a. $\begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 5x + 6y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$
d. $\begin{cases} 5x + 7y = 50 \\ 9x + 14y = 97 \end{cases}$

Razonamiento

2 Resuelve cada sistema por reducción y busca su solución gráfica abajo (si no está entre las opciones, dibújala en tu cuaderno).

a. $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 6x + 7y = 3 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 3x + 3y = 10 \\ 3x - 7y = 20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 8x - 15y = -30 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$
d. $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x + 6y = -9 \end{cases}$

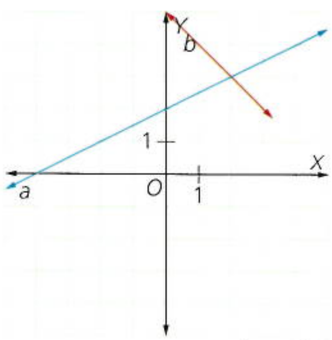


Figura 5.44

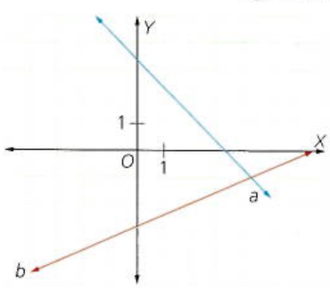


Figura 5.45

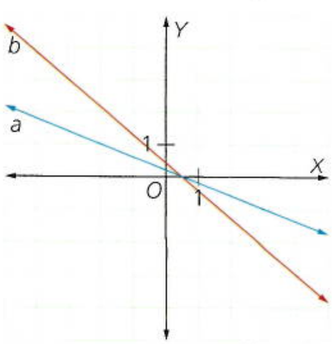


Figura 5.46

Resolución de problemas

3 Observa el siguiente sistema de ecuaciones y luego responde la pregunta.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de a_2 y b_2 tiene el sistema infinitas soluciones?

Evaluación del aprendizaje

Escribe la segunda ecuación en los literales a, b y c, y dibuja una recta en d. y e. de tal forma que cada sistema sea del tipo que se indica.

a. $\begin{cases} 7x - 3y = 27 \\ \end{cases}$ Compatible determinado

b. $\begin{cases} 5x + 6y = 27 \\ \end{cases}$ Compatible indeterminado

c. $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ \end{cases}$ Incompatible

d.

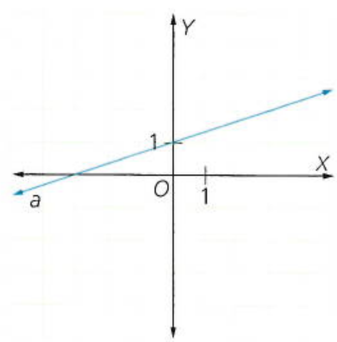


Figura 5.47

Incompatible

e.

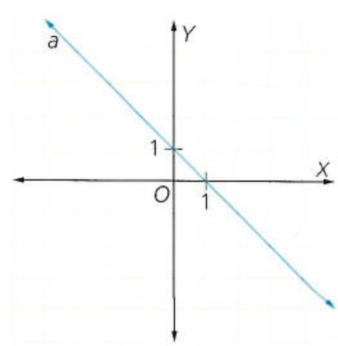


Figura 5.48

Compatible indeterminado

10 Resolución de sistemas por el método de igualación

Saberes previos

Da diez valores a las variables m y n y verifica si en todos los casos se cumple la igualdad

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n).$$

Analiza

La suma de dos números es 51. Si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 6, la diferencia de las fracciones obtenidas es 1.

- ¿Qué par de números verifican estas condiciones?

Analiza y conoce

Para plantear el sistema de ecuaciones de la situación propuesta se consideran las siguientes incógnitas:

x: primer número y: segundo número

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que describe la situación

El **método de igualación** para solucionar sistemas de ecuaciones consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y luego, aplicar la transitividad de las igualdades, con el fin de igualarlas y despejar la otra incógnita.

Ejemplo 1

El sistema presentado en la situación inicial se soluciona como se muestra a continuación.

1.° Se despeja y en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = -x + 51 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

2.° Se igualan los valores de y.

$$-x + 51 = 2x - 6$$

3.° Se despeja x.

$$-x - 2x = -6 - 51$$
$$-3x = -57$$
$$x = 19$$

4.° Se calcula el valor de y.

$$y = -x + 51, \text{ de donde } y = 32$$

Así, los dos números que solucionan el reto son 19 y 32.

Ejemplo 2

Para resolver el sistema $\begin{cases} 7m - 3n = 15 \\ 5m + 6n = 27 \end{cases}$ se puede elegir m para despejar en las dos ecuaciones.

$$7m = 15 + 3n \Rightarrow m = \frac{15 + 3n}{7} \text{ y } 5m = 27 - 6n, \Rightarrow m = \frac{27 - 6n}{5}$$

Se igualan las expresiones y se despeja n: $\dfrac{15 + 3n}{7} = \dfrac{27 - 6n}{5} \Rightarrow n = 2$

Se reemplaza el valor de n en una de las dos ecuaciones despejadas para así hallar el valor de m: $m = \dfrac{15 + 3n}{7}$. Como, $n = 2$, se tiene que $m = \dfrac{15 + 3(2)}{7}$ por tanto, $m = 3$. La solución gráfica se muestra en la Figura 5.49.

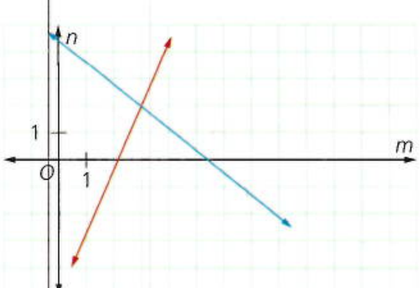


Figura 5.49

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones con el método de igualación.

a. $\begin{cases} 3x = -4y \\ 5x - 6y = 38 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} w - 2z = 10 \\ 2w + 3z = -8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3s + 4t = 15 \\ 2s + t = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = -\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

f. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 6 \\ 3x - 4y = 4 \end{cases}$

Razonamiento

2 Descubre el error en el proceso y justifica por qué los valores dados no son la solución de cada sistema planteado.

a. $\begin{cases} 7m + 4n = 13 \\ 5m - 2n = 19 \end{cases}$

$4n = 13 - 7m \qquad 5m - 2n = 19$

$n = \dfrac{13 - 7m}{4} \qquad n = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$\dfrac{13 - 7m}{4} = \dfrac{19 + 5m}{2}$

$m = -\dfrac{50}{34} = -\dfrac{25}{17}$

Reemplazando para n, se tiene que:

$$n = \frac{13 - 7\left(-\frac{25}{17}\right)}{4} = \frac{99}{17}$$

De este modo, $m = -\dfrac{25}{17}$ y $n = \dfrac{99}{17}$.

b. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$x = 10 - 2y \qquad x = \dfrac{5 - 4y}{2}$

$10 - 2y = \dfrac{5 - 4y}{2} \qquad 20 - 2y = 5 - 4y$

$-2y + 4y = 5 - 20 \qquad y = -\dfrac{15}{2}$

Remplazando para x, se tiene que:

$$x = \frac{5 - 4\left(-\frac{15}{2}\right)}{2} = \frac{35}{2}$$

3 Plantea dos sistemas de ecuaciones incompatibles, dos compatibles indeterminados y dos compatibles determinados. Ten en cuenta las siguientes ecuaciones.

$2x - y = 1$ | $x + y = 5$ | $x - y = 12$ | $x + y = 100$ | $-2y + 5x = 10$ | $2y - x = -3$ | $2x - y = -3$ | $2x + 10y = 40$ | $3x - 30y = 15$ | $3x + 3y = 15$ | $-8y + 20x = 40$ | $2y - x = 1$

4 Reúnete con cuatro compañeros y entre todos solucionen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 20 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$$

Cada uno elegirá uno de los métodos estudiados. Al terminar, comparen sus soluciones y evalúen cuál es el método más efectivo para resolver este sistema.

Resolución de problemas

5 Halla dos números tales que si se divide el primero entre 3 y el segundo entre 4, la suma sea 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5, la suma sea 174.

Evaluación del aprendizaje

i Un número está formado por dos cifras cuya suma es 15. Si a la cuarta parte del número se le suma 45, el resultado es el número con las cifras invertidas. ¿Cuál es el número?

ii Un número consta de dos cifras cuya suma es 9. Si se invierte el orden de las cifras el número obtenido es igual al dado más nueve unidades. Halla dicho número.

11 Resolución de sistemas por la regla de Cramer

Saberes previos

En el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -3y = 5x - 1 \end{cases}$, ¿cuáles son los coeficientes, los términos independientes y las variables?

Analiza

En una finca se envasan 300 L de leche al día. Para ello, se usan botellas de 2 L y botellas de 5 L, y en total se usan 120 botellas.

- ¿Cuántas botellas de cada capacidad se usan?

Analiza y conoce

Si se considera que:

x: botellas de 2 L $\quad$ y: botellas de 5 L

La información inicial se representa así:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 2x + 5y = 300 \end{cases}$$

El método para solucionar este sistema se basa en el concepto de **matriz**.

Una **matriz** es la disposición de números que se asocia con un sistema de ecuaciones. Los números de dicha matriz son los coeficientes numéricos de las incógnitas. Se llama **matriz ampliada** a la disposición que, además de incluir los coeficientes numéricos, incluye las constantes del sistema.

Es posible asignar a una matriz un número real llamado *determinante de la matriz*. Para un sistema de ecuaciones $2 \cdot 2$, en el cual los coeficientes son a_1 y b_1 en la primera ecuación, a_2 y b_2 en la segunda ecuación, y las constantes son c_1 y c_2 respectivamente, se tiene que:

Sistema	Matriz	Matriz ampliada
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz es el número que resulta de $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

La **regla de Cramer** es una fórmula basada en los determinantes que pueden plantearse en un sistema de ecuaciones, así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1

Aplicando la regla de Cramer a la situación inicial, se tiene que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 1 \\ 300 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{600 - 300}{5 - 2} = 100 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 2 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{300 - 240}{5 - 2} = 20$$

Luego, se usan 100 botellas de 2 litros y 20 botellas de 5 litros.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula los siguientes determinantes.

a. $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} c^2 & a \\ c^2 - a & a \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} x+2 & x+7 \\ x+7 & x+2 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ m & m^2 \end{vmatrix}$

2 Determina el valor de la variable en cada caso.

a. $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 15$

b. $\begin{vmatrix} m & 1 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = 100$

c. $\begin{vmatrix} x & -8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 16$

d. $\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 5 & x-1 \end{vmatrix} = 25$

Razonamiento

3 Resuelve cada uno de los siguientes sistemas por el método de Cramer y explica la representación gráfica de cada solución.

a. $\begin{cases} 9x - y = 16 \\ x + y = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 3y + 7x = -13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 7x + 3y = -26 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 5y = -12 \\ 7x - 5y = 22 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 6x - 5y = -43 \\ x - 5y = -28 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2(x - y) = 5 \\ 4(1 - y) = 3x \end{cases}$

4 Intenta resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer y explica lo que ocurre.

a. $\begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 10x - 14y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 4x + 8y = 10 \end{cases}$

Escribe una conclusión acerca de lo que acabas de observar.

Resolución de problemas

5 Una evaluación consta de 16 preguntas. El maestro suma diez puntos por cada respuesta correcta y resta seis puntos por cada pregunta no contestada o mal contestada. Si Mario obtuvo 64 puntos en la evaluación, ¿cuántas preguntas contestó correctamente?

6 El administrador de una fábrica de computadores establece un plan de producción para dos modelos, *A* y *B*, y cuenta con dos divisiones.

Una división es el taller de máquinas donde se fabrican las partes del producto y la otra es la división de ensamble donde se unen las partes para obtener el producto final. El modelo *A* requiere cuatro horas para elaborar las piezas y cinco horas para ensamblarlas, y el modelo *B* requiere tres horas para elaborar las piezas y una para ensamblarlas.

Si la fábrica dispone de 95 horas mensuales para elaborar las piezas y 105 horas mensuales para ensamblarlas, ¿cuántos computadores tipo *A* y tipo *B* se pueden construir mensualmente en esta fábrica?

7 Dos jarras pequeñas y una jarra grande pueden contener ocho vasos de agua. Una jarra grande menos una jarra pequeña constituye dos vasos de agua. ¿Cuántos vasos de agua caben en cada jarra?

Evaluación del aprendizaje

i Una prueba tiene veinte preguntas por valor de 100 puntos. La prueba consiste en preguntas de verdadero y falso por valor de tres puntos cada una, y preguntas de selección múltiple por valor de once puntos cada una. ¿Cuántas preguntas de selección múltiple se encuentran en la prueba?

ii A lo largo del año 2015 se produjeron 11 600 accidentes de tráfico, de los cuales 5 600 se debieron a exceso de velocidad. Averigua el número de autos y de motos accidentados, si el 40% de los accidentes de autos y el 60% de los de motos se produjeron por no ir a la velocidad reglamentaria.

12 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Pensamiento variacional

Saberes previos

Plantea una situación que se pueda representar con el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 5000x + 10000y = 12000 \\ 13000x - 2300y = 5000 \end{cases}$ y resuélvelo.

Analiza

Hace cuatro años la edad de Cristina era el doble de la de Juliana. Dentro de ocho años la edad de Juliana será $\frac{5}{8}$ de la de Cristina.

- ¿Qué edad tienen actualmente Cristina y Juliana?

Analiza y conoce

Según los datos del problema, si x es la edad actual de Cristina y y es la edad actual de Juliana, se tiene que:

$x - 4$: edad de Cristina hace 4 años

$y - 4$: edad de Juliana hace 4 años

$$x - 4 = 2(y - 4)$$

Además:

$x + 8$: edad de Cristina dentro de 8 años

$y + 8$: edad de Juliana dentro de 8 años

$$\frac{5}{8}(x + 8) = (y + 8)$$

Las condiciones planteadas en el problema forman el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - 4 = 2(y - 4) \\ \frac{5}{8}(x + 8) = (y + 8) \end{cases}$$

Por el método de sustitución, se tiene que:

$$x = 2(y - 4) + 4 \qquad x = 2y - 8 + 4 \qquad x = 2y - 4$$

Ahora, se reemplaza x en la segunda ecuación y se tiene que:

$$\frac{5}{8}(2y - 4 + 8) = y + 8$$

$$10y + 20 = 8y + 64$$

$$10y - 8y = 64 - 20 \quad \Rightarrow \quad 2y = 44$$

De esta manera, $y = 22$ y $x = 2y - 4$. Por lo tanto, $x = 40$.

En conclusión, Cristina tiene 40 años y Juliana tiene 22 años.

Al finalizar la solución, es importante verificar que la respuesta hallada cumple las condiciones y el contexto del problema. Para ello, se reemplazan los valores en el sistema de ecuaciones, así:

$$\begin{cases} 40 - 4 = 2(22 - 4) \\ \frac{5}{8}(40 + 8) = 22 + 8 \end{cases}$$

Plantear y solucionar un problema en el que se involucran sistemas de ecuaciones se basa en escribir en forma algebraica, con incógnitas, las diferentes condiciones del problema. Luego, el sistema generado se resuelve con alguno de los métodos estudiados anteriormente y se determina la respuesta al problema.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Un automóvil que avanza a 70 km/h lleva una ventaja de 90 km a otro auto que avanza por una vía paralela a 110 km/h. ¿Alcanza el segundo auto al primero? Explica las razones.

2 El perímetro de un triángulo isósceles mide 20 cm. El lado desigual mide 4 cm menos que los lados iguales. Calcula el área de ese triángulo.

Razonamiento

3 En una granja hay conejos y gansos que hacen un total de 29 cabezas y 92 patas. ¿Hay más gansos que conejos? Explica tu razonamiento.

4 Analiza si el siguiente problema tiene solución. La suma de dos números es 14. Si se añade 1 al mayor se obtiene el doble del menor.

5 Las edades actuales de una mujer y su hijo son 49 años y 25 años. ¿En algún momento el producto de sus edades era 640?

Modelación

6 María y Bianca forman pareja para realizar el trabajo en grupo que encargó la profesora de Biología sobre los efectos de las drogas en el organismo.

Si hicieran el trabajo conjuntamente, tardarían dos horas. María, ella sola, emplearía tres veces más tiempo que Bianca, también en solitario. ¿Cuánto tiempo tardaría cada una de ellas por separado en hacer el trabajo?

Resolución de problemas

7 La suma de las tres cifras de un número capicúa es 8. La suma de la cifra de las unidades y la de las centenas es igual a la de las decenas. Calcula el número.

8 La suma de las edades de un padre y su hija es 56 años. Hace 10 años, la edad del padre era el quíntuple de la edad que tenía la hija. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

9 Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 cm y a su lado contiguo en 3 cm, el área de la figura aumenta en 71 cm^2. Calcula el lado del cuadrado.

10 En un cajón de una papelería guardan dos tipos de bolígrafos: hay cajas con doce bolígrafos azules y cajas con 16 bolígrafos rojos. En total hay diez cajas y 144 bolígrafos. ¿Cuántas cajas hay de cada clase? Plantea las ecuaciones del sistema y resuélvelo por tablas y por otro método.

11 Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por $ 500 el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de $ 800, para conseguir 50 kg de pasta de $ 620 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

Evaluación del aprendizaje

i Por una sudadera y unos tenis se pagaron en total $ 126 000. Si el precio de la sudadera aumentara en un 14%, entonces sería igual al 75% del precio de los tenis. ¿Cuánto costó cada artículo?

ii Con la ayuda de los estudiantes de varios colegios se están rehabilitando las casas de un pueblo abandonado.

Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1 000 m^3 que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 15 m.

Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

Estilos de vida saludable

De una encuesta aplicada a 36 000 jóvenes, se obtuvo que algunos han probado bebidas alcohólicas (x) y otros, sustancias psicoactivas (y). Si se sabe que $20\%x = 10\%y$, ¿cuántos jóvenes han probado cada sustancia?

- Describe los diversos problemas que trae el consumo de alcohol y drogas.

13 Sistemas de inecuaciones de primer grado

Saberes previos

¿Qué diferencias encuentras entre una igualdad y una desigualdad? ¿Qué signos matemáticos se utilizan en cada una?

Analiza

Si al doble de la edad de Camilo se le restan 17 años, resulta ser menos de 35; pero si a la mitad de la edad de Camilo se le suman 3 años, el resultado es mayor que 15.

- ¿Cuántos años tiene Camilo?

Analiza y conoce

En algunas expresiones cotidianas es necesario conocer valores que no necesariamente son iguales a algo. Por ejemplo, cuando vas de compras y debes conseguir un pantalón que valga menos de $ 100 000 o cuando se dice "el peso de un objeto está entre 105 y 107 libras", este estilo de expresiones pueden escribirse con **inecuaciones**.

Para averiguar la edad de Camilo puede hacerse el siguiente razonamiento:

Sea x la edad de Camilo y $2x$ el doble de su edad.

De esta manera, la expresión "al doble de la edad de Camilo se le restan 17 años, resulta ser menos de 35" puede representarse así:

$$2x - 17 < 35 \Rightarrow 2x < 35 + 17 \Rightarrow 2x < 52 \Rightarrow x < 26$$

Por su parte, la expresión "si a la mitad de la edad de Camilo se le suman 3 años, el resultado es mayor que 15" puede representarse así:

$$\frac{x}{2} + 3 > 15 \Rightarrow \frac{x}{2} > 15 - 3 \Rightarrow \frac{x}{2} > 12 \Rightarrow x > 12 \cdot 2 \Rightarrow x > 24$$

Si la edad de Camilo es mayor que 24 y menor que 26, entonces puede deducirse que Camilo tiene 25 años.

Una **inecuación** es una expresión en la cual hay elementos desconocidos que están relacionados con los signos $<$, $>$, $\leqslant$ o $\geqslant$.

Para **resolver una inecuación** se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

- Si $a < b$ y c es un número real, entonces $a \pm c < b \pm c$.
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

De forma similar se verifican las propiedades cuando $a > b$.

- Si $a > b$ y c es un número real, entonces $a \pm c > b \pm c$.
- Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

13.1 Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Expresiones como

$$ax + b < c \qquad ax + b > c \qquad ax + b \leqslant c \qquad ax + b \geqslant c$$

son **inecuaciones de primer grado con una incógnita**, y para resolverlas se utilizan las propiedades mencionadas. El problema de determinar la edad de Camilo se solucionó a partir del planteamiento y la solución de dos inecuaciones de este estilo.

Es importante tener cuidado al aplicar las propiedades, sobre todo cuando se multiplica o se divide entre un número negativo.

Ejemplo 1

La representación gráfica de la solución de la inecuación $-4x - 5 > 15$, en donde $x < -5$, se muestra en la Figura 5.50.

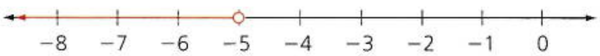


Figura 5.50

13.2 Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una **inecuación de primer grado con dos incógnitas** es una expresión algebraica que puede expresarse de alguna de las siguientes formas:

$$ax + by < c \qquad ax + by > c \qquad ax + by \leqslant c \qquad ax + by \geqslant c$$

Es importante tener en cuenta que estas expresiones son similares a las que se describen en una línea recta y que, de hecho, tienen una estrecha relación con ellas. Esto se explica a continuación.

Antes se dedujo que $y = mx + b$ describe una línea recta y en el método gráfico se pudo observar que expresiones de la forma:

$$ax + by = c$$

pueden llevarse a la forma:

$$y = mx + b$$

De manera similar, expresiones de la forma $ax + by < c$ (o cualquiera de las planteadas como inecuación de primer grado con dos incógnitas) pueden llevarse a una forma en la cual la recta $ax + by = c$ define dos semiplanos: uno que describe la región $ax + by < c$ y otro que describe la región $ax + by > c$.

Ejemplo 2

Observa cómo representar gráficamente la inecuación $-9x + 3y < -6$.

1. Se escribe la inecuación de tal manera que la y quede despejada.

$$3y < 9x - 6 \Rightarrow y < 3x - 2$$

2. Se grafica la recta $y = 3x - 2$.

3. Se determina, a partir de la recta, la región para la cual los valores de y son menores que los valores de $3x - 2$.

4. Se colorea dicha región. En la Figura 5.51 se puede observar la solución de la inecuación $y < 3x - 2$. La recta de color azul es $y = 3x - 2$.

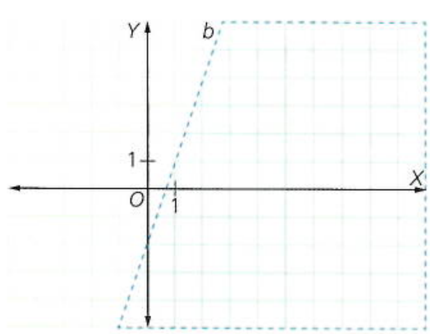


Figura 5.51

De forma similar puede representarse la solución de $y > 3x - 2$.

13.3 Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Este tipo de sistemas son de la forma $\begin{cases} a_1x + b_1y < c_1 \\ a_2x + b_2y < c_2 \end{cases}$.

El signo $<$ puede cambiar y ser $>$, $\geqslant$ o $\leqslant$.

La solución de un sistema de inecuaciones será una región del plano cartesiano en la cual se verifiquen, simultáneamente, cada una de las inecuaciones de dicho sistema.

La mejor manera de solucionar estos sistemas es aplicando el método gráfico para cada una de las inecuaciones.

Ejemplo 3

Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x + y > 4 \\ x - 2y < 8 \end{cases}$.

Para la inecuación $2x + y > 4$ se tiene que $y > -2x + 4$, así que se grafica la recta $y = -2x + 4$.

Para la inecuación $x - 2y < 8$ se tiene que $y > \frac{x}{2} - 4$, así que se grafica la recta $y = \frac{x}{2} - 4$ (Figura 5.52).

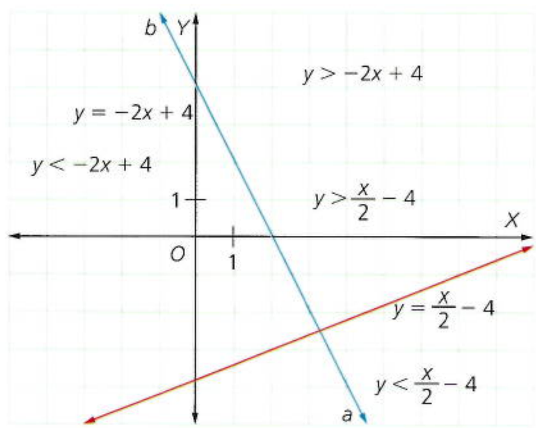


Figura 5.52

Como puede verse en el plano de la Figura 5.53, se generan cuatro regiones que están delimitadas, precisamente, por las rectas. Así, la solución del sistema será la región para la cual $y > -2x + 4$ y $y > \frac{x}{2} - 4$, simultáneamente.

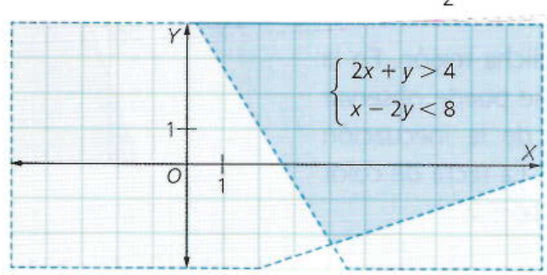


Figura 5.53

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución gráficamente.

a. $-2x - 3 > 5$

b. $-5x + 4 < 3$

c. $6x - (4 + 3x) < 2x + 4$

d. $\dfrac{-6x + 7}{-3} > \dfrac{8x - 4}{2}$

Razonamiento

2 Relaciona la inecuación con la gráfica correspondiente a su solución.

a. $3x - 2y > 1$ b. $-x + y < -4$

c. $3x - 4y < -2$ d. $x + 3y > 2$

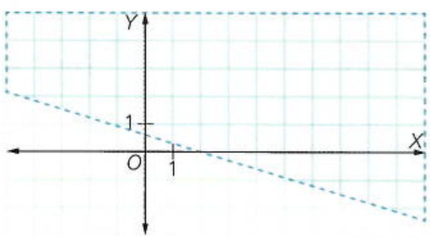


Figura 5.54

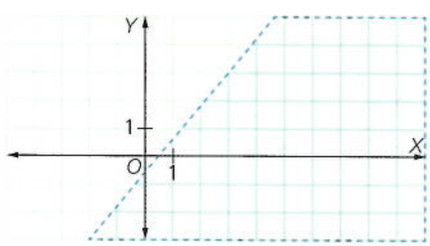


Figura 5.55

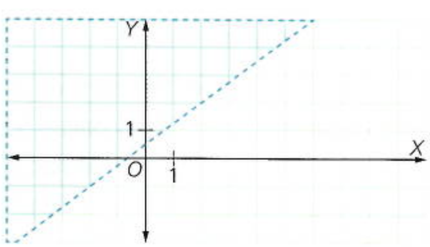


Figura 5.56

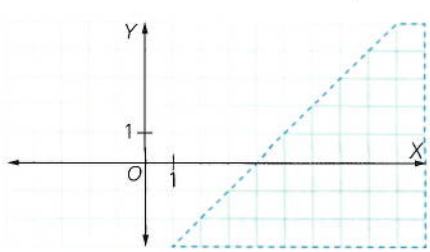


Figura 5.57

3 La solución de la siguiente inecuación es incorrecta. Explica por qué y escribe frente a cada paso del proceso lo que se hizo y cuál fue el error.

$\dfrac{3}{x} < 2$

$3 < 2x$

$\dfrac{3}{2x} < x$

Resolución de problemas

4 Plantea una inecuación que describa la situación. Luego, resuélvela y verifica la respuesta.

Una furgoneta pesa 875 kg. La diferencia entre su peso cuando está vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior a 415 kg. Si deben cargarse cuatro cajones iguales, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de ellos para poder ser transportado en la furgoneta?

Evaluación del aprendizaje

i Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a. $\begin{cases} x - y < 2 \\ 2x > 6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2(x - 1) - y < 2 \\ y > 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y < 2 \\ x + y > 2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 3x - 5y > 1 \\ 5x - 3y < 1 \end{cases}$

ii Define un sistema de inecuaciones cuya solución, limitada por el eje X, sea la región resaltada en la siguiente gráfica.

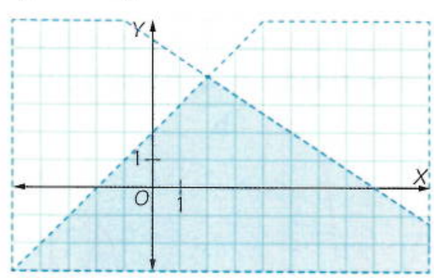


Figura 5.58

Escribe los pasos que seguiste para determinar dicho sistema y explica si es el único que puede cumplir las condiciones pedidas.

Concepto de función

Comunicación

1 Observa la gráfica de la función representada en la Figura 5.59. Luego, realiza lo que se propone en cada caso.

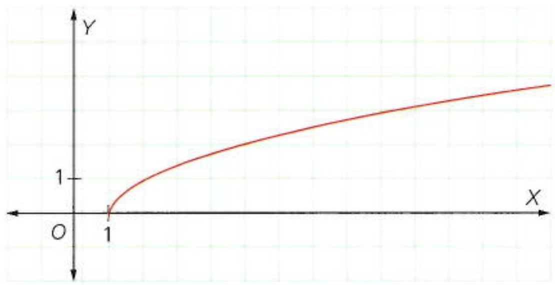


Figura 5.59

a. Elabora una tabla de valores.

b. Identifica el dominio y el rango de la función.

c. Identifica los valores para los cuales $f(x) = 1$, $f(x) = 2$ y $f(x) = 2{,}5$.

2 La altura de un proyectil, en metros, está determinada por la función $h(t) = 10t - t^2$, para un tiempo determinado de t segundos.

a. Identifica las variables dependiente e independiente.

b. Completa una tabla de valores y traza la gráfica de la función.

c. Identifica el dominio y el rango de la función.

d. ¿Cuál es la altura que alcanza el proyectil a los siete segundos?

Funciones crecientes y funciones decrecientes

Comunicación

3 Identifica los intervalos donde crecen y decrecen las funciones representadas en las figuras 5.60 y 5.61.

a.

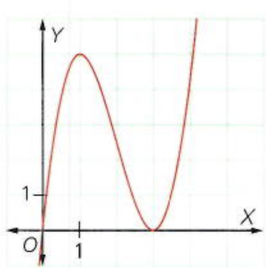


Figura 5.60

b.

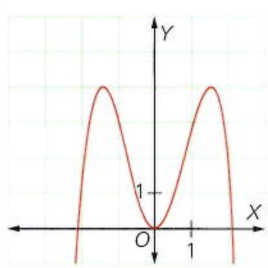


Figura 5.61

Funciones lineal y afín

4 Encuentra una función que cumpla con las condiciones dadas para cada caso.

a. Función afín con constante de proporcionalidad negativa.

b. Función lineal con constante de proporcionalidad igual a 3.

c. Función afín con constante de proporcionalidad -5, que pasa por el punto $(0, 2)$.

d. Función afín con constante de proporcionalidad $\frac{1}{2}$, que corta el eje Y en el punto $(0, 3)$.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Ejercitación

5 Halla la solución de los sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ 8x - 4y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 13 \\ 2x + 2y = 26 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -5x - 7y = -5 \\ 2x + y = -45 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -x - y = 9 \\ x + 2y = -19 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x - 8y = -14 \\ 2x - 4y = -7 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x - y = 13 \\ x + y = 17 \end{cases}$

g. $\begin{cases} x = -2 \\ 2x - 3y = -45 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 8y = 7 \end{cases}$

Resolución de problemas

6 Determina los sistemas de ecuaciones para cada situación y halla su solución.

a. A un concierto asisten 150 personas entre hombres y mujeres. Los hombres pagan \$ 56 000 y las mujeres la mitad. La taquilla recolecta \$ 5 880 000. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron al concierto?

b. Dos números suman 90. Si se divide el mayor entre el menor, el residuo es 6 y el cociente es 3 ¿cuáles son los dos números?

c. En una tienda se pagaron \$ 84 100 por camisetas y pantalonetas. Se sabe que dos camisetas y tres pantalones cuestan \$ 35 000. ¿Cuál es el precio de cada camiseta y de cada pantalón?

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: **Seguir un método**

Problema

El contador de una fábrica estima que la función que determina el costo de producción de x artículos, en dólares, es:

$$2y - 600x = 240$$

¿A cuánto equivalen los costos fijos de producción?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información te da el enunciado?

R: La ecuación de una función que corresponde a los costos de producción de x artículos.

- ¿Qué debes hallar?

R: Los costos fijos de producción.

2. Crea un plan

- Lleva la función a la forma $y = mx + b$ y calcula el costo cuando no se ha producido ningún artículo.

3. Ejecuta el plan

- De la ecuación correspondiente, deduce cuál valor toma m y cuál valor toma b.

$$2y - 600x = 240$$

$$2y = 600x + 240$$

$$y = \frac{600x + 240}{2}$$

$$y = 300x + 120$$

$$m = 300 \text{ y } b = 120$$

- Cuando no se han producido artículos, x vale cero.

$$y = 120$$

R: Los costos fijos de producción equivalen a 120 dólares.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que el costo de producir 25 artículos equivale a 7620 dólares.

Aplica la estrategia

1. La expresión $3y - 450x = 660$ corresponde a la función que determina el número de metros cúbicos de agua en un tanque en época de lluvia. Si x representa el número de días, ¿qué cantidad de agua habrá en el tanque luego de diez días de lluvia?

   a. Comprende el problema

   ....

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

   ....

Resuelve otros problemas

2. La función $f(x) = 200x + 150$, con x como días, señala la cantidad de peces en un cultivo de truchas. Cuando se observa el cultivo en un lapso de tiempo de 8 a 15 días, ¿cómo cambia el número de peces?

Formula problemas

3. Inventa un problema que incluya la información de la Figura 5.62.

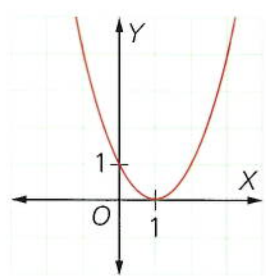


Figura 5.62

Enriquece tu vocabulario

- ¿Cuál de estas palabras no tiene relación con las demás? Explica por qué.

  Igualación - Gráfico - Reducción
  Sistema de ecuaciones

Evaluación del aprendizaje

Concepto de función. Funciones crecientes y decrecientes

Comunicación

1 Observa las gráficas de las funciones g y f de las figuras 5.63 y 5.64, y describe los intervalos en las que crecen y decrecen. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

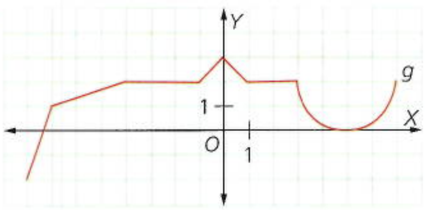


Figura 5.63

b.

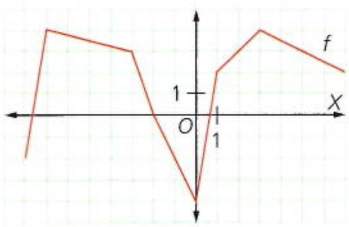


Figura 5.64

Modelación

2 En un supermercado se disminuyen los precios de los artículos de la sección de lácteos en un 10%.

Designa con x el precio de un artículo antes del descuento y con y el precio del mismo artículo después de la rebaja. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

a. Completa la Tabla 5.23, según la información.

x	1 200		1 900	4 000	5 000
y		1 530	1 710	3 600	

Tabla 5.23

b. Escribe la función que representa la situación.

c. Realiza la gráfica correspondiente a la función.

Función lineal y función afín

Resolución de problemas

3 La función $f(x) = 4x + 9$ representa la variación del capital inicial (en millones de pesos) de una empresa con x años de funcionamiento. ¿Estas afirmaciones son verdaderas o falsas? VERDADERO/FALSO

a. La función no es lineal y 4 es la pendiente.

b. El capital inicial fue de nueve millones.

c. La pendiente de la recta es negativa.

4 Un deportista ingresa a un gimnasio. La inscripción tiene un costo de $ 45 000 y la mensualidad de $ 75 000. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

a. Identifica la función y calcula la inversión realizada el primer año.

b. Si una persona se inscribe y paga siete meses de mensualidad por adelantado, ¿cuánto paga en total?

Pendiente y ecuación de la recta

Ejercitación

5 Calcula la pendiente de cada recta. Luego, encuentra su ecuación considerando los puntos que pertenecen a ella. ACTIVIDAD DE REFUERZO

a.

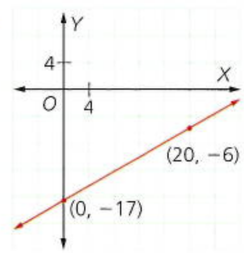


Figura 5.65

b.

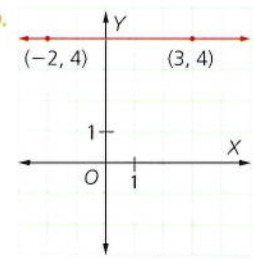


Figura 5.66

Razonamiento

6 Determina el conjunto de los valores que debe tomar a para que la recta que pase por los puntos $(-2, 3)$ y $(a, -8)$ siempre tenga pendiente negativa. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Comunicación

7 Relaciona cada representación gráfica con la descripción de su pendiente. ACTIVIDAD DE RELACIONAR

a.

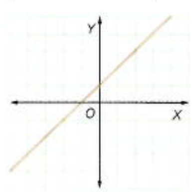


Figura 5.67

b.

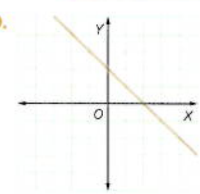


Figura 5.68

Pendiente cero | Pendiente indefinida | Pendiente negativa | Pendiente positiva

c.

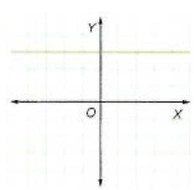


Figura 5.69

d.

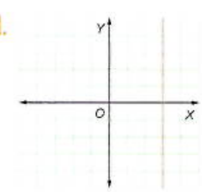


Figura 5.70

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Razonamiento

8 Elige el número de dos cifras en el que la suma de estos es 7 y cuando se invierten sus cifras, el número se incrementa en 27. SELECCIÓN MÚLTIPLE

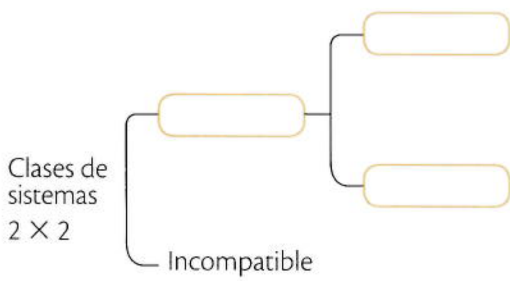
a. 25 b. 52 c. 34 d. 43

Ejercitación

9 Traza las rectas del sistema $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x - 2y = -4 \end{cases}$ y decide si se cortan. ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

Comunicación

10 Completa este esquema que resume las clases de sistemas 2×2 de acuerdo con sus soluciones. ORGANIZADOR GRÁFICO



Razonamiento

11 Selecciona la opción correcta con respecto a la solución del sistema $\begin{cases} 2x - 5y = -6 \\ 4x - 10y = -12 \end{cases}$. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a. Es el punto de coordenadas (2, 2).

b. Tiene infinitas soluciones, pues las ecuaciones corresponden a rectas paralelas.

c. Tiene infinitas soluciones, pues las ecuaciones corresponden a la misma recta.

d. No tiene solución, pues las ecuaciones corresponden a rectas paralelas.

Resolución de problemas

12 Pablo compró un balón de fútbol y dos pelotas de tenis y pagó en total \$ 55 000. Andrea compró en la misma tienda tres balones de fútbol y una pelota de tenis por lo que pagó en total \$ 90 000. Si Lina va a la misma tienda y quiere comprar cinco balones de fútbol y ocho pelotas de tenis, ¿cuánto debe pagar? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Razonamiento

13 Califica como verdadera o falsa cada afirmación. VERDADERO/FALSO

a. Todos los sistemas de ecuaciones tienen una solución única.

b. Existen sistemas de ecuaciones 2×2 cuya solución son todos los puntos que se hallan sobre una recta.

c. Un sistema de ecuaciones puede tener dos soluciones.

Ejercitación

14 Completa los determinantes que permiten solucionar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -5x + 3y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \square & 3 \\ \square & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ \square & \square \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & \square \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & -1 \end{vmatrix}}$$

Resolución de problemas

15 Joaquín tiene \$ 120 000 en 33 billetes de \$ 5 000 y de \$ 2 000. ¿Cuántos billetes son de \$ 5 000 y cuántos de \$ 2 000? SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

16 Determina la medida de dos ángulos si son suplementarios y, además, la diferencia entre ellos es igual a siete veces el ángulo menor. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

17 Determina el monto del capital invertido por un cliente de un banco, si se sabe que parte del capital está al 4% de interés mensual, y la otra parte está al 5% mensual y de esta manera recibe \$ 110 000 de intereses cada mes. Ten en cuenta que si hubiese hecho la inversión al contrario, recibiría \$ 50 000 más.

Sistemas de inecuaciones de primer grado

Modelación

18 Determina el sistema de ecuaciones que relaciona la región sombreada. PREGUNTA ABIERTA

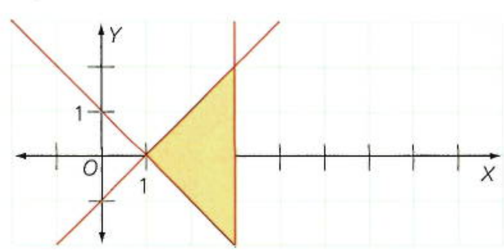
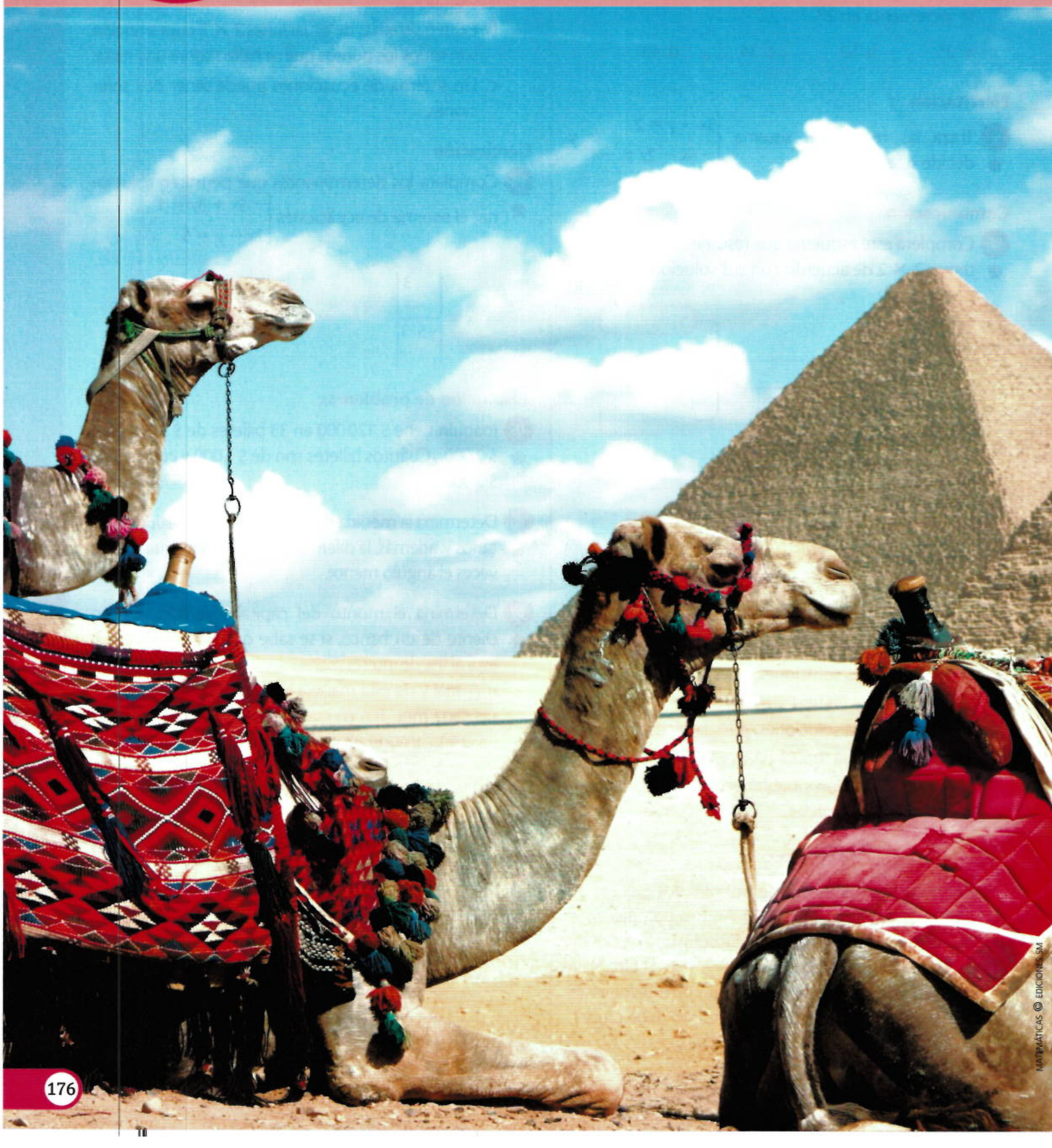


Figura 5.71

6 Funciones



Ya sabemos

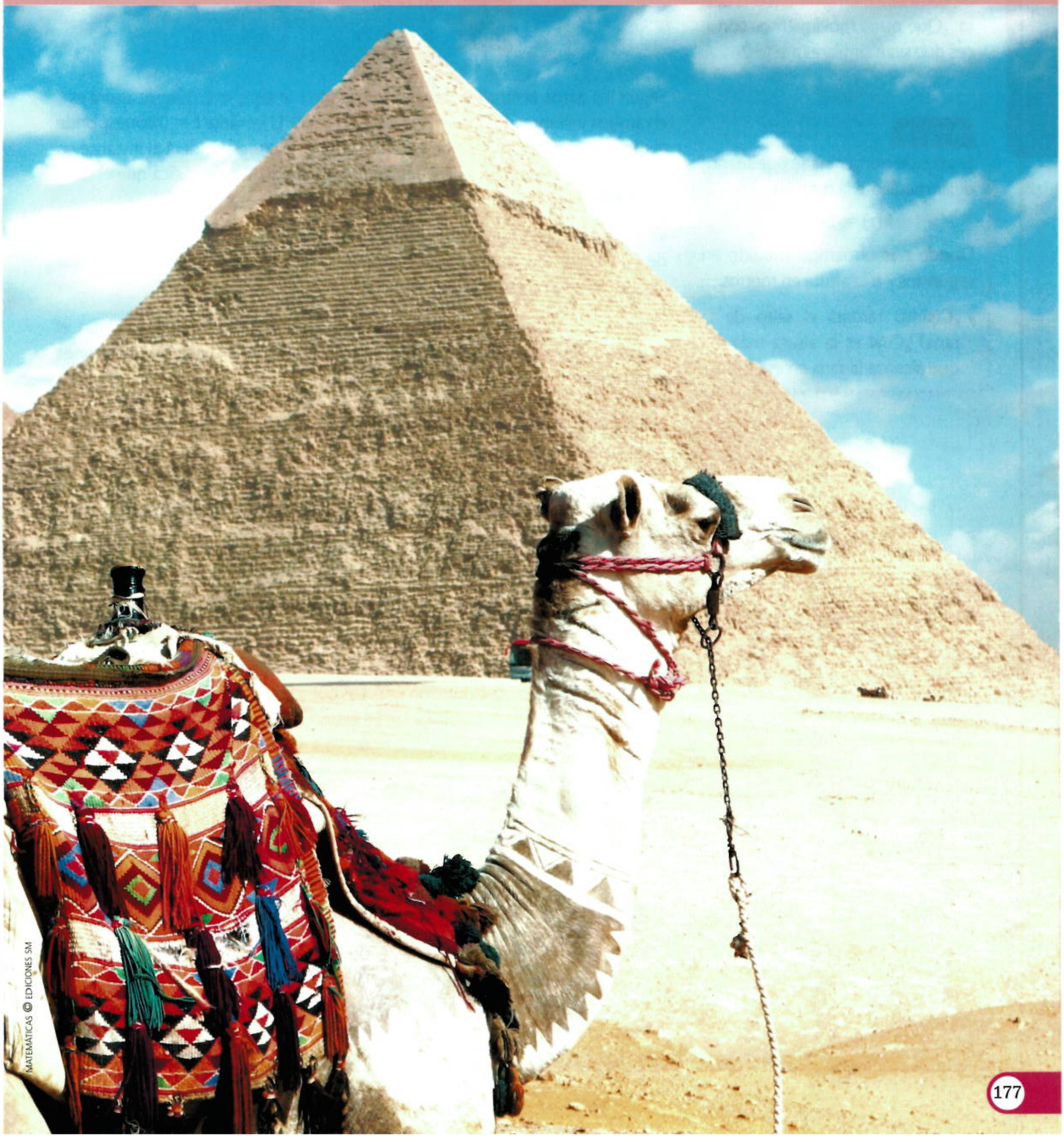
- Reconocer una función y establecer qué tipo de relación muestra.

Vamos a aprender

- A reconocer diferentes tipos de funciones e identificar sus características.

Nos sirve para

- Entender algunos fenómenos físicos a partir de un modelo matemático.



1 Función cuadrática. Representación gráfica

Saberes previos

Describe cómo es el salto de un conejo o el lanzamiento de un balón de baloncesto dirigido hacia la cesta. ¿Qué otros movimientos conoces que sean similares a estos?

Analiza

El salto de cierta rana se puede modelar mediante la función:

$$h(t) = 2t - t^2$$

Donde t es el tiempo medido en segundos y h la altura en metros.

- ¿Cuánto tardará el salto de la rana? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la rana en ese salto?

Conoce

En la Tabla 6.1 se muestra la altura del salto de la rana en cinco momentos distintos.

t	0	0,5	1	1,5	2
$h(t)$	0	0,75	1	0,75	0

Tabla 6.1

Según los datos, la rana está en el piso cuando $t = 0$ y $t = 2$, pues su altura es 0 en ambos instantes. Es decir, $h(0) = 0$ y $h(2) = 0$. El instante $t = 0$ corresponde al momento de iniciar el salto, y el instante $t = 2$ corresponderá al instante en que la rana vuelve al piso después de haber saltado. Esto significa que el salto tarda dos segundos.

Por otra parte, la máxima altura que alcanza la rana corresponde al mayor valor de $h(t)$ registrado en la tabla: 1. Por esto se deduce que la mayor altura que alcanza la rana en este salto es de 1 m.

Muchas situaciones son modeladas mediante funciones que involucran el cuadrado de una variable. Este tipo de funciones se denominan **funciones cuadráticas**.

Una **función cuadrática** es de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

1.1 Representación gráfica de una función cuadrática

La representación gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se caracteriza por tener los siguientes elementos.

- **Vértice (V):** punto donde la parábola alcanza su punto máximo, si $a < 0$, o su punto mínimo, si $a > 0$.
- **Cortes de la parábola con los ejes coordenados (ceros de la función):** puntos donde el valor de la función es 0. Las coordenadas de los puntos de corte con el eje X son de la forma $(x, 0)$. En estos casos, el valor de x se halla resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- **Eje de simetría:** recta paralela al eje Y, que pasa por la coordenada x del vértice de la parábola.
- **Concavidad:** una parábola es cóncava hacia arriba, si $a > 0$, o es cóncava hacia abajo, si $a < 0$.

Ejemplo 1

Para representar gráficamente la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$, se puede completar una tabla de valores como la Tabla 6.2, asignando valores arbitrarios a la variable x. Luego, se representan en el plano cartesiano. Como la función está definida para cualquier valor real, al trazar la curva se obtiene la Figura 6.1.

x	$f(x)$
-4	-10
-2	-4
0	-2
2	-4
4	-10

Tabla 6.2

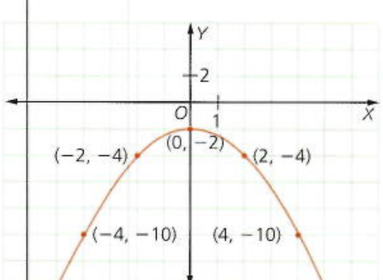


Figura 6.1

1.2 Funciones de la forma $f(x) = ax^2$

Una función definida por la expresión $y = ax^2$, con $a \neq 0$, se conoce como **función cuadrática con vértice en el origen.**

El vértice de la parábola que describe la función $f(x) = ax^2$ es $(0, 0)$; el eje de simetría de esta parábola es el eje Y.

Ejemplo 2

Se puede determinar la variación de las gráficas de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$, analizando el resultado para los distintos valores de a.

- Si $a > 1$, la gráfica de la función es una contracción de la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Si $0 < a < 1$, la gráfica de la función es una dilatación de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

  En la Tabla 6.3, las parábolas representadas son $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = 4x^2$ para $a > 1$; y $f(x) = x^2$, $g(x) = 0{,}5x^2$ y $h(x) = 0{,}33x^2$ para $0 < a < 1$.

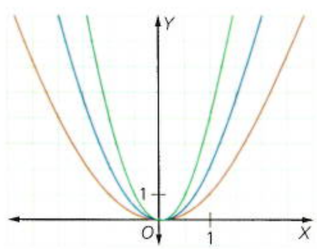
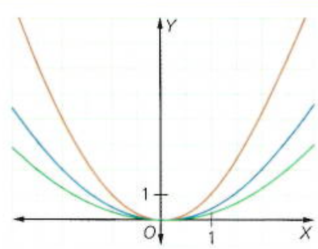
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

Tabla 6.3

- Cuando $a < 0$, las gráficas de las funciones se obtienen reflejando las gráficas de los casos anteriores con respecto al eje X, como se ve en la Tabla 6.4.

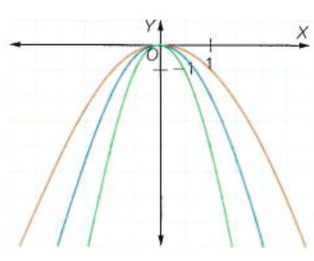
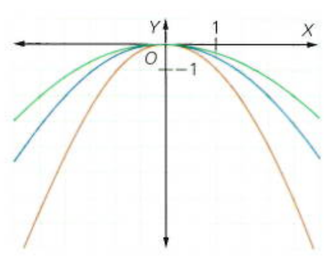
$a < -1$	$-1 < a < 0$
	

Tabla 6.4

1.3 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$

La parábola que describe la función $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + c}$ es una traslación vertical de c unidades de la parábola $f(x) = ax^2$. Esta traslación es hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.

El vértice de la parábola $f(x) = ax^2 + c$ está ubicado en el punto $(0, c)$ y el eje de simetría es el eje Y.

1.4 Funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

La función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ es una función cuadrática en la cual a, b y c son diferentes de 0.

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede llevarse a una de las formas:

$$f(x) = a(x - h)^2 \text{ o } f(x) = a(x - h)^2 + k$$

- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2$, el vértice de la parábola es el punto $(h, 0)$ y el eje de simetría es el eje Y.
- Si la función es de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, el vértice de la parábola es el punto (h, k) y el eje de simetría es la recta $x = h$.

Ejemplo 3

La función $g(x) = x^2 - 6x + 9$ se puede expresar como $g(x) = (x - 3)^2$, por lo tanto, su vértice es $(3, 0)$. Además, su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, tres unidades a la derecha.

Ejemplo 4

La función $h(x) = x^2 + 4x + 4$ se puede expresar como $g(x) = (x + 2)^2$, por lo tanto, su vértice es $(-2, 0)$. Su gráfica se obtiene trasladando horizontalmente la parábola $f(x) = x^2$, dos unidades a la izquierda (Figura 6.2).

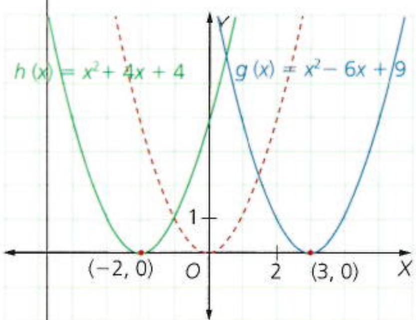


Figura 6.2

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Identifica cuáles de las siguientes expresiones pueden representar una función cuadrática.

a. $f(x) = -16x^2 + 14x + 10$

b. $f(p) = 16p^3 + 14p^2 + 12$

c. $f(n) = -0{,}25n^2 - 0{,}5n + 1$

d. $f(x) = -6x + 1$

e. $f(t) = -4t - 5 + 32t^2$

Razonamiento

2 Escribe cada una de las siguientes funciones en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Luego, identifica los valores correspondientes de a, b y c.

a. $f(x) = 4x + 10 - 16x^2$

b. $f(x) = -6x + 5 + x^2$

c. $f(x) = x^2 + 10 - 6x$

d. $f(x) = -2 + x^2 - 4x$

Comunicación

3 Escribe la ecuación del eje de simetría de cada parábola y las coordenadas del vértice.

a.

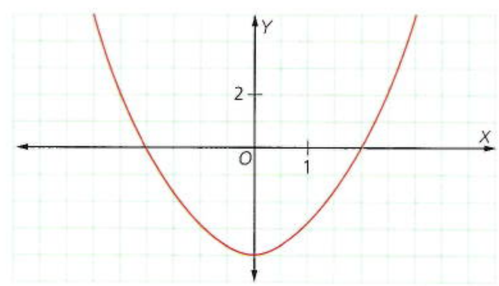


Figura 6.3

b.

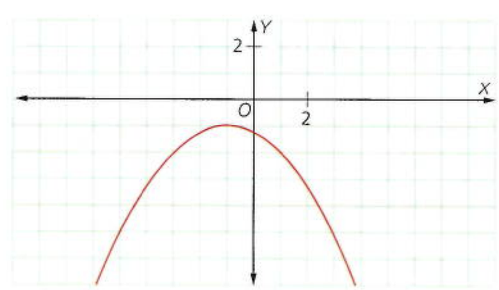


Figura 6.4

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Comunicación

4 Elabora las gráficas de las funciones cuadráticas de cada grupo en un mismo plano cartesiano. Explica sus diferencias y semejanzas.

a. $f(x) = 2x^2$ $\quad g(x) = -2x^2$

b. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\quad g(x) = 2x^2$

c. $f(x) = 2x^2$ $\quad g(x) = 3x^2$ $\quad h(x) = 4x^2$

d. $f(x) = -2x^2$ $\quad g(x) = -3x^2$ $\quad h(x) = -4x^2$

5 Determina la ecuación de la función cuadrática que define cada tabla de valores.

a.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

Tabla 6.5

b.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$

Tabla 6.6

6 Lleva cada función a la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Luego, escribe las coordenadas del vértice de la parábola que la representa.

a. $f(x) = x^2 + 2x + 3$

b. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

c. $f(x) = 3x^2 + 6x + 4$

Resolución de problemas

7 El movimiento de una pelota puede expresarse mediante la función $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$, donde x representa el tiempo en segundos y $f(x)$, la altura en metros.

a. Representa gráficamente la función $f(x)$.

b. ¿Qué significa que la gráfica tenga un punto máximo o mínimo?

c. ¿Qué altura alcanza la pelota al transcurrir dos segundos desde el inicio del movimiento?

8 El movimiento de cierta partícula está determinado por la función $f(x) = x^2 - 4$. Su trayectoria se muestra en la Figura 6.5.

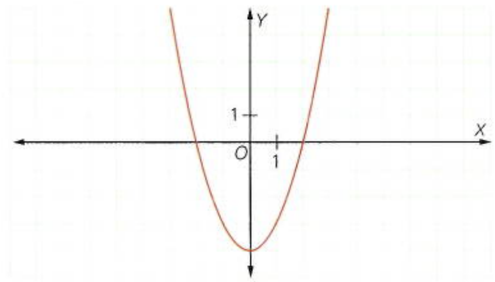


Figura 6.5

a. ¿Qué coordenadas tiene el punto más bajo que alcanza la partícula?

b. ¿En qué puntos la trayectoria corta a los ejes?

Evaluación del aprendizaje

i Observa la Figura 6.6. ¿Qué tipo de transformación sufrió la parábola *a* para obtener la parábola *b*? Determina las funciones que las describen.

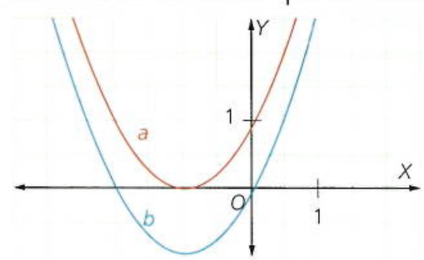


Figura 6.6

ii La trayectoria de cierto satélite se ajusta a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 - 12$, donde x representa el tiempo en días y $f(x)$ el recorrido en kilómetros. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido el satélite al cabo de diez días desde su lanzamiento?

Educación ambiental

El nivel y de contaminación de un río está dado por la función $y = -8x^2 - 16$, donde x representa el tiempo medido en horas. ¿A qué hora del día el río se encuentra más contaminado?

- ¿Qué acciones puedes tomar para evitar que se sigan contaminando lo ríos?

2 Obtención de los ceros de una función cuadrática

Saberes previos

Representa gráficamente la función $y = 3x^2 - 3$. ¿Cuáles son los puntos de corte de la gráfica con los ejes?

Analiza

Una compañía de alimentos diseña una caja para empacar sus productos con un volumen igual a 72 dm³. Sus dimensiones están representadas en la Figura 6.7.

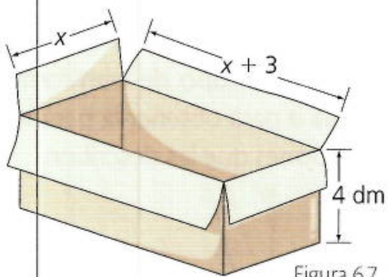


Figura 6.7

- Encuentra las dimensiones de la caja en decímetros.

Conoce

El volumen $V(x)$ de una caja se halla multiplicando sus tres dimensiones, entonces para la situación $V(x) = 4x^2 + 12x - 72$.

Para hallar las dimensiones de la caja es necesario determinar los ceros de la función cuadrática $V(x)$ que corresponden a los valores de x para los cuales $4x^2 + 12x - 72 = 0$. Como en este caso no es practico recurrir a la factorización, se utiliza la **fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas**, así:

En la ecuación $4x^2 + 12x - 72 = 0$, $a = 4$, $b = 12$ y $c = -72$, por lo tanto:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-72)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -6$$

Al considerar las condiciones del problema, se deduce que la respuesta válida es $x = 3$, de modo que las dimensiones de la caja son: 3 dm, 6 dm y 4 dm

La **fórmula general para encontrar los ceros de una función cuadrática** de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, con a, b y c números reales, es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 1

Observa cómo se aplica la fórmula general para hallar los ceros de la función asociada a la ecuación $x^2 - 2x - 960 = 0$.

Como $a = 1$, $b = -2$ y $c = -960$, entonces:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-960)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3840}}{2} = \frac{2 \pm 62}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 + 62}{2} = 32 \text{ y } x_2 = \frac{2 - 62}{2} = -30$$

2.1 Discriminante de una ecuación de segundo grado

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante.** Es el valor que determina el tipo de ceros de la ecuación de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales, se consideran los siguientes casos:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una única solución real.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 2

Observa cómo se determina el tipo de soluciones de las ecuaciones cuadráticas $x^2 + 6x + 9 = 0$, $3x^2 + 5x + 6 = 0$ y $2x^2 + 5x - 3 = 0$, analizando su discriminante.

- El discriminante de la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución real.

- El discriminante de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$$

Como $49 > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.

- El discriminante de la ecuación $3x^2 + 5x + 6 = 0$ es:

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -47$$

Como $-47 < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Resuelve las siguientes ecuaciones usando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 + 3x - 10 = 0$

b. $x^2 - 3x - 4 = 0$

c. $-x^2 - 4x - 2 = 0$

d. $-2x^2 - x = -6$

e. $(x + 2)^2 + 1 = 0$

f. $(x - 3)^2 - 4 = 0$

g. $-0,5x^2 + 2x + 1,5 = 0$

h. $1,5x^2 + 2x = 0$

i. $(x + 2)(x - 3) = 6$

j. $(x + 1)(x - 5) = 16$

Razonamiento

2 Determina el tipo de raíces que tiene cada ecuación estudiando su discriminante. Luego, resuelve aquellas que tengan solución o soluciones reales.

a. $8x^2 - 5x + 1 = 0$

b. $x(2x - 3) = 20$

c. $6x^2 + x + 2 = 0$

d. $x - 2x^2 = 8$

e. $2x^2 + x - 2 = 0$

f. $-3x^2 - x + 1 = 0$

Resolución de problemas

3 El largo de una sala rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. ¿Cuál es el área original de la sala?

4 Un número entero es tal que el cuadrado del antecesor de su doble es equivalente al cuadrado del número aumentado en 5. ¿Cuál es el número?

Evaluación del aprendizaje

Examina la Figura 6.8 y determina la ecuación cuadrática asociada a la parábola. ¿Cuáles son los ceros de la función?

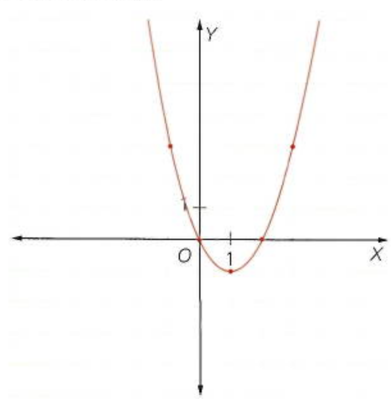


Figura 6.8

3 Funciones polinómicas. Representación gráfica

Saberes previos

Traza la gráfica de las siguientes funciones:

- $f(x) = 5$
- $g(x) = -2x + 1$
- $h(x) = x^2 - 5x + 1$

Analiza

Sea la función:

$$f(x) = 8x + 5x^2 - 3x^3 - 2$$

- ¿Qué clase de función es $f(x)$? ¿Cuáles son sus características?

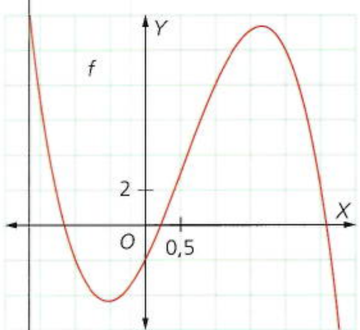


Figura 6.9

Conoce

3.1 Funciones polinómicas de tercer grado

La expresión algebraica de la función $f(x)$ es equivalente a:

$$f(x) = -3x^3 + 5x^2 + 8x - 2$$

Esta expresión es un polinomio de tercer grado, porque 3 es el mayor exponente de la variable x y corresponde a una función **polinómica de tercer grado**.

Se observa que $f(x)$ está definida para cualquier valor real, por lo que $D(f) = \mathbb{R}$. Además todo x tiene una imagen a través de f en el conjunto de los números reales, esto significa, que es una función continua tal que $R(f) = \mathbb{R}$, como se muestra en la Figura 6.9.

Una **función polinómica de tercer grado** o **cúbica** es de la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \text{ reales y } a \neq 0$$

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Ejemplo 1

En la Figura 6.10, se puede verificar que la función polinómica $f(x) = -x^3 - 4$ es continua. Su dominio y su rango coinciden con el conjunto $\mathbb{R}$.

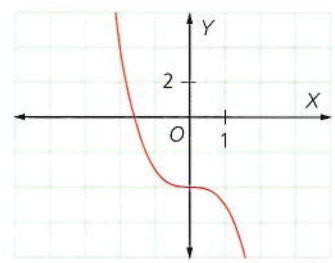


Figura 6.10

3.2 Funciones polinómicas de cuarto grado

Una **función polinómica de cuarto grado** o **cuártica** es de la forma:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ con } a, b, c, d, e \text{ reales y } a \neq 0$$

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Ejemplo 2

Para representar la función $f(x) = x^4 - x^2$ es necesario determinar los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X. Esto es:

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \text{ y } x = -1$$

También resulta útil calcular algunos pares adicionales de valores de función, con lo cual se completa una tabla como la siguiente.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
f(x)	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{15}{256}$	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{15}{256}$	0

Tabla 6.7

Al representar estos puntos se obtiene la gráfica de la Figura 6.11.

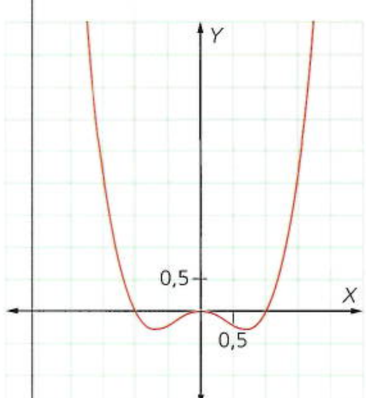


Figura 6.11

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Completa una tabla de valores para representar cada función cúbica.

a. $f(x) = 2x^3$ b. $f(x) = 2 - x^3$

c. $f(x) = x^3 - 3$ d. $f(x) = -3x^3 + 2$

2 Representa las siguientes funciones cuárticas.

a. $f(x) = x^4$ b. $f(x) = 2x^4$

c. $f(x) = x^4 + 1$ d. $f(x) = 2x^4 - 3$

3 Haz un bosquejo de la gráfica de cada función polinómica, presentada de forma factorizada.

a. $j(x) = (x - 1)(x + 2)$

b. $m(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

c. $t(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

d. $p(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

e. $r(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

Razonamiento

4 Ten en cuenta las siguientes funciones polinómicas.

$$f(x) = -x^3 + x \text{ y } g(x) = x^4 + x^2$$

a. Construye una tabla de valores y realiza las gráficas correspondientes.

b. Describe el dominio.

c. Determina el recorrido.

d. Encuentra los cortes de la gráfica con los ejes.

e. Estudia la simetría.

f. Estudia la continuidad.

g. Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica.

h. Encuentra los máximos y los mínimos.

5 Elabora las gráficas de las funciones en un mismo plano cartesiano. Luego, responde las preguntas.

$$y = x^2, y = x^3, y = x^4 \text{ y } y = x^5 \text{ para } -1 \leq x \leq 1$$

a. ¿A qué se asemejaría la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo?

b. ¿Qué se podría decir acerca de $y = x^{101}$?

Resolución de problemas

6 Relaciona cada función polinómica con su gráfica correspondiente.

a. $P(x) = x(x^2 - 4)$ c. $R(x) = x^4 + 2x^3$

b. $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$ d. $T(x) = -x^3 + 2x^2$

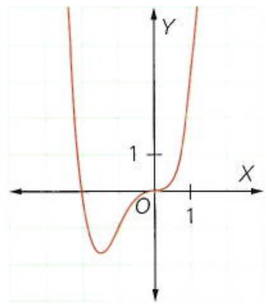


Figura 6.12

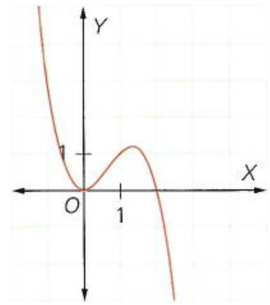


Figura 6.13

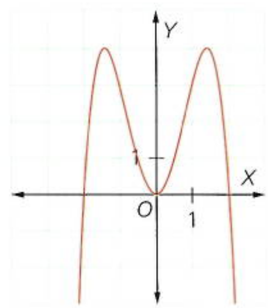


Figura 6.14

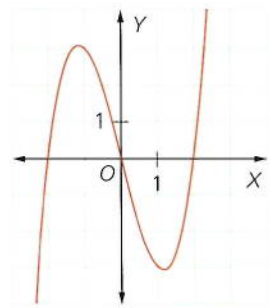


Figura 6.15

Evaluación del aprendizaje

Se construye una caja abierta de una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm cortando cuadros de longitud lateral x de cada esquina y doblando hacia arriba los lados, como se observa en la Figura 6.16.

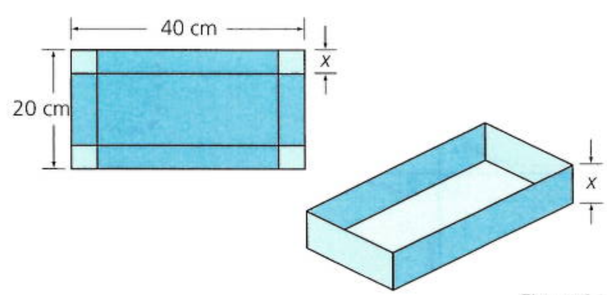


Figura 6.16

a. Expresa el volumen V de la caja como una función en términos de la longitud x.

b. ¿Cuál es el dominio de V?

c. Realiza una gráfica de la función V y empléala para estimar el volumen máximo de la caja.

4 Funciones de proporcionalidad inversa

Saberes previos

La población de una bacteria se reduce a la mitad cada día. Si al iniciar el estudio habían 1 000 individuos, ¿cuál será la población al cabo del séptimo día?

Analiza

En la Figura 6.17 se observa la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

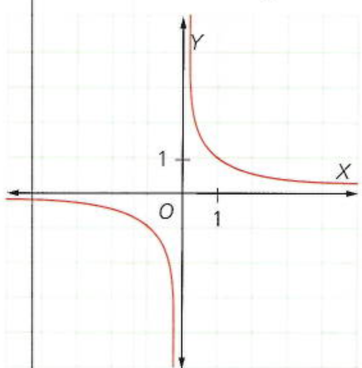


Figura 6.17

- Estudia el comportamiento de la función $f(x)$ cuando x toma valores cada vez más grandes y cuando x toma valores cada vez más pequeños.

Conoce

En la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se observa que:

- Cuando x aumenta en el intervalo $(0, \infty)$, la función $f(x)$ decrece acercándose al eje X pero sin intersecarlo.
- Cuando x disminuye en el intervalo $(-\infty, 0)$, $f(x)$ crece acercándose al eje X pero sin intersecarlo.

Este tipo de funciones son llamadas funciones de proporcionalidad inversa.

Las funciones de la forma $y = \dfrac{k}{x}$ se denominan **funciones de proporcionalidad inversa**. Sus gráficas son curvas llamadas **hipérbolas**.

Algunas propiedades de las funciones de proporcionalidad inversa, son las siguientes.

- Su dominio y su recorrido coinciden con $\mathbb{R} - \{0\}$.
- A medida que x se aleja del origen, por la izquierda o por la derecha, los valores correspondientes de y se aproximan a 0, si x se acerca al origen, los valores correspondientes de y se alejan de 0.
- Si $k > 0$, la función es siempre decreciente, y si $k < 0$, es siempre creciente.

Ejemplo 1

Las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{8}{x}$ y $g(x) = \dfrac{-4}{x}$ de las figuras 6.18 y 6.19, se obtuvieron a partir de los valores registrados en la Tabla 6.8.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R} - \{0\}$.

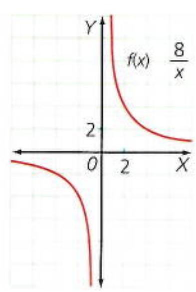


Figura 6.18

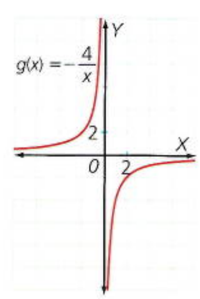


Figura 6.19

x	$f(x)$	$g(x)$
−4	−2	1
−2	−4	2
−1	−8	4
0	No existe	No existe
1	8	−4
2	4	−2
3	2	−1

Tabla 6.8

Ejemplo 2

La función $y = \dfrac{x-6}{x-2}$ se puede expresar como sigue:

$$y = \frac{x-6}{x-2} = \frac{x-2-4}{x-2} = 1 + \frac{-4}{x-2}$$

Esta expresión permite analizar que, la gráfica se obtiene, primero, trasladando $y = \dfrac{-4}{x}$, dos unidades hacia la derecha para conseguir $y = \dfrac{-4}{x-2}$ (Figura 6.21), y luego, desplazando esta última verticalmente una unidad hacia arriba, como se puede observar en la Figura 6.22.

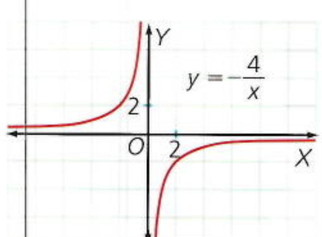


Figura 6.20

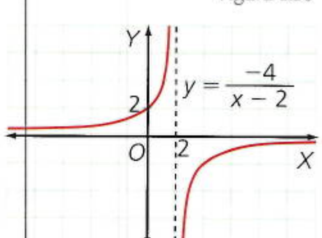


Figura 6.21

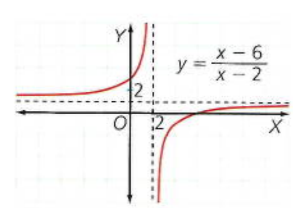


Figura 6.22

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Identifica entre las siguientes funciones las que son de proporcionalidad inversa.

a. $y = \frac{-3x}{2}$ b. $y = \frac{2}{x}$

c. $y = \frac{-5}{x}$ d. $y = \frac{4x}{x+1}$

e. $y = \frac{x+5}{x-1}$ f. $y = \frac{12}{x}$

g. $y = \frac{30}{x}$ h. $y = \frac{10x}{3}$

Comunicación

2 Representa en un mismo plano, las funciones que están en cada grupo.

a. $y = \frac{3}{x}$ $y = \frac{-3}{x}$

b. $y = \frac{2}{x}$ $y = \frac{-2}{x}$

c. $y = \frac{6}{x}$ $y = \frac{-6}{x}$

3 Relaciona cada función con su gráfica respectiva.

a. $y = \frac{-1}{x}$ b. $y = \frac{4}{x}$

c. $y = \frac{3}{x}$ d. $y = \frac{-5}{x}$

( )

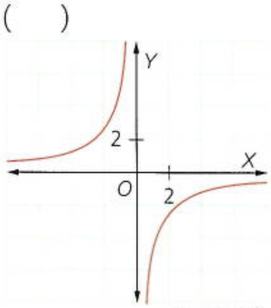


Figura 6.23

( )

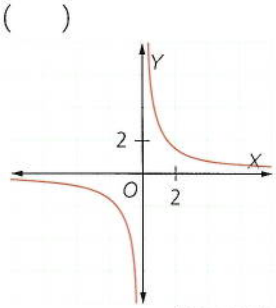


Figura 6.24

( )

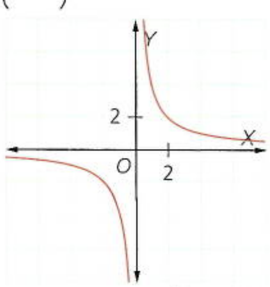


Figura 6.25

( )

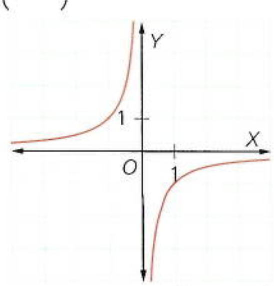


Figura 6.26

4 Representa cada función. Considérala como el resultado de aplicar transformaciones a una función de proporcionalidad directa.

a. $y = \frac{12}{x-1}$ b. $y = \frac{-6}{x+3}$

c. $y = \frac{-5x}{x+3}$ d. $y = \frac{2x+4}{3x-6}$

e. $y = \frac{x-1}{x+1}$ f. $y = \frac{x-8}{x-2}$

Resolución de problemas

5 Un rectángulo tiene una superficie de 200 m^2.

a. Da las dimensiones de dos posibles rectángulos que cumplan esta condición.

b. Si se llama x a su base y y a su altura, expresa la altura en función de la base.

Evaluación del aprendizaje

✓ Una empresa calculó que necesitaba una superficie de 600 m^2 para almacenar sus existencias y decidió construir una nave rectangular para tal fin. Si se llaman x y y a los lados de dicho rectángulo, encuentra:

a. Los valores entre los que varían x y y.

b. La función que relaciona a x con y.

c. La función que relaciona el perímetro de la nave con el lado x.

Estilos de vida saludable

El consumo de sustancias psicoactivas trae consecuencias para la salud tales como problemas cardiovasculares, pérdida de memoria y ansiedad. Supón que por cada miligramo de droga en la sangre, se reduce la capacidad de memorización una décima parte. Encuentra la función de proporcionalidad correspondiente y construye su gráfica.

5 Tendencia y asíntotas de una función

Saberes previos

Traza la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ y describe el comportamiento de ella en valores cercanos a 0.

Analiza

La gráfica de la función $f(x) = \frac{-3}{x-2}$ se observa en la Figura 6.27.

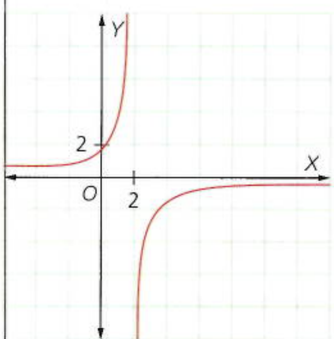


Figura 6.27

- Haz un análisis del comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a 2 por la derecha y por la izquierda.

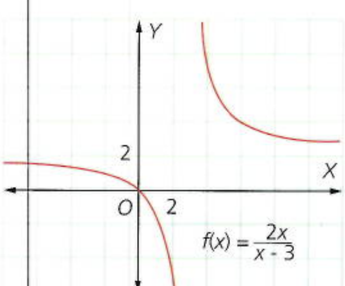


Figura 6.28

Conoce

5.1 Tendencia de una función

Del análisis de la gráfica de $f(x)$ se pueden obtener estas conclusiones:

- Cuando x se acerca a 2 por la derecha, los valores de $f(x)$ son menores. Cuando x se acerca a 2 por la izquierda, los valores de $f(x)$ son mayores.
- La gráfica de la función $f(x)$ no interseca a la recta $x = 2$, ni al eje X.

Se dice entonces que $f(x)$ tiende a $-\infty$, cuando x se acerca a 2 por la derecha y que $f(x)$ tiende a $+\infty$ (o solo ∞), cuando x se acerca a 2 por la izquierda.

Una función $y = f(x)$ **tiende a un valor** si la variable y se aproxima a ese valor cuando la variable x aumenta mucho, disminuye mucho o se acerca a un valor concreto.

Ejemplo 1

En la Figura 6.28 se representa $f(x) = \frac{2x}{x-3}$. Con ella se estudiará a qué valor se acerca $f(x)$ cuando x se aproxima a 1, 3, $+\infty$ y $-\infty$.

a. En primer lugar, se completa la Tabla 6.9.

x tiende a 1 por la izquierda: $x \to 1^-$ $\quad$ $1^+ \leftarrow x$: x tiende a 1 por la derecha

x	...	0,99	0,999	0,9999	...	1	...	1,0001	1,001	...
$f(x) = \frac{2x}{x-3}$	...	−0,985	−0,998	−0,999	...	−1	...	−1,000	−1,001	...

$f(x)$ tiende a -1

Tabla 6.9

Por lo tanto, cuando x se acerca a 1, se verifica que $f(x)$ tiende a -1.

b. Al completar la Tabla 6.10, se observa que:

x tiende a 3 por la izquierda: $x \to 3^-$ $\quad$ $3^+ \leftarrow x$: x tiende a 3 por la derecha

x	...	2,99	2,999	2,9999	...	3	...	3,00001	3,0001	...
$f(x) = \frac{2x}{x-3}$	...	−598	−5 998	−59 998	...	No está definido	...	600 002	60 002	...

$f(x)$ tiende a $-\infty$ $\quad$ $f(x)$ tiende a $+\infty$

Tabla 6.10

- Cuando x se acerca a 3 por la izquierda, $f(x)$ tiende a $-\infty$.
- Cuando x se acerca a 3 por la derecha, $f(x)$ tiende a $+\infty$.

c. Cuando se completa la Tabla 6.11, se concluye que:

x tiende a $-\infty$: $x \to -\infty$ $\quad$ $+\infty \leftarrow x$: x tiende a $+\infty$

x	$-\infty$	...	−100 000	...	−1000	...	0	...	100 000	...	$+\infty$
$f(x) = \frac{2x}{x-3}$	2	...	1,99994	...	1,994	...	0	...	2,00006	...	2

$f(x)$ tiende a 2 $\quad$ $f(x)$ tiende a 2

Tabla 6.11

- Cuando x tiende a $-\infty$, se observa que $f(x)$ se acerca a 2.
- Cuando x se aproxima a $+\infty$, se observa que $f(x)$ tiende a 2.

5.2 Asíntotas horizontales

Una función $f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** $y = h$ si se cumple alguna de estas condiciones.

$$f(x) \to h \text{ cuando } x \to -\infty \text{ o bien } f(x) \to h \text{ cuando } x \to +\infty$$

Si las tendencias son diferentes, la función posee dos asíntotas horizontales.

Ejemplo 2

Se estima que el número de pizarras electrónicas en los centros educativos de una ciudad crecerá según la función $p(x) = \dfrac{3\,000x^2}{x^2+1}$ donde x es el número de años. Para determinar cuál es el "techo" que se alcanzará, se divide entre la expresión x^2: $\dfrac{3\,000\,\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}$ para evaluar $\dfrac{3\,000}{1+\frac{1}{x^2}}$ cuando $x \to \infty$ como

$\dfrac{1}{x^2} \to 0$, entonces $\dfrac{3\,000}{1+\cancel{\frac{1}{x^2}}_{\,0}} = 3\,000.$

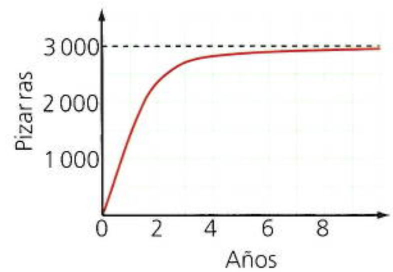


Figura 6.29

Si se observa la gráfica de la función $p(x)$ en la Figura 6.29, se comprueba que, en pocos años, se aproximará a la recta $y = 3\,000$, es decir, que la cantidad de pizarras electrónicas se acercará a 3 000.

Se dice que la recta $y = 3\,000$ es una **asíntota horizontal** de la función $p(x)$.

5.3 Asíntotas verticales

Una función $f(x)$ presenta una **asíntota vertical** $x = k$ si:

$f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to k$ por la izquierda o bien

$f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to k$ por la derecha.

Una función puede tener cualquier número de asíntotas verticales.

Las asíntotas verticales de las funciones racionales se obtienen para los valores de x que anulan el denominador, pero no el numerador.

Ejemplo 3

En la Figura 6.30 se representó la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

En esta se observa que, si el valor de x se aproxima a -2 por la izquierda, la variable y tiende a $+\infty$, y si se acerca a -2 por la derecha, la variable y tiende a $-\infty$. De manera análoga, cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, la variable y tiende a $-\infty$, y si se acerca a 2 por la derecha, la variable y tiende a $+\infty$.

Por otra parte, los valores $x = -2$ y $x = 2$ hacen que el denominador de la función $f(x)$ sea igual a 0, pero no el numerador. Con esto se verifica que dichas rectas son asíntotas verticales de $f(x)$.

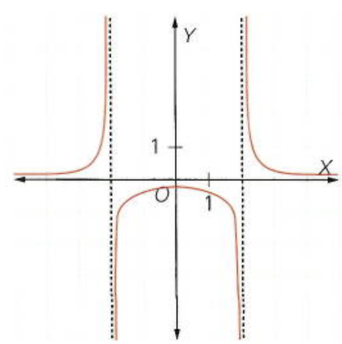


Figura 6.30

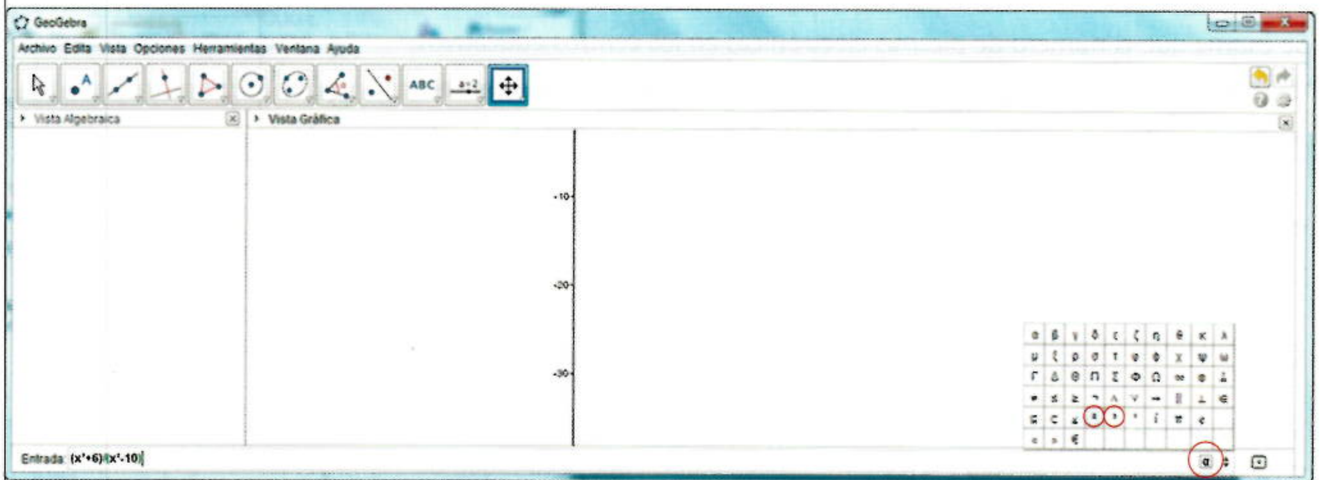
5 Tendencia y asíntotas de una función

MatemaTICS

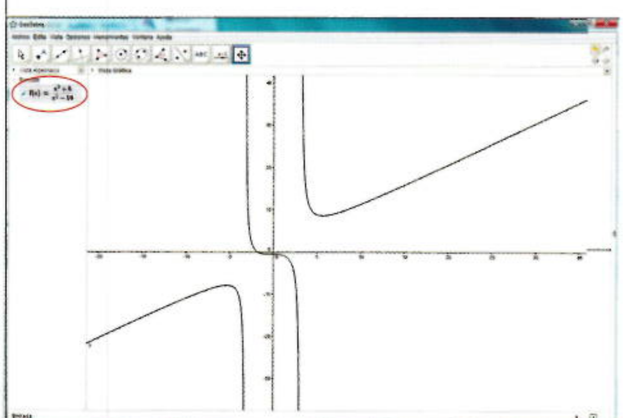
Representación de funciones y asíntotas en GeoGebra

Observa cómo se obtiene la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 6}{x^2 - 10}$ y sus asíntotas.

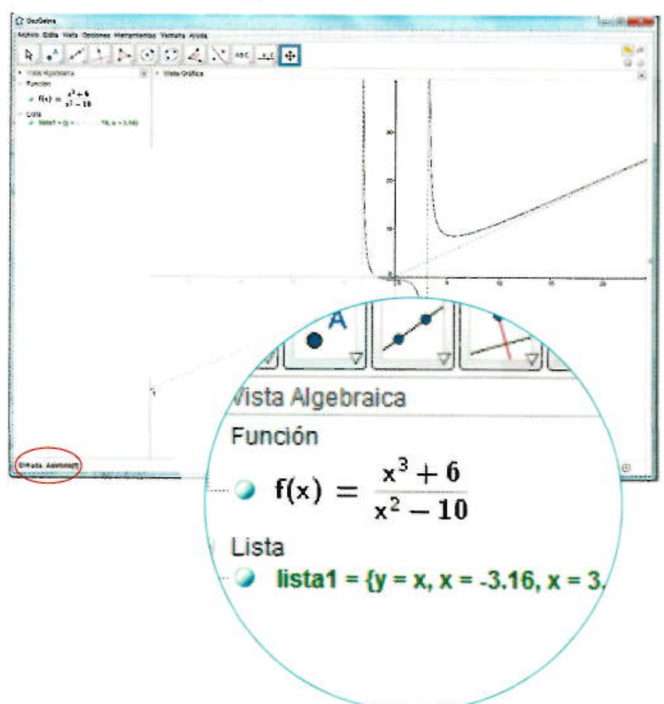
En la barra de entrada se digita la función así: $(x^3 + 6)/(x^2 - 10)$. Los exponentes se pueden obtener haciendo clic en el ícono **α** de la barra de entrada y luego en el exponente respectivo.



Al dar ENTER, en la vista algebraica aparece la función que se digitó y en la vista gráfica la representación de la función, como se observa a continuación:



Para hallar las asíntotas de la función, se digita en la barra de entrada Asíntota[f] y luego se da ENTER, f es el nombre automático que le da GeoGebra a la función (ver vista algebraica).



Las ecuaciones de las asíntotas de la función aparecen en la vista algebraica: $y = x, x = -3{,}16, x = 3{,}16$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Determina a qué valor tiende la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ en cada caso.

a. Cuando x se acerca a 3.

b. Cuando x se aproxima a 5.

c. Cuando x se acerca a $+\infty$.

d. Cuando x se aproxima a $-\infty$.

2 Indica a qué valor tiende la función $f(x) = \dfrac{3x+2}{x(x-2)}$, en los siguientes casos.

a. Cuando x se aproxima a 4.

b. Cuando x se acerca a 0.

c. Cuando x se aproxima a $+\infty$.

d. Cuando x se acerca a $-\infty$.

3 Explica a qué valor tiende la función $f(x) = \dfrac{(-2+x)}{x+1}$ cuando x se aproxima a los valores dados.

a. 1 b. 2

c. ∞ d. $-\infty$

Ejercitación

4 Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a. $y = \dfrac{5x+2}{x-1}$ b. $y = \dfrac{-3x+2}{x}$

c. $y = \dfrac{x^3+2}{x^3-x}$ d. $y = \dfrac{2x^2}{x^2-x-6}$

5 Relaciona cada función con la gráfica que le corresponda.

a. $y = \dfrac{x}{x-3}$ b. $y = \dfrac{1-x}{x-3}$

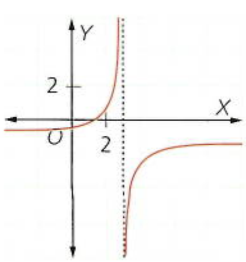


Figura 6.31

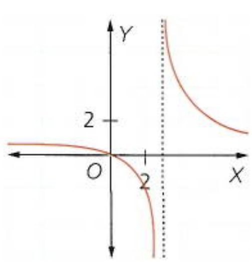


Figura 6.32

Resolución de problemas

6 Observa la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x+1}$, en la Figura 6.33.

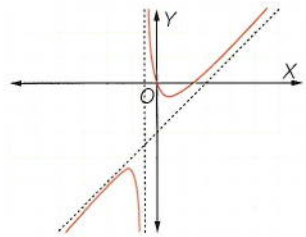


Figura 6.33

Al dividir el numerador entre el denominador, resulta:

$$f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1} = x - 4 - \frac{4}{x+1}$$

A medida que x tiende a $\pm\infty$ se verifica que $\dfrac{4}{x+1}$ se acerca a 0. Por lo tanto, la gráfica de la función $f(x)$ se acerca a la recta $y = x - 4$. Se dice entonces que la recta $y = x - 4$ es una **asíntota oblicua** de la función $f(x)$.

Una función puede tener, a lo sumo, dos asíntotas oblicuas: una, cuando $x \to +\infty$, y otra, cuando $x \to -\infty$.

Halla todas las asíntotas de estas funciones.

a. $\dfrac{-x^3-5}{x^2+2x+1}$ b. $\dfrac{-2x^3+5x+3}{x^2-4}$

c. $\dfrac{2x^2}{x^2-x-6}$ d. $\dfrac{4x^3}{x^2-x-6}$

Evaluación del aprendizaje

i Calcula las asíntotas de las funciones dadas.

a. $y = \dfrac{4}{x-2}$ b. $y = \dfrac{-2}{4x+3}$

c. $y = \dfrac{x}{x+1}$ d. $y = \dfrac{x^3}{x^3-8}$

e. $y = \dfrac{x^3-1}{x^2}$ f. $y = \dfrac{3x^2+12}{x^2-5x}$

ii Si k y a son dos números reales cualesquiera, calcula las asíntotas de las siguientes funciones.

a. $y = \dfrac{k}{x}$ b. $y = \dfrac{kx}{x+a}$

c. $y = \dfrac{k}{x+a}$ d. $y = \dfrac{kx^2}{x+a}$

6 Funciones exponenciales. Representación gráfica

Saberes previos

Una especie de insectos se triplica cada año. Si inicialmente hay dos, x representa el tiempo y $Q(x)$, la población después de x años, ¿cuál es la expresión que determina el número de insectos?

Analiza

La vida media del estroncio 90 es de 28,8 años. La función que modela el número N de núcleos por desintegrar durante un tiempo t en años, es:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

donde N_0 es el número de núcleos que hay inicialmente y T la vida media del elemento radiactivo en años.

- Si en el año 2000 se tenían 20 núcleos de estroncio 90, ¿cuántos núcleos por desintegrar quedarán en el año 2053? Elabora una gráfica de la función dada.

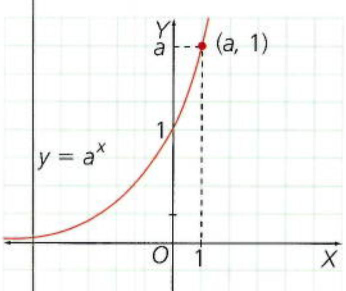


Figura 6.35

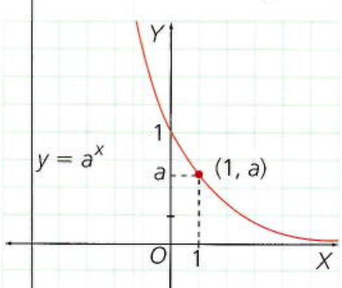


Figura 6.36

Conoce

Para determinar la cantidad de núcleos por desintegrar en el año 2053, se sustituye $N_0 = 20$, $t = 53$ y $T = 28{,}8$ en la función $N(t)$, así:

$$N = 20 \cdot 2^{-\frac{53}{28{,}8}} = 5{,}59$$

Luego, en el año 2053 quedarán 5,59 núcleos del radiactivo estroncio 90 por desintegrar. La gráfica de la función N se observa en la Figura 6.34.

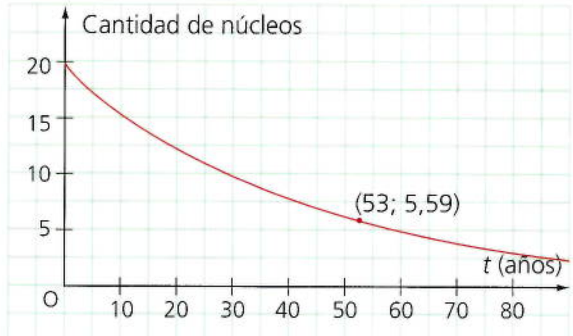


Figura 6.34

Las funciones de la forma $y = a^x$, donde a es un número real positivo distinto de 1, se denominan **funciones exponenciales**. El dominio de una función exponencial es el conjunto $\mathbb{R}$, y su recorrido, $\mathbb{R}^+$. Estas funciones son continuas en todo su dominio.

6.1 Propiedades de las funciones exponenciales

Las funciones exponenciales cumplen las siguientes propiedades.

- Sus gráficas pasan por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$, ya que $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.
- Si $a > 1$, la función $y = a^x$ es creciente en todo el dominio (Figura 6.35).
- Si $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ decrece en todo el dominio (Figura 6.36).
- Para estas funciones, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ si $a > 1$, y cuando $x \to +\infty$ si $0 < a < 1$.

Ejemplo 1

Las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se muestran en la figuras 6.37 y 6.38, respectivamente. Estas funciones se caracterizan porque pasan por $(0, 1)$, f es creciente y g es decreciente; y tienen al eje X como asíntota horizontal.

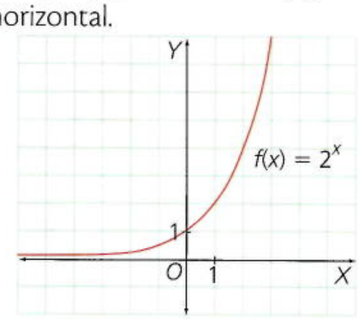


Figura 6.37

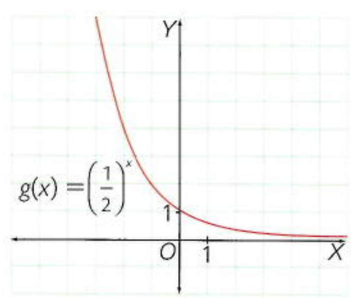


Figura 6.38

6.2 Función exponencial natural

La función de la forma $\boldsymbol{y = e^x}$ es una función exponencial cuya base es el llamado número de Euler ($e = 2{,}718281828...$). Se denomina **función exponencial natural.**

Para dibujar la gráfica de la función $y = e^x$, se completó la Tabla 6.12 y se representaron algunos puntos. Observa la Figura 6.39.

x	$f(x) = e^x$
-3	$e^{-3} = 0{,}05$
-2	$e^{-2} = 0{,}135$
-1	$e^{-1} = 0{,}368$
0	$e^0 = 1$
1	$e^1 = 2{,}718$
2	$e^2 = 7{,}389$
3	$e^3 = 20{,}086$

Tabla 6.12

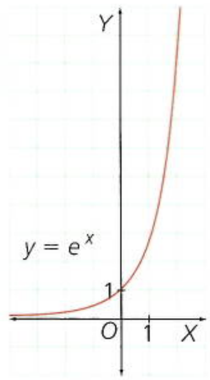


Figura 6.39

Ejemplo 2

A continuación se estudia cómo la gráfica de la función $f(x) = -e^{-(x-3)}$ es una transformación de la función exponencial natural $y = e^x$.

Función	Transformación
$y = e^{-x}$	El signo menos en el exponente significa que la gráfica de $y = e^x$ se refleja con respecto al eje Y.
$y = e^{-(x-3)}$	El número -3 indica que la gráfica de $y = e^{-x}$ se traslada tres unidades a la derecha.
$y = -e^{-(x-3)}$	El signo $-$ antes de e, significa que la gráfica de $y = e^{-(x-3)}$ se refleja con respecto al eje X.

Tabla 6.13

En la Figura 6.40 se observa la secuencia de las gráficas obtenidas con cada transformación hasta llegar a la de $f(x) = -e^{-(x-3)}$.

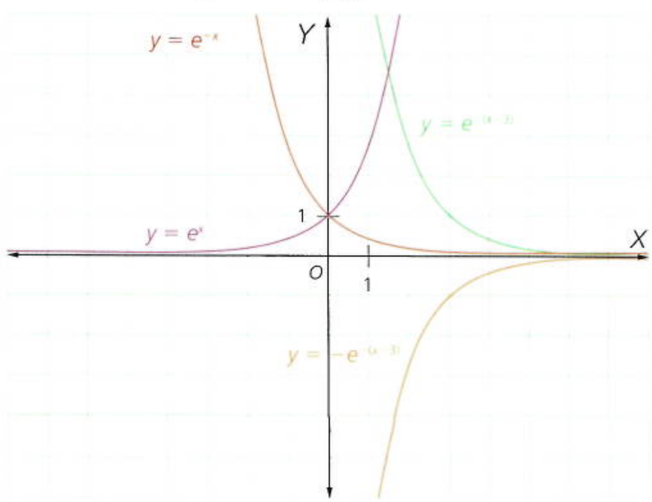


Figura 6.40

6.3 Crecimiento y decrecimiento exponencial

Para analizar algunos fenómenos estudiados en diferentes áreas del conocimiento que siguen un comportamiento exponencial, se utiliza con frecuencia la fórmula de crecimiento exponencial, dada por:

$$f(t) = X_0 e^{tk}$$

En esta expresión, X_0 es el valor inicial de la variable estudiada, t es el lapso de variación continua y k es la tasa de variación.

Ejemplo 3

La cantidad M de miligramos de un medicamento que hay en el torrente sanguíneo después de t horas de ser suministrado a un paciente, está dada por:

$$M(t) = 3e^{-0{,}4t}.$$

Si se desea saber ¿cuántos miligramos estarán presentes en el torrente sanguíneo del paciente? ¿después de una hora, se calcula el valor de la función $M(t)$ para $t = 1$ así:

$$M(t) = 3e^{-0{,}4t} \Rightarrow M(1) = 3e^{-0{,}4 \cdot 1} \Rightarrow M(1) = 2{,}01$$

El resultado anterior significa que al cabo de una hora de suministrado el medicamento, hay 2,01 mg en el torrente sanguíneo del paciente.

En la Tabla 6.14, se registraron algunos valores de la función y se obtuvo la gráfica de la Figura 6.41.

t	$M(t)$
1	2,01
2	1,35
4	0,61
5	0,41

Tabla 6.14

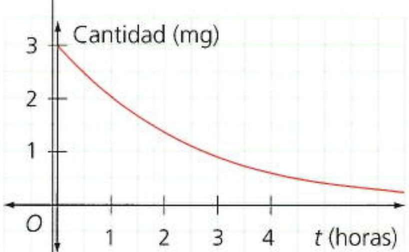


Figura 6.41

6.4 Función exponencial $y = 10^x$

La **función $y = 10^x$** es una exponencial que describe multitud de procesos naturales. Su dominio es $\mathbb{R}$, y su recorrido, $\mathbb{R}^+$. Es continua y creciente en todo su dominio.

Ejemplo 4

Para representar las funciones exponenciales $y = 10^x$ y $y = 10^{-x}$, se completa la Tabla 6.15.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 10^x$	$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$	$10^{-1} = \frac{1}{10}$	1	$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1\,000$
$y = 10^{-x}$	$10^{-(-2)} = 10^2 = 100$	$10^{-(-1)} = 10^1 = 10$	1	$10^{-1} = \frac{1}{10}$	$10^{-2} = \frac{1}{100}$	$10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$

Tabla 6.15

En la Figura 6.42 se observa que la función $y = 10^x$ es creciente en todo su dominio, mientras que $y = 10^{-x}$ es decreciente. Además, la asíntota horizontal para las dos gráficas es el eje X.

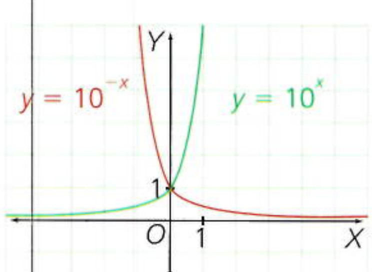


Figura 6.42

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Calcula las siguientes potencias.

a. $2^{0,27}$ b. $3^{-1,51}$ c. $5^{2,23}$ d. $3^{-4,23}$

e. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1,15}$ f. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2,47}$ g. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2,73}$ h. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2,05}$

2 Completa una tabla de valores y representa las funciones de cada par en el mismo plano cartesiano.

a. $y = 3^x$ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b. $y = 6^x$ $y = 6^{-x}$

c. $y = 10^x$ $y = 10^{x+1}$

Razonamiento

3 Determina si cada proposición es verdadera o falsa.

a. El dominio de todas las funciones exponenciales con base 10 es $\mathbb{R}$.

b. La única asíntota de la gráfica de la función $y = 10^x$ es el eje Y.

c. La gráfica de la función $y = 10^{x+7}$ se obtiene desplazando siete unidades a la izquierda la gráfica de la función $y = 10^x$.

Resolución de problemas

4 Representa las siguientes funciones exponenciales.

a. $y = 2^x$ b. $y = 4^{-x}$

c. $y = 5^x$ d. $y = 7^x$

e. $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ f. $y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

g. $y = \frac{1}{10^{-x}}$ h. $y = \frac{3}{10^x}$

i. $y = -2e^{-x}$ j. $y = -e^{-x}$

5 El elemento radiactivo carbono 14 se utiliza para determinar la antigüedad de ciertos fósiles. Si el carbono 14 decae a una velocidad de 0,012% anual, y un hueso animal tenía originalmente 20 gramos de carbono 14 hace 2 000 años, ¿cuál es la cantidad de carbono 14 que tiene en la actualidad?

Evaluación del aprendizaje

i Realiza paso a paso la gráfica de cada función. Describe su dominio, su rango y su asíntota horizontal.

a. $y = 2^x + 1$ b. $y = 3^x - 2$

c. $y = 3^{x-1}$ d. $y = 2^{x+2}$

e. $y = e^{-x}$ f. $y = -e^x$

g. $y = e^x - 1$ h. $y = 2 - e^{3x}$

ii Sara está investigando cómo varía la presión atmosférica en relación con la altura sobre el nivel del mar. Como parte de su trabajo registró algunos datos en la Tabla 6.16.

Altura (m)	Presión (mbar)
100	980
1 100	882
2 100	790
3 100	718

Tabla 6.16

Ella propuso el siguiente modelo para determinar la presión, p, a una determinada altura, h.

$$p_0 \cdot k^{\frac{h}{1000}}$$

a. Utiliza los dos primeros datos de la tabla para determinar los valores aproximados de p_0 y k, según la propuesta de Sara.

b. Sara solo considerará válido el modelo si los otros dos datos se desvían menos del 1% del valor predicho para ellos según su propuesta. ¿Debe considerarlo válido?

c. Calcula la presión, según el modelo de Sara, a una altura de 4 100 m.

7 Funciones logarítmicas. Representación gráfica

Saberes previos

Calcula los siguientes logaritmos:

- $\log_2 8$
- $\log 10\,000$
- $\log_5 3\,125$

Analiza

Para cierta población de células, el crecimiento N en un tiempo t está dado por la expresión:

$$N = 4\log_3(1 + t)$$

- Construye la gráfica de la función N y determina qué significado tiene ser creciente o decreciente.

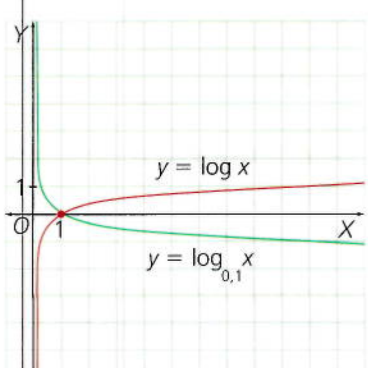


Figura 6.44

Conoce

La gráfica de la función $N = 4\log_3(1 + t)$ se observa en la Figura 6.43. El dominio de la función es $[0, \infty)$ porque el tiempo es siempre una magnitud positiva. La función es creciente, lo cual significa que la cantidad de células aumenta a medida que pasa el tiempo.

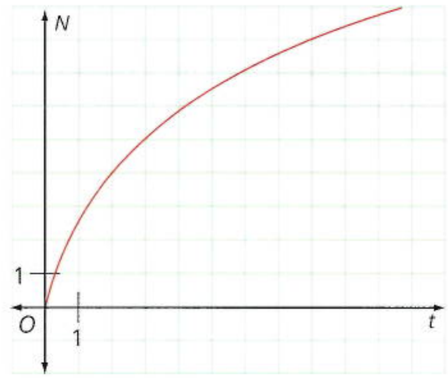


Figura 6.43

La función $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, con $a \neq 0$, denominada **función logarítmica** asocia a cada número real positivo x el valor de su logaritmo en base a, $\log_a x$.

7.1 Propiedades de las funciones logarítmicas

- Su dominio se encuentra formado por los números reales positivos, y su recorrido, por todos los números reales. Son continuas en todo su dominio.
- Si $a > 1$, la función es negativa para valores de x menores que 1 y positiva para valores de x mayores que 1, siendo creciente en todo su dominio.
- Si $a < 1$, la función es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$, siendo decreciente en todo su dominio.
- Tienen como asíntota vertical la recta $x = 0$.
- Siempre pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Ejemplo 1

La función $y = \log x$, cuya base es 10, es una función de la forma $y = \log_a x$ para $a > 1$, y $y = \log_{0,1} x$ lo es para $a < 1$. En la Figura 6.44 se presentan sus gráficas.

	$y = \log x$	$y = \log_{0,1} x$
-1	No definido	No definido
0	No definido	No definido
0,01	$\log 0{,}01 = -2$	$\log_{0,1} 0{,}01 = 2$
0,1	$\log 0{,}1 = -1$	$\log_{0,1} 0{,}1 = 1$
1	$\log 1 = 0$	0
10	$\log 10 = 1$	$\log_{0,1} 10 = -1$
100	$\log 100 = 2$	-2

Tabla 6.17

Se observa que $y = \log x$ es creciente en todo su dominio, mientras que $y = \log_{0,1} x$ es decreciente en todo su dominio.

7.2 Logaritmo natural

El logaritmo que tiene por base el número e se denomina **logaritmo neperiano** o **natural**, y se representa como **ln x**.

$$\ln x = \log_e x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

La función $f(x) = \ln x$ asocia a cada número real positivo x el valor de su logaritmo neperiano $\ln x$.

Ejemplo 2

En la Tabla 6.18 se registraron algunos valores de la función $y = \ln x$.

x	$y = \ln x$	x	$y = \ln x$
-1	No definido	2	$\ln 2 = 0{,}69$
0	No definido	$2{,}718... = e$	$\ln e = 1$
0,1	$\ln 0{,}1 = -2{,}30$	10	2,30
1	0	100	4,61

Tabla 6.18

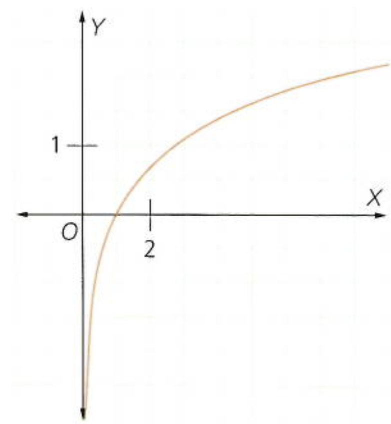


Figura 6.45

Al representar estos valores en el plano cartesiano, se obtiene la gráfica de la Figura 6.45. Allí se observa que la función es creciente en todo su dominio.

Ejemplo 3

En la Tabla 6.19 se describen las transformaciones aplicadas a la función $y = \ln x$ para obtener la de la función $y = -\ln(x + 2) - 3$.

Función	Transformación
$y = \ln(x + 2)$	El número 2 indica que la gráfica de $y = \ln x$ se traslada 2 unidades a la izquierda.
$y = -\ln(x + 2)$	El signo $-$ antes de ln, significa que la gráfica de $y = \ln(x + 2)$ se refleja con respecto al eje X.
$y = -\ln(x + 2) - 3$	El número -3 indica que la gráfica de $y = -\ln(x + 2)$ se traslada tres unidades hacia abajo.

Tabla 6.19

Observa la secuencia de las transformaciones en la Figura 6.46.

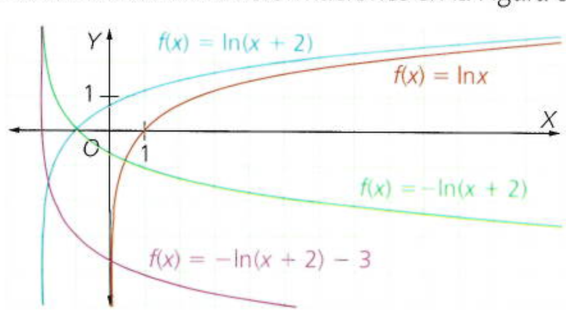


Figura 6.46

7.3 Relación entre las funciones exponenciales y logarítmicas

Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ son **recíprocas** o **inversas** y sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 4

Las gráficas de las figuras 6.47 a 6.49, muestran la relación que existe entre las funciones $y = e^x$ y $y = \ln x$.

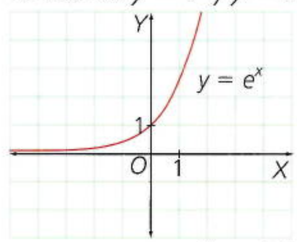


Figura 6.47

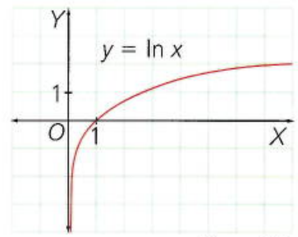


Figura 6.48

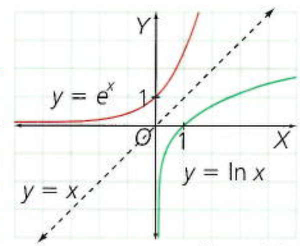


Figura 6.49

Las funciones $y = 10^x$ y $y = \log x$ son **recíprocas** o **inversas** y, en consecuencia, sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 5

En las figuras 6.50 a 6.52 se observa la relación que existe entre las funciones $y = 10^x$ y $y = \log x$.

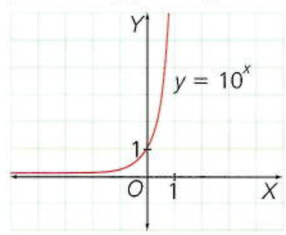


Figura 6.50

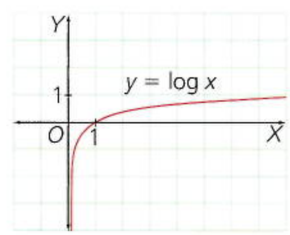


Figura 6.51

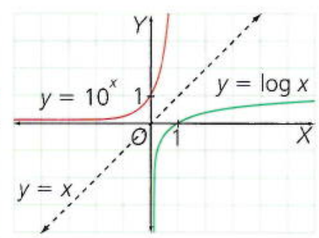


Figura 6.52

La función exponencial $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) es la recíproca de la función logarítmica de la misma base, $y = \log_a x$, por lo que sus gráficas respectivas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 6

Las funciones $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son recíprocas. Sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$ y se observan en la Figura 6.53.

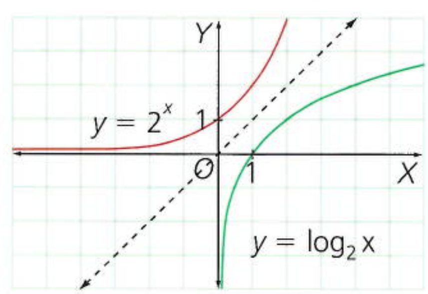


Figura 6.53

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Selecciona la palabra que indica de qué tipo es cada una de las siguientes funciones.

a. $y = e^{2x}$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

b. $y = ex$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

c. $y = \log(x + 3)$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

d. $y = x \cdot \ln 2$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

e. $y = 4^{-x}$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

f. $y = x^3$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

g. $y = \ln(2x)$

Exponencial | Logarítmica | Ni exponencial ni logarítmica

Comunicación

2 Completa la Tabla 6.20.

Función	Dominio
a. $y = \log(1 - x^2)$	
b. $y = \ln(x^2 - x)$	
c. $y = x + \ln x$	
d. $y = x(\ln x)^2$	
e. $y = \dfrac{\ln x}{x}$	
f. $y = x\log(x + 10)$	

Tabla 6.20

Resolución de problemas

3 El *pH* mide el carácter ácido o básico de una sustancia, y se encuentra relacionado con la concentración de iones de hidrógeno de la misma, x, que se mide en mol por litro, según la fórmula $pH = -\log x$.

a. Representa la función del *pH*.

b. El *pH* de un gel de ducha es 5,5. ¿Qué concentración de iones de hidrógeno tiene?

c. Para valores de *pH* menores que 7, la sustancia es ácida y, en caso contrario, básica. ¿Cuántos moles por litro de iones de hidrógeno puede contener una sustancia en cada caso?

Evaluación del aprendizaje

i A partir de la gráfica de la función $y = \ln x$, representa la gráfica de estas funciones.

$$y = -\ln x \text{ y } y = |\ln x|$$

ii Representa la función $y = 4^x$ y, a partir de su gráfica, dibuja la de la función $y = \log_4 x$.

iii La sonoridad o sensación auditiva de un sonido, β, se mide en decibelios (dB), y se encuentra relacionada con la intensidad de la onda sonora, I, que se mide en vatios por metro cuadrado (W/m²).

$$\beta = 120 + 10\log I$$

a. La intensidad de las ondas sonoras que son audibles sin producir dolor está entre 10^{-12} W/m² y 1 W/m². ¿Entre qué valores se halla comprendida la sonoridad que producen?

b. Si estás escuchando música en un reproductor MP3 con 20 decibelios, ¿cuál es la intensidad de las ondas al salir de los auriculares?

8 Funciones racionales. Representación gráfica

Saberes previos

Identifica las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$.

Analiza

Una empresa de refrescos desea diseñar un envase cilíndrico que contenga 330 cm³ de refresco.

Si r es el radio de la base y h la altura del envase cilíndrico en centímetros, ¿cuál es la expresión que permite calcular la superficie total del envase en términos del radio r?

Conoce

Para comenzar, se debe recordar la fórmula que permite calcular el volumen, V, de un cilindro de radio r y altura h.

$$V = \pi r^2 h = 300$$

Por otra parte, la superficie total, S, que es igual al área lateral más el área de las dos bases, se puede expresar como:

$$S(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

Si se despeja h de la expresión del volumen y se sustituye en S, se obtiene:

$$h = \frac{330}{\pi r^2} \Rightarrow S(r) = 2\pi r\left(\frac{330}{\pi r^2} + r\right) \Rightarrow S(r) = \frac{660 + 2\pi r^3}{r}$$

Esta función pertenece a las llamadas **funciones racionales**.

Las funciones de la forma $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, con $q(x) \neq 0$, se denominan **funciones racionales**.

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores de x que anulan el denominador.

Ejemplo 1

En la Figura 6.54 se observa la gráfica de la función racional $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$. Dado que el denominador se anula en el valor $x = 3$, el dominio de g es $\mathbb{R} - \{3\}$ y la recta $x = 3$ es una asíntota vertical de la función.

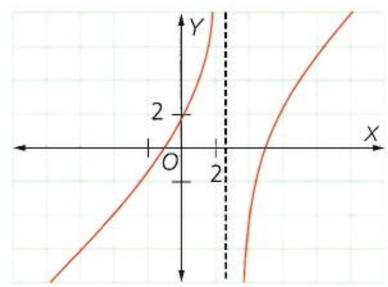


Figura 6.54

Ejemplo 2

Las funciones $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$ y $h(x) = \dfrac{3x^4 - 7}{x^3 - x}$ son racionales.

- El denominador de la función $f(x)$ se anula en $x = -3$, por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$
- Al factorizar el denominador de $h(x)$ se obtiene $x(x + 1)(x - 1)$, que se anula en $x = 0, x = -1$ y $x = 1$, por tanto, $D(h) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

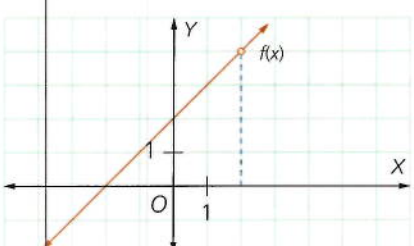


Figura 6.55

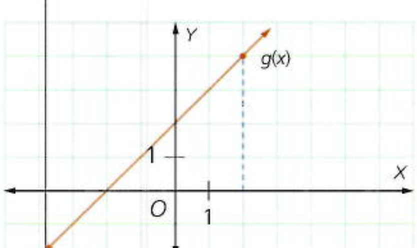


Figura 6.56

Ejemplo 3

El denominador de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ se anula en $x = 2$, luego $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

La función $g(x) = x + 2$ se encuentra definida en todo $\mathbb{R}$.

En las figuras 6.55 y 6.56 se observa, en las gráficas de ambas funciones, que son iguales salvo en el punto $x = 2$. Esto se debe a que, para $x \neq 2$, $g(x)$ se obtiene directamente de dividir el numerador y el denominador de $f(x)$ entre $(x - 2)$; sin embargo, cuando $x = 2$, no se puede realizar esta división. Por eso, $f(2)$ no se encuentra definida, mientras que $g(2)$ sí lo está.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Analiza cada función. Luego, completa la Tabla 6.21.

Función	¿Es racional? Sí	No
a. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$		
b. $h(x) = \frac{5x + 3}{4}$		
c. $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 5}$		
d. $i(x) = \frac{x^2 + 2x^3}{x^2 + 7}$		
e. $j(x) = \frac{-5}{x^3 - 9x}$		
f. $k(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$		

Tabla 6.21

2 Ten en cuenta estas funciones y realiza lo que se indica a continuación.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$h(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - x - 2}$$

a. Halla el dominio de cada una.

b. Representa la gráfica de $f(x)$.

3 Señala el dominio de cada función.

a. $y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x}$ $\quad \mathbb{R} - \{3\}$ $\quad \mathbb{R} - \{-3\}$

b. $y = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 6}$ $\quad \mathbb{R} - \{-2, -3\}$ $\quad \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

c. $y = \frac{3x^2 + 6}{x^2 - 2x - 3}$ $\quad \mathbb{R} - \{-1, 3\}$ $\quad \mathbb{R} - \{-1, -3\}$

d. $y = \frac{5x^2 + 5}{x^2 + 4x + 4}$ $\quad \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad \mathbb{R} - \{-2, -3\}$

e. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 3x^2}$ $\quad \mathbb{R} - \{0, 3\}$ $\quad \mathbb{R} - \{0, -3\}$

f. $y = \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x - 2}$ $\quad \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ $\quad \mathbb{R} - \{-1, -2\}$

Resolución de problemas

4 Para hallar las intersecciones de una función racional con el eje X, se iguala la función a 0 y se despeja el valor de x. Para determinar las intersecciones con el eje Y, se sustituye por $x = 0$ en la función. Así, en la función $y = \frac{x - 1}{x + 4}$ al igualar a 0, se obtiene: $\frac{x - 1}{x + 4} = 0$, entonces $x = 1$. Por lo tanto, la intersección de la gráfica de f con el eje X es en $x = 1$.

Por otra parte, si se sustituye por $x = 0$ en la función, se obtiene: $\frac{0 - 1}{0 + 4}$, entonces $y = -\frac{1}{4}$, lo que indica que la intersección de la gráfica de f con el eje Y es en $y = -\frac{1}{4}$.

Determina las intersecciones con los ejes coordenados de cada función racional:

a. $y = \frac{3x}{x - 5}$ $\qquad$ b. $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 6}$

c. $y = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$ $\qquad$ d. $y = \frac{x^2 - 9}{x^2}$

Evaluación del aprendizaje

Representa cada función racional. Luego, halla su dominio.

a. $y = \frac{5x^2}{x^2 - 16}$ $\qquad$ b. $y = \frac{6x^3}{x - 7}$

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Supón que adquieres un crédito educativo cuyos intereses anuales (durante 10 años) están dados por $f(x) = \frac{40x}{x^2 + 40}$, donde x es la cantidad de años y $f(x)$ el dinero en millones de pesos. ¿En qué año debes pagar el interés más alto? Describe una meta de tu proyecto de vida, ¿cómo la alcanzarías?

Practica más

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Función cuadrática . Representación gráfica

Comunicación

1 Determina los elementos de la función cuadrática representada en la Figura 6.57.

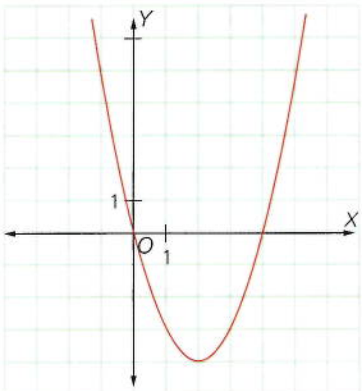


Figura 6.57

Ejercitación

2 Traza la gráfica de cada función. Luego, halla el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con el eje X de la parábola correspondiente.

a. $f(x) = x^2 - 16$ b. $f(x) = 9x^2$

c. $f(x) = x^2 - 2x$ d. $f(x) = 2x^2 - 2x + 8$

Comunicación

3 Relaciona la ecuación con sus soluciones.

a. $x^2 - 4 = 0$	1. 4 y -3
b. $(x + 8)^2 = 0$	2. -2 y 2
c. $x^2 + 6x + 9 = 0$	3. -8
d. $(x - 4)(x + 3) = 0$	4. -3

Resolución de problemas

4 Halla las dimensiones del rectángulo (Figura 6.58).

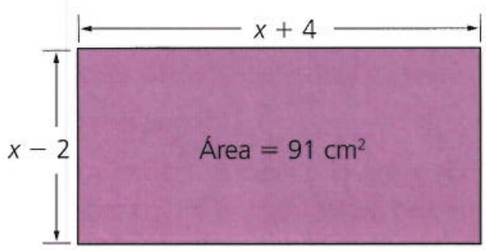


Figura 6.58

Funciones

Comunicación

5 Represente las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^4 + x + 6$ b. $f(x) = 3x^3 + x^2$

c. $f(x) = x^4 + x^3 + x - 2$ d. $f(x) = x^3 - 5$

6 Representa las siguientes funciones. Identifica los valores donde la función no está definida y traza sus asíntotas.

a. $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$ b. $f(x) = \dfrac{-3}{x + 2}$

c. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x + 2}$ d. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

Razonamiento

7 Determina el valor al que tiende la función representada en la Figura 6.59, en cada caso.

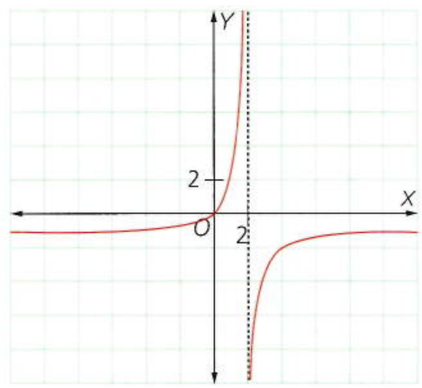


Figura 6.59

a. Cuando x se acerca a 0.

b. Cuando x se acerca a 2.

c. Cuando x tiende a $+\infty$.

d. Cuando x tiende a $-\infty$.

Resolución de problemas

8 La energía liberada en un terremoto, medida en kilovatios-hora, sigue aproximadamente la función:

$$E(x) = 0{,}02 \cdot 10^{1{,}5x}$$

En esta expresión, x es la magnitud del terremoto en la escala de Richter.

a. Si un terremoto tuvo una magnitud de 8, ¿cuál fue la energía liberada?

b. Realiza la gráfica de la función E.

c. ¿Cuál es el dominio y rango de la función E?

Resolución de **problemas**

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Estrategia: Elaborar una gráfica

Problema

Si las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son tres números enteros consecutivos, ¿cuáles son las dimensiones del triángulo?

1. Comprende el problema

- ¿Qué información proporciona el enunciado?
  R: El tipo de triángulo y la relación entre sus lados.
- ¿Qué debes averiguar?
  R: Las dimensiones del triángulo.

2. Crea un plan

- Representa la situación, simboliza el enunciado y resuelve la ecuación que se plantee.

3. Ejecuta el plan

- En la Figura 6.60 se muestra la situación planteada.

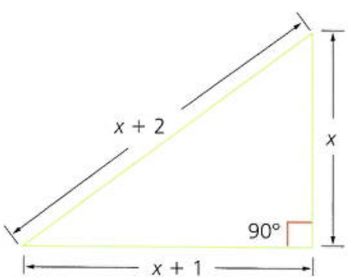


Figura 6.60

- Al aplicar el teorema de Pitágoras se tiene la ecuación:

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

- La ecuación es equivalente a:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

- Se resuelve la ecuación por factorización:

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -1$$

- Se descarta el valor negativo.

R: Las dimensiones del triángulo rectángulo son 3, 4 y 5.

4. Comprueba la respuesta

- Verifica que los lados del triángulo rectángulo cumplen el teorema de Pitágoras.

Aplica la estrategia

1. El largo de un rectángulo es 2 m más que el ancho. Su área es 48 m². Si el ancho disminuye 2 m y el largo aumenta 2 m, el área disminuye 8 m², ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

   a. Comprende el problema

   ....

   b. Crea un plan

   ....

   c. Ejecuta el plan

   ....

   d. Comprueba la respuesta

   ....

Resuelve otros problemas

2. Un paciente elimina un medicamento a través de la orina. Para una dosis de 10 mg, la cantidad en el cuerpo luego de t horas está dada por la expresión $A(t) = 10(0{,}8)^t$. ¿Qué cantidad de medicamento queda aún en el cuerpo luego de 8 horas de la dosis inicial?

3. Si la suma de un número con su recíproco es $\frac{5}{2}$, ¿cuál es el número?

Formula problemas

4. Inventa un problema que involucre la siguiente información y resuélvelo.

> "El crecimiento de una población está dado por la expresión $p(x) = 3\,500\,000\,(1{,}01)^x$"

Enriquece tu vocabulario

- Explica las diferencias y semejanzas entre funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

Evaluación del aprendizaje

Función cuadrática. Representación gráfica

Ejercitación

1 Observa la Figura 6.61. Luego, responde verdadero (V) o falso (F) según corresponda. VERDADERO / FALSO

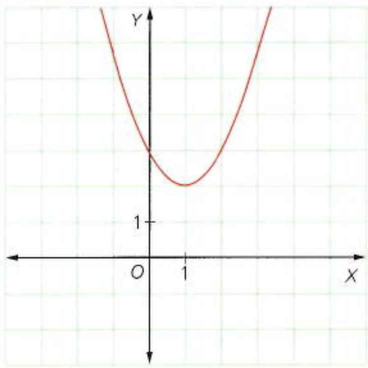


Figura 6.61

a. El vértice de la parábola es (2, 1). ( )

b. El eje de simetría es la recta $y = 1$. ( )

c. La gráfica corresponde a una función cuadrática. ( )

d. La gráfica no interseca el eje X. ( )

Razonamiento

2 Selecciona la parábola con vértice en $\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ y cortes con el eje X en $x_1 = 4$ y $x_2 = -1$. SELECCIÓN MÚLTIPLE

a.

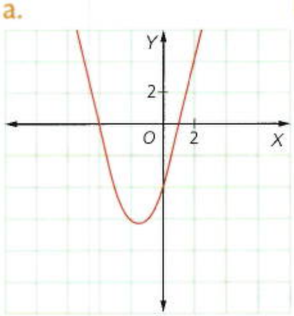


Figura 6.62

b.

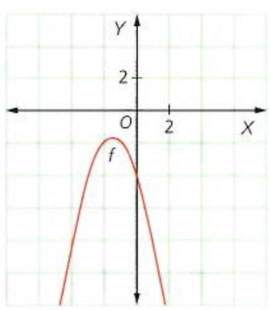


Figura 6.63

c.

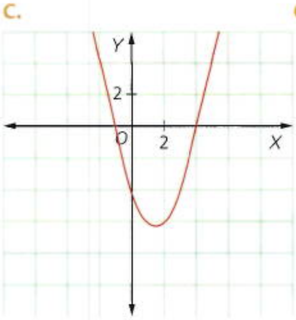


Figura 6.64

d.

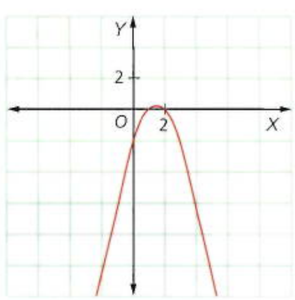


Figura 6.65

Comunicación

3 Explica si es posible que la gráfica de una función cuadrática no corte a ninguno de los dos ejes.

PREGUNTA ABIERTA

Resolución de problemas

4 El área sombreada es 88 cm². ¿Cuál es el valor de x?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

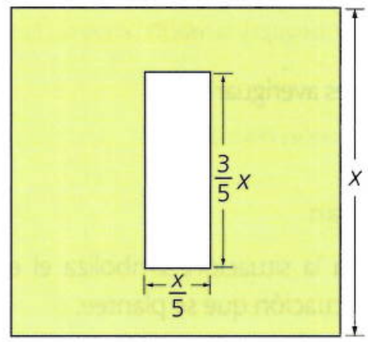


Figura 6.66

5 El volumen de un cono está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, en el que r es el radio de la base y h su altura. Al envasar 100 cm³ de líquido en un cono de 12 cm de altura, quedan sin envasar 21,46 cm³. ¿Cuál es el radio del cono?

ACTIVIDAD DE APLICACIÓN

6 Halla la cantidad de alambre que se requiere para cercar el terreno dibujado en el plano, si su área es igual a 48 m².

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

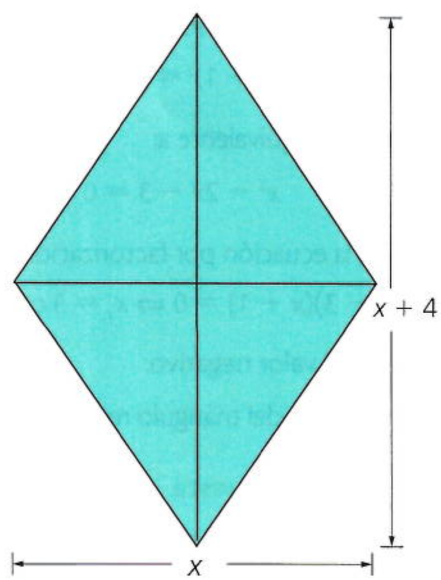


Figura 6.67

Funciones polinómicas y funciones racionales

Comunicación

7 Justifica si las proposiciones son falsas o verdaderas. PREGUNTA ABIERTA

a. El dominio de toda función polinómica está conformado por los números reales positivos.

b. El rango de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$.

Modelación

8 Analiza la función $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ y responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda. VERDADERO / FALSO

a. La gráfica de la función intersecta al eje de las ordenadas en el punto (0, 2). ( )

b. El dominio de la función es $\mathbb{R}$. ( )

c. El rango de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$. ( )

d. La función no tiene inversa. ( )

e. La función es decreciente. ( )

Razonamiento

9 Observa la gráfica de la función $g(x) = x^4 - 1$ y responde las preguntas. Justifica tus respuestas. ACTIVIDAD DE REFUERZO

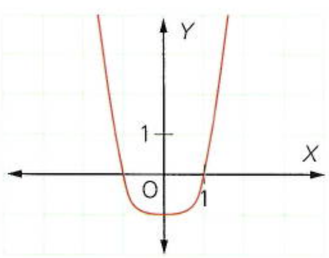


Figura 6.68

a. ¿La gráfica corresponde a una parábola?

b. ¿Cuál es el dominio de la función?

c. ¿Y el rango?

d. ¿Es continua en todo su dominio?

10 Halla las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$. ACTIVIDAD DE REFUERZO

Funciones exponenciales y logarítmicas

Ejercitación

11 Determina lo que se indica en cada caso. ACTIVIDAD PARA COMPLETAR

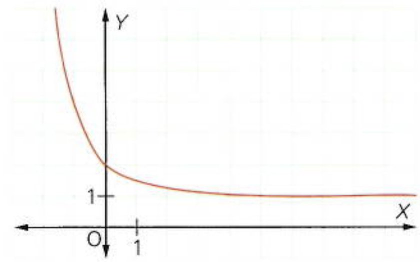


Figura 6.69

a. Dominio de la función

b. Rango de la función

c. Intersecto con el eje X

d. Intersecto con el eje Y

e. Asíntota horizontal

12 Relaciona cada expresión con su correspondiente potencia en la columna de la derecha. ACTIVIDAD PARA RELACIONAR

a. $10^{-1,2}$	• 0,63095
b. $10^{\frac{4}{5}}$	• 0,063095
c. $10^{-2,2}$	• 0,0063095
d. $10^{1,8}$	• 6,3095
e. $10^{-0,2}$	• 63,095

Modelación

13 Identifica la función de la forma $y = \log_a x$ para la siguiente gráfica. ACTIVIDAD DE REFUERZO

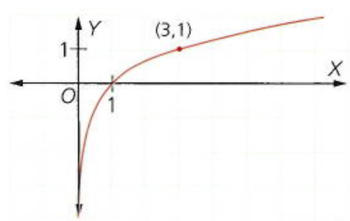


Figura 6.70

Resolución de problemas

14 Una bacteria se duplica cada 20 minutos. Determina la expresión en función del tiempo que modele la variación de la población de bacterias, si al inicio del experimento hay 20 bacterias. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Glosario

A

Aleatorio. Experimento que depende del azar y cuyo resultado no se puede predecir.

Altura de una pirámide. Segmento que va desde el vértice hasta el plano de la base y es perpendicular a este.

Ángulos alternos externos. Ángulos que se forman en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos alternos internos. Ángulos que se forman internamente, en lados opuestos con respecto a una transversal que corta dos rectas no adyacentes.

Ángulos opuestos por el vértice. Ángulos que tienen un vértice común, y los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

B

Baricentro. Punto en que concurren las medianas de un triángulo.

Binomio. Expresión algebraica que tiene dos términos.

Bisectriz. Recta que pasa por el eje de simetría de un ángulo.

C

Circuncentro. Punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Coeficiente. Constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Cuadrado perfecto. Número que se obtiene al elevar otro número al cuadrado o a la dos.

D

Decimal periódico. Número cuya parte decimal está compuesta por una cifra o un conjunto de cifras que se repiten hasta el infinito.

Desigualdad. Relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es el mayor o el menor.

Dominio. Conjunto compuesto por los primeros componentes de los pares ordenados de una función.

E

Ecuación lineal. Ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales, x representa la incógnita y $a \neq 0$.

Esfera. Es un sólido tal que todos los puntos de su superficie están a una misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Espacio muestral. Conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento. Cualquier subconjunto de un espacio muestral.

Eventos dependientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, su probabilidad.

Eventos independientes. Eventos en donde la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro y, por lo tanto, no afecta su probabilidad.

Expresión algebraica irracional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable bajo el signo radical.

Expresión algebraica racional. Expresión algebraica en la que aparece alguna variable en el denominador.

F

Fracción algebraica. Es el cociente entre dos polinomios.

Fracción compleja. Es aquella fracción cuyo denominador o numerador, o ambos, presentan una fracción.

Frecuencia relativa. Es el resultado de dividir la frecuencia absoluta entre el número de datos del experimento estadístico.

Función. Regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B.

Función afín. Función de la forma $y = mx + b$, donde m y b son constantes.

Frecuencia cuadrática. Ecuación polinómica de segundo grado, del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, en la que los coeficientes a, b y c son números reales. La representación de la función equivale a una parábola.

Función lineal. Función de la forma $y = mx$, donde m es una constante.

I

Incentro. Punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo.

Inecuación. Relación de desigualdad entre expresiones algebraicas.

L

Logaritmo. Se define como logaritmo en base a de un número b, a otro número c tal que a elevado al exponente c da como resultado el número b: $\text{Log}_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

M

Media aritmética. Promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Mediana (estadística). Valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

Medidas de tendencia central. Valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Moda. Valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

N

Notación científica. Forma de escribir un número como producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Número irracional. Número que no se puede escribir como el cociente entre dos números enteros.

Número racional. Número que se puede expresar como el cociente de dos números enteros siempre y cuando el divisor sea diferente de 0.

Números reales. Unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales.

O

Ortoedro. Es el paralelepípedo recto de base rectangular.

Paralelepípedo. Prisma de seis caras con forma de paralelogramos. Cuando todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo es recto.

Pendiente. En un sistema de coordenadas cartesianas, es la razón entre el cambio vertical y el cambio horizontal entre dos puntos de una recta.

Polígono cóncavo. Es aquel en el que la recta que pasa por uno o más lados corta a otro lado del polígono.

Polígono convexo. Es aquel cuyos lados interiores son menores que 180º. Además, la recta que pasa por cualquiera de los lados no corta a ningún otro lado del polígono.

S

Sistemas de ecuaciones lineales. Conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas. El conjunto de parejas ordenadas que satisfacen ambas ecuaciones se denomina conjunto solución del sistema.

T

Teorema. Proposición que afirma una verdad demostrable.

Teorema de Pitágoras. Teorema que establece que, en los triángulos rectángulos, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Término. Cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Triángulo acutángulo. Triángulo que tiene los tres ángulos agudos.

Triángulo equiángulo. Triángulo cuyos ángulos interiores tienen igual medida.

Triángulo equilátero. Triángulo que tiene todos los lados iguales.

Triángulo escaleno. Triángulo que tiene todos los lados diferentes.

Triángulo isósceles. Triángulo que tiene dos lados iguales.

Triángulo obtusángulo. Triángulo que tiene un ángulo obtuso.

Triángulo rectángulo. Triángulo que tiene un ángulo recto.

Triángulos congruentes. Triángulos en los que hay una correspondencia entre sus vértices, de modo que cada par de lados y de ángulos correspondientes miden lo mismo.

V

Valor absoluto. Se define como: la distancia que hay entre un número real c y el 0.

Valor numérico de un monomio. Número que se obtiene al sustituir las letras por números.

Variable algebraica. Cada una de las letras distintas que aparecen en una expresión.

Variable dependiente. Variable cuyos valores dependen de los valores que se asignen a la variable independiente.

Variable independiente. Variable a la cual se asignan valores arbitrarios en una función.

Bibliografía

- Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Barcelona: Gedisa, 1990.
- Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A. Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis, 1995.
- Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
- Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 2007.
- Castro, Encarnación; Rico, Luis, y Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis, 1996.
- Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. Madrid: Síntesis, 1997.
- Clemens *et al*. *Geometría* Serie Awli. México: Pearson, 1998.
- De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Málaga: Ágora, 1990.
- Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor, 1991.
- Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Pearson-Addison Wesley V. A. M, 1994.
- Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Barcelona: Gedisa, 1995.
- Jouette, André. *El secreto de los números*. Bogotá: Intermedio, 2002.
- Küchemann, D. "The meaning children give to the letters in generalised arithmetic." En: Cognitive Development Research in Sci. and Math. 1980. The University of Leeds (2002): 28-33.
- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. México: Harla, S. A. de C.V., 1972.
- Mason, J.; Burton, L., y Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. Barcelona/Madrid: Labor/MEC, 1992.
- Ministerio de Educación Nacional. *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, 2006.
- Ministerio de Educación Nacional. *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá, 1998.
- Moise, Edwin, y Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, 1966.
- Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa*. Moscú: Mir, 1986.
- Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1989.
- Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. México: Compañía Editorial Continental S. A., 1996.
- Rich, Barnett. *Geometría*. México: McGraw-Hill, 1991.
- Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes, y Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra*. México: Síntesis, 1991.
- Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. México: McGraw-Hill, 1975.
- Suppes, Patrick, y Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Bogotá: Reverté, 1976.
- Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. México: Thomson Editores, 1998.
- Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. México: Limusa, 1988.
- Zill, Dennis, y Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. México: McGraw-Hill, 2000.